دانشگاه الزهراء(س)
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته‌ی فیزیک نظری

عنوان
شبیه سازی تشکیل سیاره

استاد راهنما
دکتر احمد شریعتی

استاد مشاور
دکتر محمد خرمی

دانشجو
الهه مسگران کریمی

شهریور ماه ۱۳۸۷

از جناب آقای دکتر شریعتی به پاس راهنماییهای فراوانشان تشکر می‌کنم و سلامتی وبهروزیشان را از درگاه خداوند متعال خواستارم.

چکیده

این پایان نامه در واقع، یک شبیه سازی کامپیوتری از مسأله سه جسم محدود شده (که شامل دو جسم سنگین ویک جسم سوم با جرم ناچیز با فرض اینکه جسم سوم هیچ اثر گرانشی روی دو جسم دیگر نداشته باشد) می باشد .

در این شبیه سازی برای حل معادلات دیفرانسیل، از روش حل عددی (رانگ — کوتای مرتبه ۴ و ۵) استفاده کرده‌ایم. برنامه کامپیوتری به زبان فرترن ۹۰ نوشته شده و خروجی آن به کمک نرم افزار *post script* قابل رؤیت است .

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ مقدمه

اگرچه عمر زیادی از وارد شدن کامپیوتر در علم نمی گذرد ولی با این وجود، کامپیوتر نقش خود را در علم بسیار سریع پیدا کرده و یکی از ابزارهای مهم و جدا نشدنی در کارهای علمی شده است. ما روزانه به دلایل مختلفی از کامپیوتر استفاده می کنیم، از وقتی که محاسبات عددی و تحلیل داده هاو نمودارهایمان را با نرم افزارهای کامپیوتری انجام می دهیم تا وقتی که در آزمایشگاه، دستگاه آزمایش را به کامپیوتر وصل می کنیم تا به کمک یک واسط سخت افزاری، آزمایشهایمان را کنترل کنیم، در حال استفاده از کامپیوتر هستیم.

اما چیزی که ما از آن استفاده کرده ایم، شبیه سازی کامپیوتری است. شبیه سازی کامپیوتری بدین معناست که سیستمهای فیزیکی که اطلاعاتی از جزئیاتش داریم و معادلات پایه اش را می دانیم ولی امکان حل این معادلات وجود ندارد، شبیه‌اش را می سازیم.

همواره یک همکاری و رد و بدل بین آزمایشگاه و نظریه در فیزیک برقرار بوده است. معمولاً و به طور تاریخی این گونه بوده که از آزمایشها ، نتایجی در می آید بعد از آن نظریه ساخته می شود و این نظریه، پیش بینیهایی می کند که این پیش بینیها در آزمایشگاه، تأیید یا رد می شود. اطلاعاتش دوباره به نظریه برمی گردد و بدین ترتیب همین طور این رفت و برگشت بین آزمایش ونظریه، انجام می گیرد. نکته‌ای که وجود دارد این است که آزمایشگاه و نظریه، محدوده‌ای را در برمی گیرند که در بعضی جاها،نظریه و آزمایشگاه خیلی به هم نزدیکند. بدین معنی که برای پدیده هایی که در آزمایشگاه دیده می شوند، می توان نظریه‌های خوبی ساخت و هرچه درنظریه بدست می آید را می توان در آزمایشگاه دید و تأیید یا رد کرد. ولی در بعضی مواقع، توانایی ساختن مدلی که بتواند نتایج تولید شده در آزمایشگاه را توضیح بدهد، نداریم. برای همین یک پل ارتباطی بین آزمایشگاه و نظریه برقرار شده که این پل ارتباطی، شبیه‌سازی است.

قواعد و مراحل کار شبیه سازی، بسیار شبیه مراحل و قواعد کار آزمایشگاهی است. به خاطر همین شباهت هم ممکن است از کسی که کار شبیه‌سازی می کند بشنوید که چند بار آزمایش کردیم، بدین معنی که چند بار برنامه را اجرا کردیم و از آن داده گرفتیم. در آزمایشگاه ما نمونه‌ای داریم که روی آن آزمایش انجام می دهیم و در شبیه‌سازی ما یک مدل داریم که بوسیله آن مدل، برنامه کامپیوتری را می نویسیم. در آزمایشگاه یک دستگاه آزمایش داریم که روی آن آزمایش را انجام می دهیم و در شبیه‌سازی یک برنامه و

کد کامپیوتری داریم که از روی مدلمان، آن را می نویسیم. در آزمایشگاه بعد از اینکه دستگاه ساخته شد، اندازه گیری اولیه‌ای انجام می دهیم تا از مناسب بودن دستگاه آزمایش آگاه شویم. در شبیه‌سازی هم بعد از نوشتن برنامه، آن را اجرای اولیه می کنیم. معمولاً در آزمایشگاه در اندازه گیری اولیه با مشکلات زیادی مواجه می شویم و باید دستگاه را تنظیم و کالیبره کنیم. در شبیه‌سازی، برنامه را رفع اشکال و $debug$ می کنیم. در نهایت اندازه‌گیری نهایی را انجام می دهیم که شامل جمع آوری داده‌ها است که این قدم در آزمایشگاه و شبیه‌سازی، مشترک است. پس از جمع آوری داده‌ها، نوبت تحلیل داده‌ها است که این مرحله هم در هر دو مشترک است.

از لحاظ دیگری نیز آزمایشگاه و شبیه‌سازی شبیه هم هستند. همانطور که در بعضی موارد، آزمایشگر با آزمون و خطا کارهایی را انجام می دهد و عوامل تأثیر گذار را در آزمایش پیدا می کند، کسانی که شبیه‌سازی می کنند، گاهی با شبیه‌سازی این سعی و خطا را انجام می دهند. یکی دیگر از شباهتها این است که همانطور که گاهی آزمایشی چندین ماه طول می کشد و آزمایشگر مراحل کار و تغییراتی که در دستگاه آزمایش می دهد را دائماً یادداشت می کند، یک شبیه‌سازی جدی هم ممکن است چندین ماه طول بکشد و یک شبیه ساز خوب هم تغییراتی را که در برنامه‌اش می دهد، ثبت می کند. چون اگر این تغییرات ثبت نشود ممکن است بعد از مدتی هم آزمایشگر و هم شبیه ساز گیج شوند و دوباره کاریهایی انجام دهند.

۲.۱ کاربردهای شبیه سازی

همانطور که گفته شد ، شبیه سازی پلی است بین آزمایشگاه و نظریه. در بسیاری از حیطه‌های فیزیک معضلی وجود دارد که یا نظریه یا آزمایش جلوتر از یکدیگر هستند و دیدیم که شبیه‌سازی چگونه می تواند این شکاف را پر کند .

یکی دیگر از امکانات شبیه‌سازی این است که در مقیاسهایی می توان کار کرد که در آزمایشگاه، خیلی دسترسی به آن مقیاسها را نداریم. مقیاسها و ابعاد خیلی کوچک مثل فیزیک نانو و یا ابعاد بسیار بزرگ مثل کهکشانها. برای مثال در حوزه نانو که امروزه با چندین ده اتم آزمایشهایی ترتیب داده می شود، تا چندی پیش تصور آنکه بتوان در چنین ابعادی آزمایشی ترتیب داد غیر ممکن بود. در صورتی که در شبیه‌سازی و به خاطر محدودیتهایی که داشتیم شبیه‌سازی با همین تعداد اتم مقدور بود و نتایجی که از این شبیه‌سازیها بدست آمد، آزمایشگرها را تشویق کرد که در این ابعاد کار کنند و نتایج خوبی در این زمینه بدست آمد. یا در ابعاد کهکشانها می توان برخورد دو کهکشان به هم را شبیه‌سازی کرد چیزی که در زندگی روزمره مشاهده آن بسیار سخت و نادر است.

۳.۱ محدودیتهای کامپیوتر

تا اینجا به نظر می رسد که علی الاصول به کمک شبیه‌سازی می توان تقریباً هر پدیده ای را شبیه‌سازی و پیش بینی کرد. ولی در عمل می بینیم که این اتفاق نمی‌افتد و دلیلش هم محدودیتهای کامپیوتر است که این محدودیتها عموماً قابل رفع هم نیستند. بنابراین شاید بد نباشد که در اینجا اشاره‌ای هم به محدودیتهای کامپیوتر و شبیه‌سازی بکنیم.

در کامپیوتر همیشه با محدودیت مکان و زمانی تعداد محاسبات مواجه هستیم. برای مثال همواره تعداد محدودی ذره را می توانیم شبیه‌سازی کنیم و اگر بخواهیم تعداد ذرات را زیادتر کنیم، ناچاریم که از جزئیات صرفنظر کنیم. در شبیه‌سازی یک کهکشان ناچاریم که از ذرات کوچکتر از خورشید صرفنظر کنیم در رده‌ای از محاسبات شاید بتوان با افزایش قدرت محاسباتی کامپیوتر یا موازی کردن چند کامپیوتر با هم این محدودیت را رفع کرد اما در رده‌ای از مسائل فیزیکی که به مسائل NP [1] معروفند، به هیچ وجه نمی توان این مشکل را رفع کرد. در این مسائل با افزایش تعداد ذرات، محاسبات و تعداد عملیاتهایی که باید انجام شود به صورت نمایی رشد می کند و عملاً هیچ وقت نمی توان این مسائل را به طور کامل حل کرد.

[1] مسائل $Non-Polynomial$ را در مقابل مسائل $Polynomial$ استفاده می کنند. در این گونه مسائل، P پیچیدگی مسأله به صورت چند جمله‌ای با افزایش تعداد اجزای مسأله افزایش می یابد.

فصل ۲

مسأله سه جسم

۱.۲ مسأله سه جسم محدود

از لحاظ تاریخی، مبدأ شکل گیری مسأله سه جسم به ساختار دینامیکی اخترشناسی نوین باز می گردد. این بخش از مکانیک سماوی که پدیده‌های قابل مشاهده در طبیعت را با توجیهات فیزیکی و مکانیکی ارتباط می دهد با تعریف گرانش نیوتن آغاز می شود. از آنجا که قانون گرانش نیوتن خود به تنهایی حرکات اجسام سماوی در فضا را توصیف می کند نیوتن با روشهای هندسی، مسأله دو جسم تحت گرانش یکدیکر را حل کرد و پس از آن درسال 1710 یوهان برنولی ثابت کرد که حرکات این اجرام نسبت به یکدیگر به صورت مقاطع مخروطی است[6]. درسال 1734 نیز دانیل برنولی به خاطرحل تحلیلی مسأله حرکت دو جسم تحت گرانش یکدیگر جایزه آکادمی فرانسه را دریافت کرد و در 1744 اویلراین مسأله را باتمام جزئیاتش حل کرد[6]. اما با مطرح شدن نظریه قمری [1] یعنی مطالعه دقیق حرکت ماه در طی سال، مسأله سه جسم اهمیت پیدا کرد.

حرکت یک سیاره در میدان جاذبه خورشید را می توان به خوبی با نیروی مرکزی تشریح کرد زیرا جرم خورشید درمقایسه با جرم سیاره بسیار بزرگ است به گونه‌ای که از حرکت آن می توان چشم پوشی کرد. مسأله عمومی سه جسمی یعنی محاسبه حرکت سه جسم با جرمهای مختلف، تعیین مکانها و سرعتهای اولیه که تابع میدان گرانشی دیگر اجسام است، ذهن برخی از بزرگترین دانشمندان عصر بعد از نیوتن رابه خود مشغول کرد. به‌دلیل مشکلات ریاضی غیرقابل حل، این مسأله را نمی توان حل کرد. درحقیقت چون این اجسام در سه بعد حرکت می کنند، مسأله به صورت یک سیستم شامل نه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خواهد بود. حتی پس ازانتخاب سیستم مختصات مناسب واستناد به قوانین بقا برای یافتن مقادیر ثابت معادله حرکت که منجر به کاهش تعداد معادلات خواهد شد نیز نمی توان مسأله را با روشهای تحلیلی مدرن حل کرد. خوشبختانه می توان حالت ساده شده مسأله کلی را که تعداد زیادی از پدیده‌ها را می توان با آن تشریح نمود، حل کرد. این حالت خاص را مسأله سه جسم محدود گویند. ساده‌سازی موردنظر شامل هردو جنبه فیزیکی و ریاضی خواهد بود: دراین ساده‌سازی فرض شده‌است که جرم دو جسم (که آنها را قسمتهای اولیه یا اصلی می نامند) بسیار بیشتراز جسم سوم (که قسمت سوم نام دارد) باشد ودر یک صفحه (و به صورت مدار دایره‌ای حول مرکزجرمشان) حرکت می کنند. جرم

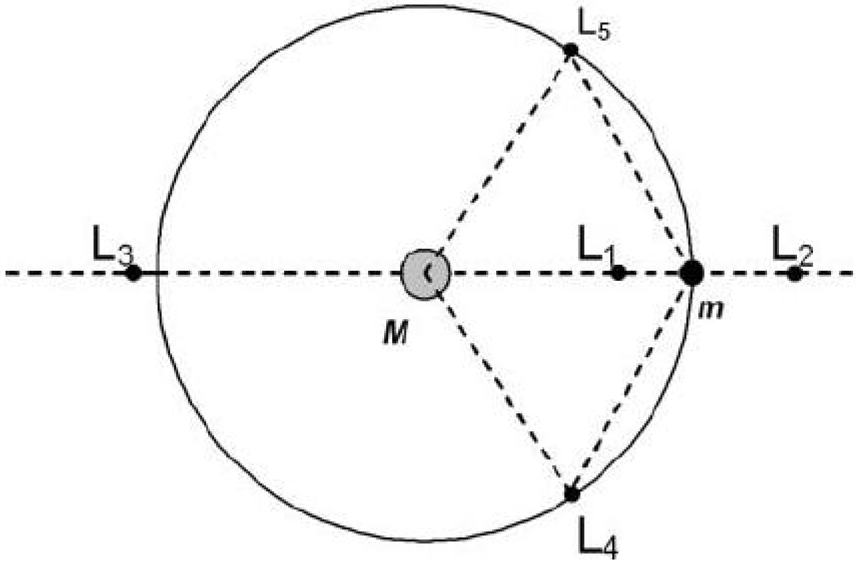
[1] lunar theory

قسمت سوم درمقایسه باجرم قسمتهای اولیه قابل اغماض است. این جسم در صفحه مداری آنها حرکت می کند و هیچگونه جاذبه‌ای بر دو جسم دیگر وارد نخواهد کرد. هیچ سیستم فیزیکی‌ای دقیقاً این شرایط را برآورده نمی کند. همیشه جسم سوم باعث به هم خوردن مدار جسم های اولیه می گردد. مدار جسم سوم تقریباً هرگز با مدار جسم های دیگر هم صفحه نیست، اگرچه انحراف آن از حالت هم صفحه‌ای بسیاراندک است.

۲.۲ نقاط لاگرانژ

فرض کنید که جسمی به جرم m به دور یک جسم سنگین به جرم M می چرخد. از طرفی یک جسم کوچک با جرم ناچیز به عنوان جسم سوم نیز در این سیستم وجود دارد که آن هم به دور M می چرخد. بر این جسم بسیار کوچک، دو نیرو وارد می شود: یکی از طرف جسم m و دیگری از طرف جسم M. پنج موقعیت وجود دارد که در آنها یا $\nabla V(x,y) = 0$ و یا نیروی وارده بر جسم بسیار کوچک که در دستگاه xy ثابت است، صفرخواهد بود. این نقاط را نقاط لاگرانژ گویند. این نقاط را به افتخار لاگرانژ با نمادهای L_1 تا L_5 نمایش می دهند. سه نقطه‌از این پنج نقطه بر روی یک خط مستقیم که درامتداد محور x است قراردارند.(محور x، در امتداد خط واصل دو جسم m و M قرار دارد و محور y در جهت عمود بر محور x می باشد). L_1 بین دو جسم اولیه قرارمی گیرد. L_2 درجهت مخالف جسم اولیه باجرم کوچکتر و L_3 درطرف مخالف جسم اولیه با جرم بزرگتر قرار دارند. L_4 در جهت y به مقدار60 درجه جلوتراز جسم اولیه‌ای که جرم آن کمتراست خواهد بود و L_5 در جهت $-y$ به مقدار 60 درجه عقب ترخواهد بود.

$$V(r) = -\frac{GM}{r_1} - \frac{Gm}{r_2} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \qquad (2.2.1)$$



شاید حدس بزنید که یک جسم سوم می تواند در هر کدام از این نقاط پنج گانه باقی بماند و همزمان با گردش دو جسم دیگر حول مرکزجرمشان این جسم نیز با فرکانس مساوی آنها گردش نماید. این بدان معنی است که در طبیعت برای هرسیستم سه جسمی که درL_1 تاL_3 قرارگرفته‌باشد این موضوع اتفاق نخواهد افتاد. این شرایط نماینده تعادل ناپایداراست. اگر یک جسمی که در یک کدام‌ازاین نقاط قرار گرفته‌است از مدار خود حتی به مقداراندکی منحرف شود این جسم به‌سمت یک جسم اولیه نزدیک وازدیگری دورخواهد شد، یااز هر دو جسم اولیه دور می گردد.

پتانسیل مؤثر دراطراف L_5 و L_4 مسطح هستند و در نتیجه یک ناحیه به حد کافی شدید (وتقریباً بدون میدانهای نیرو) وجود دارد و یک جسم سوم می تواند به سادگی درآن قرارگیرد. در عین حال چون L_5 و L_4 در موقعیتهایی حداکثر مطلق قرار دارند، دراین نقاط هیچگونه مدارپایداری وجود نخواهد داشت. همچنین تمام نیروهای وارد بر جسم سوم، منتج از گرادیان $V(x,y)$ نیستند. نیروی کریولیس که وابسته به سرعت است را باید درنظر گرفت و اثر آن غیرقابل اغماض است، به ویژه در ناحیه‌ای که غالب باشد. مثلاً در ناحیه اطراف L_5 و L_4. خط اثر نیروی کریولیس همیشه عمود برسرعت ذره‌است و بنابراین باعث تغییرانرژی جنبشی نخواهد شد زیرا$F.V=0$ است. اگر در چارچوب مرجع xy یک جسم سوم تقریباً ساکن باشد و به آرامی در جهت مناسب به سمت L_4 یاL_5 حرکت کند، نیروی کریولیس تقریباً بانیروی جاذبه و گریزازمرکز موازنه خواهد شد و موجب می گردد جسم سوم حولL_5 و L_4 بچرخد. درحقیقت این موضوع می تواند درطبیعت رخ دهد. نیروی کریولیس موجب تولید یک مرزنیمه بیضوی و مؤثر دراطراف نقاط L_5 و L_4 می شود و بنابراین مقدار حداکثر پتانسیل مؤثر به یک حفره کوچک پایدار تبدیل می گردد. شرایط تشریح شده دقیقاً مشابه چرخش هوا دراطراف سیستمهای پرفشار است. جاذبه می کوشد تاهوا را به سمت زمین بکشد و نیروی گریزازمرکز سعی دارد آن را به سمت خارج پرتاب کند. همزمان با سقوط هوا به سمت پایین، نیروی کریولیس موجب می گردداین هوا در اطراف چاله‌های پرفشار بچرخد. جهت این چرخش در نیمکره شمالی در جهت چرخش عقربه‌های ساعت است.چنین سیستم گردانی که در جو زمین رخ می دهد فقط به صورت موقت پایدار خواهد بود. این جریانهای گردان، تشکیل و سپس ناپدید می شوند. این الگوهای گردان نسبت به سیستم دوارثابت هستند. چنین حقیقتی در مورد مدار یک جسم سوم حول L_5 و L_4 نیز وجود دارد.

۳.۲ بررسی حرکت در نزدیکی نقاط تعادل خارج از خط واصل دو جرم M_1 وM_2

اگر نیروهای وارد بر جسم، تنها از پتانسیل مؤثر ناشی شود، پنج نقطه لاگرانژ همگی در سه بعد، ناپایدارند. چون نیروی وارد بر جرم m در همسایگی این نقاط همیشه به سمت نقطه تعادل نیست. استدلال ساده تر برای ناپایداری این نقاط تعادل در سه بعد این است که لاپلاسی مجموع پتانسیلها همیشه منفی و ثابت است. (به جز در تکینگیهای پتانسیل که محل قرار گرفتن جرمهای M_1 وM_2 است) بنابراین پتانسیل نمی تواند در هیچ نقطه‌ای، کمینه موضعی داشته باشد. یعنی هیچ جا نقطه تعادل پایدار نداریم. اما در این استدلال، نیروی کریولیس نادیده گرفته شده‌است و در حضور نیروی کریولیس نمی توان صرفاً براساس تابع پتانسیل، پایداری نقاط تعادل را تعیین کرد. بنابراین باید بر اساس معادله نیروها تحلیل را ادامه دهیم.

$$m\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = F_1 + F_2 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \qquad (2.3.2)$$

اگر معادله فوق را در نزدیکی نقاط تعادل L_4 و L_5 بنویسیم و فقط عبارات خطی را نگه داریم، می توانیم حرکت را در نزدیکی این نقاط، به صورت تقریبی معین کنیم. دستگاه مختصاتی را در نظر می گیریم که با سرعت زاویه ای $\omega^2 = G(M_2 + M_1)/a^3$ حول مرکز جرم M_1 وM_2 دوران می کند. در این دستگاه، M_1 وM_2 ساکنند و به فاصله a از یکدیگر قرار دارند. پس داریم:

$$M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2 = 0 \qquad (2.3.3)$$

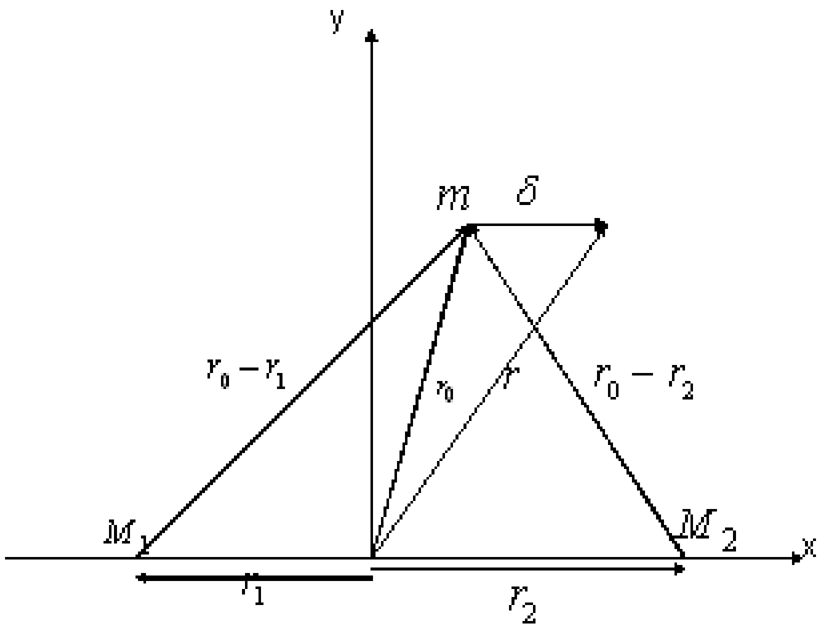
$$\omega = \sqrt{G(M_1 + M_2)/a^3}\,\hat{k} \qquad (2.3.4)$$

که در آن $\vec{r}_1 = -r_1\hat{i}$ و $\vec{r}_2 = r_2\hat{i}$ مکان دو جرم M_1 وM_2 نسبت به مرکز جرم‌اند. حال جرم کوچک m را در نظر می گیریم که در ابتدا به فاصله a از M_1 وM_2 و در صفحه حرکت M_1وM_2 واقع شده است. برای بررسی حرکت m، تغییر مکان کوچک δ را در فضای xyz

در نظر می گیریم به طوری که $\vec{\delta} = \vec{\rho} + z\hat{k}$ و $\vec{\rho} = x\hat{i} + y\hat{j}$ است. با توجه به شکل، روابط زیر برقرار است:

$$\vec{r}_0 - \vec{r}_1 = \frac{a}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}a\hat{j} \tag{2.3.5}$$

$$\vec{r}_0 - \vec{r}_2 = -\frac{a}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}a\hat{j} \tag{2.3.6}$$



که در آن r_0 مکان اولیه m نسبت به مرکز جرم M_1 وM_2 است. همچنین

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\delta} = \vec{r}_0 + (\vec{\rho} + \vec{z}) \tag{2.3.7}$$

و می دانیم که $|\vec{r}_0 - \vec{r}_1| = |\vec{r}_0 - \vec{r}_2| = a$.

برای نوشتن معادلات حرکت تقریبی در مرتبه اول، نیروی وارد بر m در دستگاه چرخان، برابر است با:

$$\begin{aligned} f &= -\frac{GM_1 m(\vec{r}_0 - \vec{r}_1 + \vec{\delta})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1 + \vec{\delta}|^3} \\ &\quad -\frac{GM_2 m(\vec{r}_0 - \vec{r}_2 + \vec{\delta})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_2 + \vec{\delta}|^3} \\ &\quad -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \omega\hat{k} \times [\omega\hat{k} \times (\vec{r}_0 + \vec{\rho} + \vec{z})] \\ &= \omega\hat{k} \times [\omega\hat{k} \times (\vec{r}_0 + \vec{\rho})] = -\omega^2(\vec{r}_0 + \vec{\rho}) \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

زیرا $\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_0 + \vec{\rho}) = 0$ است. اگر$|a| >> |\delta|$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} |\vec{r}_0 - \vec{r}_1 + \vec{\delta}|^{-3} &\approx (a^2 + 2\vec{\delta} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1))^{\frac{-3}{2}} \\ &\approx a^{-3}(1 + \frac{2\vec{\delta} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{a^2})^{\frac{-3}{2}} \\ &= \frac{1}{a^3}(1 - \frac{3\vec{\delta} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1}{a^2} + ...) \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

در نتیجه نیروی f را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f = -\frac{GM_1 m}{a^3}(1 - \frac{3\vec{\delta} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{a^2})(\vec{r}_0 - \vec{r}_1 + \vec{\delta})$$

$$-\frac{GM_2m}{a^3}(1-\frac{3\vec{\delta}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_2)}{a^2})(\vec{r}_0-\vec{r}_2+\vec{\delta})$$
$$+m\omega^2(\vec{r}_0+\vec{\rho})-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{\rho}} \qquad (2.3.11)$$

اگر قراردهیم $\omega^2=G(M_1+M_2)/a^3$ و عبارت بالا را تا مرتبه اول نسبت به δ نگه داریم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f &= -\frac{Gm}{a^3}[M_1(\vec{r}_0-\vec{r}_1)+M_2(\vec{r}_0-\vec{r}_2)-(M_1+M_2)(\vec{r}_0+\vec{\rho})] \\ &\quad +\frac{3GM_1m}{a^5}\vec{\delta}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_1)(\vec{r}_0-\vec{r}_1)+\frac{3GM_2m}{a^5}\vec{\delta}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_2)(\vec{r}_0-\vec{r}_1) \\ &\quad -\frac{Gm}{a^3}(M_1+M_2)\vec{\delta}-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{\rho}} \end{aligned} \qquad (2.3.12)$$

$$\begin{aligned} f &= \frac{3Gm}{a^5}[M_1\vec{\rho}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_1)(\vec{r}_0-\vec{r}_1)+M_2\vec{\rho}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_2)(\vec{r}_0-\vec{r}_2)] \\ &\quad -2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{\rho}}+\frac{Gm(M_1+M_2}{a^3}(\vec{\rho}-\vec{\delta}) \end{aligned} \qquad (2.3.13)$$

با توجه به اینکه $\vec{\rho}=x\hat{i}+y\hat{j}$ و $\vec{r}_0-\vec{r}_1=\frac{a}{2}\hat{i}+\frac{a\sqrt{3}}{2}\hat{j}$ و $\vec{r}_0-\vec{r}_2=\frac{-a}{2}\hat{i}+\frac{a\sqrt{3}}{2}\hat{j}$ به دست می آوریم:

$$\vec{\rho}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_1)(\vec{r}_0-\vec{r}_1)=(\frac{1}{4}a^2x+\frac{\sqrt{3}}{4}a^2y)\hat{i}+(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2x+\frac{3}{4}a^2y)\hat{j} \qquad (2.3.14)$$

$$\vec{\rho}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_1)(\vec{r}_0-\vec{r}_2)=(\frac{1}{4}a^2x-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2y)\hat{i}+(-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2x+\frac{3}{4}a^2y)\hat{j} \qquad (2.3.15)$$

بنابراین معادله حرکت برای جرم m به این صورت درمی آید:

$$\ddot{x} = \frac{3G}{4a^3}(M_1 + M_2)x + \frac{3\sqrt{3}G}{4a^3}(M_1 - M_2)y + 2\omega\dot{y} \qquad (2.3.16)$$

$$\ddot{y} = \frac{3\sqrt{3}G}{4a^3}(M_1 - M_2)x + \frac{9G}{4a^3}(M_1 + M_2)y - 2\omega\dot{x} \qquad (2.3.17)$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 z \qquad (2.3.18)$$

اگر در نظر بگیریم $\alpha = G(M_1 - M_2)/a^3$ معادلات فوق به صورت زیر در می آیند:

$$\ddot{x} = \frac{3}{4}\omega^2 x + \frac{3\sqrt{3}}{4}\alpha y + 2\omega\dot{y} \qquad (2.3.19)$$

$$\ddot{y} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\alpha x + \frac{9}{4}\omega^2 y - 2\omega\dot{x} \qquad (2.3.20)$$

برای حل این معادلات، جوابهای تناوبی را در نظر می گیریم و با جاگذاری در معادلات دیفرانسیل به معادلاتی جبری برای بسامد این حرکتها می رسیم. اگر بسامدها حقیقی باشند، حرکت تناوبی و پایدار است.

معادله مربوط به z، معادله هماهنگ ساده و از دو معادله دیگر مستقل است. بنابراین جواب آن حرکت تناوبی با بسامد ω است:

$$z = E\sin\omega t + F\cos\omega t \qquad (2.3.21)$$

برای حل معادلات جفت شده(۲.۳.۱۹) و(۲.۳.۱۸) فرض می کنیم:

$$x = A\sin\varphi t + B\cos\varphi t \qquad (2.3.22)$$

$$Y = C\sin\varphi t + D\cos\varphi t \qquad (2.3.23)$$

با گذاشتن این روابط در (۲.۳.۱۹) و(۲.۳.۱۸) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} -A\varphi^2\sin\varphi t - B\varphi^2\cos\varphi t &= \frac{3}{4}\omega^2(A\sin\varphi t + B\cos\varphi t) + \frac{3\sqrt{3}}{4}a(C\sin\varphi t + D\cos\varphi t) \\ &\quad +2\omega\varphi(C\cos\varphi t - D\sin\varphi t) \end{aligned}$$