دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض – آنالیز مختلط

عنوان

توسیع تعدادی از نامساوی‌های چندجمله‌ای در مشتق قطبی

نگارش

منانه شاکری چناری

استاد راهنما

دکتر محمود بیدخام

استاد مشاور

دکتر رضا معمارباشی

۱۳۸۸

قدردانی

حمد و سپاس بی‌کران به درگاه خدای منان که توفیق تحصیل علم و دانش را به من ارزانی داشت.
تدوین و نگارش این رساله را مرهون زحمات و تلاش افرادی است که اینجانب تشکر و قدردانی از آن‌ها را واجب می‌دانم، نخست استاد گرامی جناب آقای دکتر بیدخام که از بذل هرگونه مساعدت و راهنمای به اینجانب دریغ نورزیدند و با صبر و حوصله مشکلات تدوین این رساله را بر من آسان نمودند و با تشکر از اساتید هیئت داوری، آقایان دکتر احمد زیره و دکتر مجید اسحقی که با حضور در جلسه دفاعیه و بیان نکات عالمانه خود به غنای کار افزودند، همچنین از خانواده عزیزم، که همواره در تمام مراحل زندگی یار و همراه من بودند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

با افتخار تقدیم می کنم به :

خانواده محترم دکتر بیدخام

و

خانواده عزیزم

که تنظیم این رساله را مرهون حمایت‌های بی‌دریغ‌شان می‌دانم.

چکیده

یکی از قضایای اساسی و کاربردی در آنالیز مختلط، اصل اکسترمم مطلق می‌باشد. بنابر اصل اکسترمم مطلق، اگر تابع غیر ثابت $f(z)$ در یک میدان کراندار، تحلیلی و بر بستار آن پیوسته باشد، آن‌گاه $|f(z)|$ مقادیر اکسترمم خود را بر روی مرز اختیار می‌کند. اصل فوق یک قضیه وجودی می‌باشد، به عبارت دیگر روشی برای به‌دست آوردن مقادیر اکسترمم، ارائه نمی‌دهد.

در این رساله تلاش می‌شود، تا تقریبی برای اکسترمم مطلق چند جمله‌ای‌های مختلط، با درنظر گرفتن موقعیت ریشه‌ها، ارائه شود.

در این راستا، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم، به آهنگ رشد چند جمله‌ای‌هایی که ریشه‌ای درون دایره واحد ندارند، می‌پردازیم.

در فصل سوم با ارائه دو بخش، به بیان نامساویی‌هایی برای مشتق چند جمله‌ای‌ها خواهیم پرداخت.

فصل چهارم را باارائه دو بخش، نتایج جدیدی را که در جهت تعمیم دو فصل پیشین به‌دست آمده است، مورد مطالعه قرار می‌دهیم (در تمام فصول این پایان‌نامه نتایج جدید با علامت $*$ مشخص شده‌اند.).

مراجع اصلی در این پایان‌نامه عبارتند از[۸] و [۳۳] و [۱۲] و [۱۹] و [۲۲] و [۱۷].

واژه‌های کلیدی: اصل اکسترمم مطلق — تابع تحلیلی —تعمیم دادن —چند جمله‌ای — مشتق قطبی — نامساوی‌ها

دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض — آنالیز مختلط

توسیع تعدادی از نامساوی‌های چندجمله‌ای در مشتق قطبی

نگارش

منانه شاکری چناری

استاد راهنما

دکتر محمود بیدخام

استاد مشاور

دکتر رضا معمارباشی

۱۳۸۸

قدردانی

حمد و سپاس بی‌کران به درگاه خدای منان که توفیق تحصیل علم و دانش را به من ارزانی داشت. تدوین و نگارش این رساله را مرهون زحمات و تلاش افرادی است که اینجانب تشکر و قدردانی از آن‌ها را واجب می‌دانم، نخست استاد گرامی جناب آقای دکتر بیدخام که از بذل هرگونه مساعدت و راهنمای به اینجانب دریغ نورزیدند و با صبر و حوصله مشکلات تدوین این رساله را بر من آسان نمودند و با تشکر از اساتید هیئت داوری، آقایان دکتر احمد زیره و دکتر مجید اسحقی که با حضور در جلسه دفاعیه و بیان نکات عالمانه خود به غنای کار افزودند، همچنین از خانواده عزیزم، که همواره در تمام مراحل زندگی یار و همراه من بودند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

با افتخار تقدیم می کنم به :

خانواده محترم دکتر بیدخام

و

خانواده عزیزم

که تنظیم این رساله را مرهون حمایت‌های بی‌دریغ‌شان می‌دانم.

چکیده

یکی از قضایای اساسی و کاربردی در آنالیز مختلط، اصل اکسترمم مطلق می‌باشد. بنابر اصل اکسترمم مطلق، اگر تابع غیر ثابت $f(z)$ در یک میدان کراندار، تحلیلی و بر بستار آن پیوسته باشد، آن‌گاه $|f(z)|$ مقادیر اکسترمم خود را بر روی مرز اختیار می‌کند. اصل فوق یک قضیه وجودی می‌باشد، به عبارت دیگر روشی برای به‌دست آوردن مقادیر اکسترمم، ارائه نمی‌دهد.

در این رساله تلاش می‌شود، تا تقریبی برای اکسترمم مطلق چند جمله‌ای‌های مختلط، با درنظر گرفتن موقعیت ریشه‌ها، ارائه شود.

در این راستا، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم، به آهنگ رشد چند جمله‌ای‌هایی که ریشه‌ای درون دایره واحد ندارند، می‌پردازیم.

در فصل سوم با ارائه دو بخش، به بیان نامساوی‌هایی برای مشتق چند جمله‌ای‌ها خواهیم پرداخت.

فصل چهارم را باارائه دو بخش، نتایج جدیدی را که در جهت تعمیم دو فصل پیشین به‌دست آمده است، مورد مطالعه قرار می‌دهیم (در تمام فصول این پایان‌نامه نتایج جدید با علامت $*$ مشخص شده‌اند.).

مراجع اصلی در این پایان‌نامه عبارتند از[۸] و [۳۳] و [۱۲] و [۱۹] و [۲۲] و [۱۷].

واژه‌های کلیدی: اصل اکسترمم مطلق— تابع تحلیلی—تعمیم دادن —چند جمله‌ای— مشتق قطبی — نامساوی‌ها

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

یکی از مهم‌ترین قضایایی که به اکسترمم یک تابع تحلیلی می‌پردازد، اصل اکسترمم مطلق است.
از آن‌جایی‌که چند جمله‌ای‌ها نقش بسزایی در هر شاخه‌ای از ریاضیات دارند، و با توجه به این‌که چند جمله‌ای‌ها، توابع تحلیلی هستند، این قضیه بیان می‌کند که قدرمطلق یک چند جمله‌ای غیر ثابت اکسترمم مقدارش را بر مرز ناحیه مورد بررسی اتخاذ می‌نماید.
وجودی بودن قضیه اکسترمم مطلق، روشی برای به‌دست آوردن مقادیر اکسترمم ارائه نمی‌دهد، بنابراین مطالعات و تحقیقات فراوانی در جهت تقریب این مقادیر انجام گرفته است.
ما نیز با ارائه این رساله گامی در جهت تعمیم و بهبود آن‌ها برمی‌داریم.

۱.۱ نماد و تعاریف

در این رساله از علائم زیر استفاده می‌شود.

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط

$\mathbb{R}^n$ مجموعه n تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی

این بخش شامل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصول بعد می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱ هر مجموعه همبند و باز، میدان نامیده می‌شود. میدان را معمولاً با D نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱ یک میدان به همراه بعضی، هیچ یک و یا همگی نقاط مرزی‌اش را ناحیه گویند.

تعریف ۳.۱.۱ یک چند جمله‌ای با ضرایب مختلط، چند جمله‌ای مختلط نام دارد.

تعریف ۴.۱.۱ مجموعه X در $\mathbb{R}^n$ محدب نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دو نقطه مفروض $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به X، و هر $t \in (۰, ۱)$ داشته‌باشیم

$$tx_۱+(۱-t)x_۲ \in X$$

تعریف ۵.۱.۱ اشتراک همه مجموعه‌های محدب شامل یک مجموعه از نقاط در $\mathbb{R}^n$ را، غلاف محدب آن مجموعه گوییم.

تعریف ٦.۱.۱ تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ محدب گفته می‌شود اگر به ازای هر دو نقطه مفروض $x_۱$ و $x_۲$ در $\mathbb{R}^n$ و هر $t \in (۰, ۱)$ نامساوی زیر برقرار باشد

$$f(tx_۱+(۱-t)x_۲) \leq tf(x_۱)+(۱-t)f(x_۲)$$

تعریف ۷.۱.۱ تابع f را در $z_۰$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_۰$ مشتق پذیر باشد.

تعریف ۸.۱.۱ یک چند جمله‌ای $P(z)$ از درجه n خود معکوس[۱] نامیده می‌شود اگر $P(z) = Q(z)$ به‌طوری‌که $Q(z) = z^n\overline{P(۱/\bar{z})}$.

[۱] self inversive

تعریف ۹.۱.۱ تابع f در یک نقطه تکینه دارد، اگر در آن نقطه تحلیلی نباشد. به‌علاوه، اگر تابع در یک همسایگی یک تکینه تحلیلی باشد، آن‌گاه گوییم آن نقطه تکینه تنها است.

تعریف ۱۰.۱.۱ یک خم پیوسته در صفحه مختلط به‌صورت پارامتری به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad\qquad (a \leq t \leq b),$$

که در آن $x(t)$ و $y(t)$ توابعی حقیقی و پیوسته از متغیر حقیقی t هستند، به‌طوری‌که نقطه $z(a)$ نقطه آغازی و $z(b)$ را نقطه پایانی نامیده می‌شود. گاهی خم را با C می نمایانیم.
اگر نقطه آغازی و پایانی خم C بر هم منطبق شوند ($z(a) = z(b)$)، در این‌صورت C را یک خم بسته می‌نامند. اگر هر وقت $t_۱ \neq t_۲$، داشته‌باشیم $z(t_۱) \neq z(t_۲)$، در این‌صورت C با خودش تلاقی نمی‌کند و این خم را ساده می‌نامند. و خم بسته‌ای را که در فاصله $a \leq t < b$ ساده باشد، خم ساده بسته نامند.

تعریف ۱۱.۱.۱ توابع یک به یک را توابع تک ارز نامند و از نظر تحلیلی توابعی هستند که مشتق مخالف صفر دارند. و از نظر هندسی توابع تک‌ارز، خم‌های ساده را بر خم‌های ساده می‌نگارد.

۲.۱ قضایای پایه

در این بخش چند قضیه پایه‌ای از آنالیز مختلط که در فصول بعدی مورد نیاز هستند را می‌آوریم.

قضیه ۱.۲.۱ اگر $f(z)$ در $z = z_{0}$ تکینه تنها داشته باشد و با $z \to z_{0}$، $f(z) \to \infty$، آن‌گاه در $z = z_{0}$ قطب دارد.

قضیه ۲.۲.۱ (اساسی جبر) اگر $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ $(a_n \neq 0)$ چند جمله‌ای از درجه n، آن‌گاه $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ موجودند به‌طوری‌که

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i) \tag{1}$$

که z_i ها لزوماً متمایز نیستند.

قضیه ۳.۲.۱ (فرمول انتگرال پواسن [۲]) اگر $u(z)$ در میدانی شامل قرص $|z| \leq R$ همساز باشد، آن‌گاه برای $z = re^{i\theta}$ و $r < R$ داریم

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi) + r^2} u(Re^{i\varphi}) d\varphi. \tag{2}$$

قضیه ۴.۲.۱ (میانگین گاوس [۳]) اگر $f(z)$ در قرص بسته $|z - z_{0}| \leq r$ تحلیلی باشد، آن‌گاه

$$f(z_{0}) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(z_{0} + re^{i\theta}) d\theta. \tag{3}$$

---

[۲] Poisson
[۳] Gauss

قضیه ۵.۲.۱ (اصل ماکزیمم مطلق) اگر $f(z)$ در میدان کراندار D تحلیلی و بر بستار آن، $\bar{D}$ پیوسته باشد، آن‌گاه $|f(z)|$ ماکزیممی بر مرز D دارد. به‌علاوه در نقاط درونی ماکزیمم ندارد، مگر این‌که تابع ثابت باشد.

قضیه ۶.۲.۱ (اصل مینیمم مطلق) فرض کنیم $f(z)$ در میدان D تحلیلی و در D، $f(z) \neq \circ$، در این‌صورت $|f(z)|$ نمی‌تواند مینیممی در D داشته باشد مگر این‌که $f(z)$ ثابت باشد. اگر $|f(z)|$ همچنین بر $\bar{D}$ پیوسته باشد، آن‌گاه $f(z)$ مینیمی بر مرز دارد.

قضیه ۷.۲.۱ (روشه [۴]) فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی خم ساده بسته C تحلیلی باشند و بر C، $|f(z)| > |g(z)|$، دراین‌صورت $f(z) + g(z)$ و $f(z)$ درون C تعداد صفرهای برابر دارند.

قضیه ۸.۲.۱ (تعمیم لم شوارتز[۵]) اگر $P(z)$ درون و بر روی دایره واحد تحلیلی باشد و روی $|z| = ۱$، $|P(z)| \leq M$ و $P(\circ) = \alpha$ به‌طوری‌که $M > |\alpha| > \circ$، آن‌گاه

$$|P(z)| \leq M\frac{M|z| + |\alpha|}{|\alpha||z| + |M|} \qquad (|z| < ۱). \qquad (۴)$$

قضیه ۹.۲.۱ (قضیه نگاشت ریمان) فرض کنیم که D میدان همبند ساده‌یی به غیر از تمام صفحه و $z_\circ$ نقطه ای در این میدان باشد. در این‌صورت تابع منحصربه‌فرد و تک ارز $f(z)$ موجود است که D را بر قرص $|z| < ۱$ می‌نگارد و $f(z_\circ) = \circ$ و $f'(z_\circ) > \circ$.

قضیه ۱۰.۲.۱ (قضیه اصل شناسه) فرض کنید $f(z)$ درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی باشد مگر در تعداد متناهی قطب‌ها درون C، و فرض کنیم بر C، $f(z) \neq \circ$. اگر N و P به

---
[۴] Rouche
[۵] Schwarz

ترتیب تعداد صفرها و قطب‌های درون C باشند، آن‌گاه:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P. \qquad (5)$$

و از آن‌جایی‌که تغییرات خالص در $argf(z)$ به هنگام پیمایش z بر مرز C، با $\Delta_C argf(z)-$ نمایانده می‌شود، داریم

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = i\Delta_C argf(z). \qquad (6)$$

پس نتیجه قضیه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2\pi i}\Delta_C argf(z) = N - P. \qquad (7)$$

همانندی (۷) به اصل شناسه مرسوم است.

قضیه ۱۱.۲.۱ اگر $p(z)$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه n، آن‌گاه

$$\max_{|z|=R}|p(z)| \le R^n \max_{|z|=1}|p(z)| \qquad (R > 1) \qquad (8)$$

و

$$\max_{|z|=R}|p(z)| \ge R^n \max_{|z|=1}|p(z)| \qquad (0 < R < 1). \qquad (9)$$

تساوی در (۸) و (۹) برای $p(z) = \lambda z^n$ برقرار است. نتیجه اول نتیجه ساده از اصل ماکسیمم مطلق که در [۴۰] مشاهده می‌شود. وارگا[۶] [۴۶] نامساوی (۹) را به زارنتونلو[۷] نسبت می‌دهد.

---

[۶] R. S. Varga

[۷] E. H. Zarantonello

فصل ۲

نامساوی برای چند جمله‌ای‌ها

در این فصل به مطالعه آن دسته از چند جمله‌ای‌هایی از درجه n، که در $|z| < k (k > ۰)$ ریشه ندارند، می‌پردازیم.

برای این منظور ابتدا نامساوی زیر را برای چند جمله‌ای‌ها از درجه n، که صفری در دایره واحد ندارند، وتوسط آنکنی[۱] و ریولین[۲] [۹] برای $R \geq ۱$ اثبات شده است، تعمیم می‌دهیم.

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq \left(\frac{R^n + ۱}{۲} \right) \max_{|z|=۱} |p(z)|. \qquad (۱)$$

در انتهای این فصل به تعمیم نامساوی زیر

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \geq \left(\frac{R + ۱}{۲} \right)^n \max_{|z|=۱} |p(z)|. \qquad (۲)$$

برای $R \leq ۱$، که توسط ریولین [۴۳] برای چند جمله‌ای‌های از درجه n، که ریشه‌ای در $|z| < ۱$ نداشته باشد، اثبات شده است، می‌پردازیم.

گویل[۳] [۲۹] با مشاهده بر این‌که، تساوی در (۱) فقط برای چند جمله‌ای‌هایی به فرم $p(z) = \lambda + \mu z^n$، $|\mu| = |\lambda|$، به‌طوری‌که ضریب z^n در آن $\frac{۱}{۲} \max_{|z|=۱} |p(z)|$ می‌باشد، برقرار است.

---

۱ N. C. Ankeny
۲ T. J. Rivlin
۳ N. K. Govil

حال با دقیق‌تر کردن نامساوی (۱)، کران نامساوی را برای چند جمله‌ای هایی که ضریب z^n در آن $\frac{1}{2}\max_{|z|=1}|p(z)|$ نمی‌باشد را بهبود بخشید و قضیه زیر را اثبات کرد.

قضیه ۱.۱.۲ اگر $p(z)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu z^\nu$ یک چند جمله‌ای از درجه n، $p(z)\neq 0$ در $|z|<1$، آن‌گاه برای $R\geq 1$

$$\max_{|z|=R}|p(z)|\leq\left(\frac{R^n+1}{2}\right)\|p\|-\frac{n}{2}\left(\frac{\|p\|^2-4|a_n|^2}{\|p\|}\right)\times\left\{\frac{(R-1)\|p\|}{\|p\|+2|a_n|}-\ln\left(1+\frac{(R-1)\|p\|}{\|p\|+2|a_n|}\right)\right\}. \tag{۳}$$

تساوی در نامساوی بالا برای چند جمله‌ای‌هایی به فرم $p(z)=\lambda+\mu z^n$، $|\mu|=|\lambda|$، برقرار است. قضیه بالا توسط دوان[۴] و بهات[۵][۱۵] دقیق‌تر شد. سپس توسط گویل و نیایدینکونگ[۶][۳۲]، برای چند جمله‌ای‌هایی که صفری در $|z|<k(k\geq 1)$ نداشته باشد، تعمیم یافت. پس از آن، نتیجه به‌دست آمده توسط گویل و نیایدینکونگ [۳۲]، برای چند جمله‌ای‌هایی به فرم $p(z)=a_0+\sum_{\nu=t}^{n}a_\nu z^\nu,\ 1\leq t\leq n$، توسط گاردنر[۷]، گویل و ویمز[۸][۲۴] تعمیم یافت و قضیه زیر را با فرض

$$\|p\|=\max_{|z|=1}|p(z)|,$$

$$M(p,R)=\max_{|z|=R}|p(z)|$$

اثبات شد.

---

[۴] K. K. Dewan
[۵] A. A. Bhat
[۶] G. N. Nyuydinkong
[۷] R. B. Gardner
[۸] A.Weems