دانشگاه رازی

دانشکده علوم
گروه آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

تحلیل بقا بر اساس مدل های شکنندگی

توسط

سمیه فخری

استاد راهنما

دکترسید رضا هاشمی
دکتر داود قزوینی نژاد

استاد مشاور

تیر ماه ۱۳۹۰

تقدیم به:

تقدیم به خانوادهٔ عزیزم بخصوص به محضر پاک پدر و مادرم که نخستین آموزگارانم بودند

تقدیم به همسرم به خاطر همهٔ فداکاری ها و کمک هایش

تقدیم به فرزند عزیزم آیناز کوچولو که بزرگترین عطیهٔ الهی به من است.

قدردانی

سپاس خدایی را که انسان را قدرت اندیشه آفرید.

بی تردید اثر حاضر مدیون راهنمایی و مشاورهٔ اساتید گرانقدر و مساعدت و همکاری انسان های بزرگوار بسیاری است.

اکنون در این مرحله از زندگی علمی خود، که خود را وام دار تمامی آنان می بینم، بر خود فرض می دانم که از زحمات ارزندهٔ آنان صمیمانه قدردانی نمایم.

در ابتدا لازم می دانم از زحمات بی شائبه و راهنمایی های ارزندهٔ اساتید محترم جناب آقای دکتر هاشمی و جناب آقای دکتر قزوینی نژاد سپاس گذاری کنم، که شخصیت علمی و اخلاقی ایشان همواره برایم الگو بوده است و بی شک بدون همدلی و مساعدت ایشان پژوهش حاضر به انجام نمی رسید.

همچنین از اساتید محترم جناب آقای دکتر مجید صادقی فر و جناب آقای دکتر مهرداد نیاپرست سپاسگزارم که بزرگوارانه زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شده و با دقت عالمانهٔ خود نکات ظریفی را در زیبا شدن این پایان نامه بیان داشتند.

از خانواده و همسرم نیز صمیمانه تشکر و سپاس گزاری می نمایم که سرایت مشکلات تحصیلی اینجانب در دوران تحصیل در دانشگاه را در زندگی عادی و خانوادگی تحمل نمودند، امیدوارم با چشم پوشی از کوتاهی های اینجانب در انجام وظایف خانوادگی ام بر من منت گزارند.

در پایان از همهٔ دوستانی که به هر نحو در انجام این کار مرا یاری رساندند، تشکر می کنم.

سمیه فخری

کرمانشاه، تیر ماه ۹۰

پیشگفتار

در آمار استنباطی اغلب اوقات با متغیرهایی روبرو می‌شویم که مستقل فرض می‌شوند و با این فرض استنباط‌هایی در مورد جامعه انجام می‌گیرد. اگر این فرض زیربنایی درست نباشد، آنگاه تمامی استنباط دچار اشکال می‌شود. از این رو برای بررسی درستی یا نادرستی این فرض زیربنایی، انجام آزمون استقلال اهمیت اساسی دارد. آزمون استقلال براساس ضریب همبستگی پیرسن، یک آزمون پارامتری است که در عمل کاربرد قابل ملاحظه‌ای دارد. اما اگر آزمون باعث قبول (رد نشدن) فرض صفر(استقلال) شود، در این صورت نمی‌توان نتیجه گرفت که متغیرهای تصادفی مستقل‌اند، بلکه نتیجه می‌گیریم که متغیرهای تصادفی به طور خطی مستقل‌اند. دو روش معروف دیگر برای انجام آزمون استقلال، آزمون با ضریب همبستگی اسپیرمن و آزمون با ضریب همبستگی کندال است، که دو آزمون ناپارامتری برای استقلال هستند. این دو آزمون بعضی اوقات تواناتر از آزمون پارامتری با ضریب همبستگی پیرسن هستند. نظر به این توانمندی است که در این رساله هدف خود را روی آزمون‌های ناپارامتری متمرکز کرده و در بین این آزمون‌های ناپارامتری تواناترین آزمون موضعی، که یک آزمون رتبه‌ای است را بدست می آوریم. روش پیدا کردن آزمون رتبه‌ای موضعاً تواناترین، با استفاده از یک قضیه از شیراهاتا[1] داده شده و چندین مثال در مورد آن حل می‌گردد. ملاحظه خواهیم کرد که برای پیدا کردن آزمون رتبه‌ای موضعاً تواناترین و حل مثال‌های مربوطه چگونه از کپولاها استفاده می‌کنیم. سپس این آزمون را با آزمون‌های دیگر موجود مقایسه می‌کنیم، به‌خصوص مقایسه‌ای براساس کارایی نسبی مجانبی (ARE) آزمون رتبه‌ای موضعاً تواناترین و آزمون با ضریب همبستگی پیرسن انجام می‌شود. ARE برای دو آزمون برابر نسبت حجم نمونه‌ها تا رسیدن به یک توان خاص می‌باشد. مثلاً اگر آزمون ۱ با نمونه‌ای به حجم ۲۰ به توان مطلوب ۰٫۹۵ و آزمون ۲ با نمونه‌ای به حجم ۱۰ به توان ۰٫۹۵ می‌رسد، در این صورت ARE آزمون ۱ نسبت به آزمون ۲ به صورت $\frac{۱۰}{۲۰} = ۰٫۵$ می باشد.
از آنجائیکه برای یافتن آزمون رتبه‌ای موضعاً تواناترین از کپولاها استفاده می‌کنیم، از این رو فصل اول به معرفی کپولاها می‌پردازد. همچنین چند خانوادهٔ معروف از کپولاها را که با پارامتر نامعلوم θ

[1] Shirahata

پارامتریده شده‌اند معرفی می‌کنیم. در فصل دوم معیارهای هماهنگی به‌خصوص ضریب همبستگی پیرسن، ضریب همبستگی اسپیرمن و ضریب همبستگی کندال را شرح می‌دهیم. فصل سوم به مدل‌های پایه برای توان آزمون استقلال اختصاص داده شده‌است که در آنجا به معرفی کپولاهای تجربی پرداخته و توان سه آزمون استقلال برای مدل‌های مختلف از کپولاها با هم مقایسه شده‌اند. در فصل چهارم، آزمون رتبه‌ای موضعاً تواناترین را یافته و در پایان مقایسه‌ای بین این آزمون و آزمون‌های دیگر خصوصاً آزمون با ضریب همبستگی پیرسن ارائه می‌شود.

تحلیل بقا بر اساس مدل های شکنندگی

چکیده

تحلیل بقا یکی از مهم ترین مباحث آماری است که برای تحلیل داده‌های طول عمر در زمینه‌های مختلف به کار برده می شود. در سال های اخیر برای توسعهٔ مدل های بقای کلاسیک به مدل هایی که قابلیت انعطاف بیشتری برای برازانده شدن به داده های بقا را داشته باشند، مدل های شکنندگی معرفی شده‌اند. پارامتر شکنندگی می تواند برای هر فرد و یا برای هر خوشه تغییر کند که در حالت اخیر آن را منبع شکنندگی مشترک شده می نامند. اخیراً برای تحلیل داده های بقای خوشه بندی شده مقالات بسیاری به چاپ رسیده است.

تعداد زیادی از مدل های شکنندگی و چندین تکنیک برای برازش بر این مدل ها در این پایان نامه مورد بحث قرار گرفته است. در این پایان نامه مدل های شکنندگی را به صورت مدل های پارامتری در نظر گرفته‌ایم. هدف اصلی در این پایان نامه مطالعه روی مدل های شکنندگی و بررسی جزئیات آن هاست.

مدل خطرهای متناسب و مدل زمان های شکست شتابیده از جمله مدل هایی است که در این پایان نامه معرفی شده‌اند. در این پایان نامه پارامتر مدل های مختلف را به کمک روش ماکزیمم کردن لگاریتم درستنمایی و یا با استفاده از نظریه بیز برآورد می نماییم. بعلاوه توابع چگالی مختلف برای شکنندگی نظیرگاما، پایای مثبت و و نیز واریانس توانی مورد بحث قرارگرفته است و هر کدام از این چگالی ها ساختار همبستگی مختلفی را روی داده‌ها ایجاد می کنند.

واژه‌های کلیدی : شکنندگی ، خطرهای متناسب ، ماکزیمم درستنمایی ، زمان های بقا ، کپولا ، تبدیل لاپلاس ، مدل وایبول ، گاما ، پایای مثبت ، تابع واریانس توانی

فهرست مندرجات

نمادها و علائم اختصاری

اندازه احتمال .... $P(.)$

اثر تصادفی خوشه i ام .... w_i

بردار اثرات ثابت (از بعد p) .... β

بردار امتیاز .... $\mathbf{S}$

بردار پارامترهای مخاطره پایه .... ξ

بردار شامل متغیرهای کمکی .... $\mathbf{x}$

به‌شرط آنکه .... $|$

به‌طور مستقل و مشابه توزیع شده .... iid

بینهایت .... ∞

تابع توزیع و تابع چگالی زمان بقا .... F, f

تابع توزیع و تابع چگالی زمان سانسور .... G, g

تابع کپولا با بردار پارامتر θ .... $C_\theta(.)$

تابع گاما .... $\Gamma(.)$

تابع مخاطره پایه .... $h_\circ(t)$

تابع مخاطره پایه تجمعی .... $H_\circ(t)$

تابع مخاطره شرطی .... $h_{ij}(t)$

تابع مخاطره توأم برای خوشه های به اندازه n با متغیر کمکی $\mathbf{x}$ بر اساس مدل حاشیه‌ای .... $h_{\mathbf{x},p}(\mathbf{t}_n)$

تابع مخاطره توأم برای خوشه های به اندازه n با متغیر کمکی $\mathbf{x}$ بر اساس مدل شکنندگی .... $h_{\mathbf{x},f}(\mathbf{t}_n)$

تابع مخاطره جامعه برای مؤلفه های با متغیر کمکی X بر اساس مدل حاشیه‌ای .... $h_{X,p}(t)$

تابع مخاطره جامعه برای مؤلفه‌های با متغیر کمکی X براساس مدل شکنندگی .... $h_{X,f}(t)$

تابع مخاطره شرطی برای j امین مشاهده از خوشه i ام با شکنندگی u_i .... $h_{ij,c}(t)$

تابع مخاطره شرطی توأم برای خوشه i ام .... $h_i(\mathbf{t}_{n_i})$

تابع درستنمایی	$L(.)$
تابع درستنمایی حاشیه‌ای	$L_{marg}(.)$
تابع لگاریتم درستنمایی	$l(.)$
تبدیل لاپلاس	$\pounds(.)$
تعداد پیشامدها در خوشه i ام	d_i
تعداد خوشه‌ها	s
تعداد مشاهدات در خوشه i ام	n_i
تو کندال	τ
چگالی وایبول با پارامتر مقیاس λ و پارامتر شکل ρ	$W(\lambda, \rho)$
زمان پیشامد	t_{ij}
زمان سانسور	c_{ij}
شکنندگی خوشه i ام	u_i
متغیر زمان پیشامد	T
متغیر زمان سانسور	C
مینیمم زمان پیشامد و زمان سانسور	y_{ij}
نشانگر سانسور اگر زمان پیشامد مشاهده شود $\delta_{ij} = ۱$ و در غیر اینصورت صفر می باشد	δ_{ij}
واریانس چگالی شکنندگی با میانگین یک (به جز در حالتی که توزیع شکنندگی استیبل مثبت باشد)	θ
(ξ, θ, β)	ζ
$(X_۱^t, \cdots, X_n^t)^t$	$\mathbf{x}$
$(X_{i۱}^t, \cdots, X_{i,n_i}^t)^t$	$\mathbf{x}_i$
(y_{ij}, δ_{ij})	z_{ij}

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱—۱ مقدمه

در این فصل ابتدا بعضی از ویژگی های مهم داده های بقا و مدل بقا را بدون در نظر گرفتن خوشه ها معرفی می کنیم. ویژگی های خاصی که تجزیه و تحلیل داده های بقا را از تجزیه و تحلیل آماری کلاسیک متمایز می کند داده های سانسور شده هستند.

به عنوان نمونه، زمان بقا برای بعضی از مؤلفه ها نامعلوم است و تنها اطلاع موجود آن است که مؤلفه تا یک زمان معلوم زنده مانده است. یکی از منابع مشکل ساز در تحلیل داده های بقا عدم امکان مشاهدهٔ افراد در تمام مدت تا وقوع شکست یا پیشامد مورد نظر است. در حالات بسیاری وقتی که طول عمر داده ها بررسی می شود، ممکن است تا زمان مشخص شده تا پایان آزمایش همهٔ واحد ها در نمونه خراب نشوند (یعنی پیشامد مورد نظر مشاهده نشود) یا زمان های دقیق خرابی همهٔ واحدها در دسترس نباشد، این نوع داده ها را به طور معمول داده های سانسور شده می نامند. آنچه اصطلاحاً سانسور شدن تصادفی نامیده می شود، در کاربردهای پزشکی با مطالعه روی حیوان، در کاربردهای اپید میولوژی با مطالعات انسانی، در آزمایش های بالینی و یا در مطالعات قابلیت اعتماد پیش می آید. در این موارد آزمایش قبل از وقوع پیشامد خاتمه می یابد. مثلاً در یک آزمایهٔ بالینی ممکن است بیماران در زمان های مختلف به مطالعه وارد شوند، می خواهیم طول مدت زندگی آن ها را از زمان ثبت نام مشاهده کنیم، اما ممکن است سانسور شدن به یکی از صورت های زیر رخ دهد:

- گم شدن در پیگیری (بیمار ممکن است تصمیم به مهاجرت بگیرد)،
- خارج شدن (به علت اثرهای نامطلوب روش درمانی مورد استفاده، قطع درمان ضروری می شود)،
- خاتمهٔ مطالعه (برای تحلیل داده ها در زمان از قبل تعیین شده)،
- مرگ به علتی غیر از علت تحت بررسی (مثل خودکشی).

باید توجه کرد که داده های سانسور شده را باید با استفاده از آخرین اطلاع از واحدها دقیقاً ثبت کرد تا در تحلیل داده ها مورد استفاده قرار گیرد.

استنباط برمبنای داده های سانسور شده در طول ۵۰ سال گذشته بوسیلهٔ نویسندگان متعددی برای طیف وسیعی از توزیع های طول عمر از قبیل نمایی ، گاما، وایبول ، لگ نرمال، گوسین معکوس ، لجستیک ، لاپلاس و پارتو مورد مطالعه قرار گرفته است . بسته به اینکه داده ها چگونه از آزمایش های طول عمر جمع آوری شوند، انواع مختلف سانسور به وجود می آید که در بخش های بعد توضیح داده خواهند شد.

۱—۲ نمونه های بریده

در آمار با استفاده از نمونه های به دست آمده از فضای نمونه ای به استنباط در مورد جامعه می پردازیم. حال وقتی که یک مشاهده یا منتخبی از مشاهدات روی بخشی از فضای نمونه ای محدود شوند، آنگاه نمونه های به دست آمده با توجه به ماهیت محدودیت به صورت بریده یا سانسور شده معرفی می شوند. به بیان دیگر اگر فقط به قسمتی از فضای نمونه ای دسترسی داشته باشیم آنگاه با نمونه های بریده یا سانسور شده سروکار خواهیم داشت، که در این حالت برآورد پارامترهای جامعه با حالت معمول متفاوت است و در واقع روش های معمول باید اصلاح شوند. اگر چه این نمونه ها اطلاعات کمتری دارند، اما همچنان می توانیم مانند داده هایی که شامل غیر سانسورها هستند برای تحلیل های آماری و نموداری استفاده کنیم .

نمونه های بریده آن هایی هستند که مقادیر مشخصی از جامعه کاملاً حذف شده است. شاید صحیح تر این است که بیان کنیم برش در جامعه اتفاق می افتد نه در نمونه. در حقیقت نمونه بریده، نمونه ای از جامعه بریده است. نمونه های بریده در آزمایش هایی ایجاد می شود که انتخاب نمونه فقط در قسمتی از محدودهٔ متغیر امکان پذیر است. مثال هایی از این نمونه ها مکرراً در کارخانه ها اتفاق می افتد که از تولیدات غربال شده انتخاب می شوند.

نمونه های بریده برطبق اینکه نقطه برش معلوم است یا نه رده بندی می شوند. اگر این نقاط معلوم باشند فقط باید از نمونه به دست آمده، پارامترهای جامعه را برآورد کرد ولی اگر این نقاط نا معلوم باشند، این نقاط نیز پارامترهایی اضافی هستند که باید از روی نمونه برآورد شوند.

۱—۱.۲ نمونه های چپ بریده

در این نمونه ها فرض می کنیم n مشاهده وجود دارد، یک نمونه چپ بریده است اگر برای هر کدام از مشاهدات، $x \geq T$ باشد که T یک نقطهٔ برش معلوم است. حال اگر چندین نقطه برش $T_1, \cdots, T_k$ وجود داشته باشد به طوری که $T_1 < \cdots < T_k$ آنگاه یک نمونهٔ چپ بریدهٔ فزاینده خواهیم داشت .

مثال ۱.۱ خانهٔ سالمندان

در یک مطالعهٔ بقا برای بررسی عملکرد کارکنان خانهٔ سالمندان، سن افراد در زمان مرگ و سن آنها در زمان ورود به خانهٔ سالمندان پالو آلتو[۱] بین سال های ۱۹۶۴ تا ۱۹۷۵ جمع آوری شده است.

۱ *Palo Alto*

طول عمر در این مجموعهٔ اطلاعات چپ بریده است، چون یک فرد باید تا زمان ورود به خانهٔ سالمندان زنده بماند و افرادی که زودتر از سن بازنشستگی می میرند، شانسی برای بودن در نمونه ندارند. این مثال یک نمونهٔ چپ بریده است که داده های آن در کلاین و موش برگر[۲] (۱۹۹۷) آمده است.

۱—۲.۲ نمونه های راست بریده

در این نمونه ها فرض می کنیم n مشاهده وجود دارد، یک نمونه راست بریده است اگر برای هر کدام از n مشاهده $x \leq T$ باشد که T یک نقطهٔ برش معلوم است. حال اگر چندین نقطهٔ برش $T_1, \ldots T_m$ وجود داشته باشد به طوری که $T_1 < \ldots < T_m$ آنگاه یک نمونهٔ راست بریدهٔ فزاینده خواهیم داشت .

مثال ۲.۱ وزن قطعات هواپیما
در یک شرکت تولید کنندهٔ قطعات بدنهٔ هواپیما فقط قطعاتی به قسمت بسته بندی ارسال می شوند که وزن آن ها کمتر از ۱۵۰ پوند باشد حال اگر از قطعاتی که به قسمت بسته بندی ارسال شده نمونه ای انتخاب شود آنگاه این یک نمونهٔ راست بریده با نقطهٔ برش معلوم است .

۱—۳ انواع سانسور

۱—۱.۳ سانسور نوع اول

n واحد تحت مشاهده در یک آزمایش خاص را در نظر بگیرید. در طرح سانسور نوع اول، آزمایش تا زمان از پیش تعیین شدهٔ T ادامه پیدا می کند و در آن شکست بعد از زمان T در نظر گرفته نمی شود یعنی واحدهای سالم باقیمانده در زمان T را از آزمایش کنار گذاشته یا به عبارت دیگر سانسور می کنیم. در اینجا فرض می شود که زمان پایان مطالعه مستقل از زمان های شکست می باشد. پس در این طرح سانسور نقطهٔ پایان آزمایش ثابت و تعداد شکست ها یک متغیر تصادفی است .

۱—۲.۳ سانسور نوع دوم

n واحد تحت مشاهده در یک آزمایش خاص را در نظر بگیرید. در طرح سانسور نوع دوم، آزمایش تا زمان رخداد m امین شکست ادامه می یابد، و پس از وقوع m امین شکست، واحدهای سالم باقی مانده

[۲] $Klein\ and\ Moeschberger$

از آزمایش کنار گذاشته یا به عبارت دیگر سانسور می شوند. درعمل، دراین طرح تنها طول عمرهای با کوچکترین زمان مشخص می شوند. پس در طرح سانسور نوع دوم تعداد شکست ها ثابت و نقطهٔ پایان آزمایش تصادفی است .

۱—۳.۳ سانسورچپ

در داده های سانسور شدهٔ چپ، یک زمان خرابی (پیشامد مورد نظر) پیش از زمان مشخص $T_\circ$ (شروع مشاهده در آزمایش) اتفاق افتاده است که زمان دقیق وقوع آن نامعلوم است. یعنی وقتی که اطلاعات زمان های قبل از شروع دورهٔ مشاهدات در دسترس نباشد سانسور چپ را داریم. مسأ لهٔ سانسور چپ در بسیاری از مسایل علمی، مثل مطالعات اپیدمیولوژی وقتی که آغاز پروسه به طور خاص مشخص نیست، اتفاق می افتد. برای مثال، در طول مطالعهٔ یک بیماری (مثل سرطان) شروع ناخوشی اغلب مشخص نیست (دست کم امر مسلمی نیست). در نمونهٔ سانسور شدهٔ چپ، طول عمر m واحد به طور کامل اندازه گیری شده در حالیکه برای $R = n - m$ مشاهدهٔ دیگر فقط می دانیم که $T < T_\circ$ (T بیانگر متغیر زمان شکست است). یعنی $n - m$ عضو قبل از شروع آزمایش خراب شده‌اند. برای مشاهدات اندازه گیری شده $T \geq T_\circ$ است.

۱—۴.۳ سانسور راست

یکی از حالت های بسیار معمول سانسور، داده های سانسور شده از راست هستند. در بررسی طول عمر داده ها، این مجموعه از داده ها از واحدهایی که شکست نخورده اند (خراب نشده اند) تشکیل می شوند. در نمونهٔ سانسور شدهٔ راست، طول عمر m واحد به طور کامل اندازه گیری شده در حالیکه برای $R = n - m$ مشاهدهٔ دیگر فقط می دانیم که $T > T_\circ$ است، یعنی $n - m$ عضو بعد از زمان $T_\circ$ (زمان پایان آزمایش) همچنان سالم هستند و کار می کنند در صورتیکه برای مشاهدات اندازه گیری شده $T \leq T_\circ$ است .

۱—۴ تحلیل بقا

درحالت کلی، فرض می کنیم که زمان سانسور و زمان بقا از نظر آماری متغیرهای تصادفی مستقل هستند. برای داده های سانسور شدهٔ راست، اطلاعات حقیقی برای مؤلفه i ام، به ازای $i = ۱, \ldots, n$ شامل زوج (y_i, δ_i) است به طوری که y_i مینیمم زمان پیشامد t_i و زمان سانسور c_i است یعنی $y_i = \min(t_i, c_i)$ و δ_i نشانگرسانسور است و اگر پیشامد مورد نظر اتفاق افتد مقدار یک را می گیرد و در غیر اینصورت مقدار صفر را خواهد گرفت.

$$\delta_i = \begin{cases} ۱ & t_i \leq c_i \\ ۰ & t_i > c_i \end{cases}$$

روش های بحث شده در این جا فقط برای مدل زمان مرگ مفید نیستند، بلکه برای هر متغیری که زمان یک پیشامد خاص را توصیف می کنند نیز مفید است، مخصوصاً اگر زمان پیشامد برای همهٔ مؤلفه‌ها مشاهده نشده باشد. واحد در نظر گرفته شده برای زمان پیشامد را به طور کلی مؤلفه می نامند، و واحدهای مورد نظر در خوشه‌ها گروه بندی می شوند.

۱—۱.۴ تابع درستنمایی بقا

برای داده های سانسور شده، درستنمایی بقا کاملاً از درستنمایی کلاسیک برای داده های مستقل بدون سانسور متفاوت است. در اینجا یک سری از نمادها که در نوشتن درستنمایی بقا به ما کمک میکند را معرفی می کنیم.

فرض کنید که f تابع چگالی احتمال زمان پیشامد T با تابع توزیع تجمعی زیر

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{۰}^{t} f(u)\, du$$

و تابع بقای

$$S(t) = ۱ - F(t) = P(T > t)$$

تابع مهم دیگر در تحلیل بقا نرخ مخاطره یا نرخ مرگ لحظه ایی $h(t)$ است. نرخ مخاطره $h(t)$ متناسب بااحتمال شرطی وقوع پیشامد در بازه $[t, t + \Delta t)$ به شرط اینکه پیشامد تا قبل از زمان t رخ نداده باشد است. نرخ آن با تقسیم این احتمال شرطی بر بازه زمانی Δt بدست می آید. نرخ مخاطره حد این نسبت برای وقتی است که Δt به سمت صفر میل کند

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{S(t)} \qquad (۱.۴.۱)$$