بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای محمود مرادخانی رشته ریاضی‌محض به شماره دانشجویی ۸۹۵۲۰۵۱۰۲۷ تحت عنوان: «بیش خمینه‌های ریمانی» را در تاریخ ۱۳۹۱/۷/۱ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۲- استاد مشاور	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر میرمحمد رضایی	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته   است که در سال   در دانشکده   دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر   ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر   و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر   از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب محمود مرادخانی دانشجوی رشته ریاضی [illegible] مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: محمود مرادخانی

تاریخ و امضا:

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب محمد مرادخانی دانشجوی رشته [illegible] ورودی سال تحصیلی ۸۹-۹۰ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده [illegible] متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضاء:

تاریخ: ۹۱/۱۰/٤

دانشگاه تربیت مدرّس

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

بیش‌خمینه‌های ریمانی

نگارنده :

محمود مرادخانی

استاد راهنما :

دکتر عباس حیدری

استاد مشاور :

دکتر سید مسعود امینی

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

بهاره، یاس و یوسف

تشکر

اکنون که نگارش این پایان نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم می دانم از زحمات استاد راهنمای گرانقدرم، جناب آقای دکتر **عباس حیدری،** که دلسوزانه و برادرانه اینجانب را راهنمایی فرمودند تشکر و از استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر سید مسعود امینی قدردانی کنم.

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا معرفی بیش‌خمینه‌های هموار از دیدگاه هندسه جبری مورد مطالعه قرار می‌گیرد و پس از آن بحث درباره بیش‌گروه‌های لی و جبر لی وابسته به آن‌ها از نظر خواهد گذشت. سپس بیش‌خمینه‌های ریمانی مورد بررسی قرار گرفته و به گسترش مفاهیمی همچون هموستارها، مشتق هموردا، میدان‌های برداری موازی، انتقال موازی، ژئودزیک‌ها و میدان‌های برداری کیلینگ بر این فضاها پرداخته خواهد شد.

این پایان‌نامه به تشریح بخش هایی از مرجع [۱۰] می‌پردازد.

واژه‌های کلیدی : بیش‌خمینه، بیش‌گروه لی، بیش‌خمینه ریمانی، ژئودزیک.

فهرست

پیش‌گفتار

اصولا همه ذرات بنیادی در نظریه مکانیک کوانتومی بوزون یا فرمیون است. بنا به اسپین آن‌ها (هر الکترون یک اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای ذاتی، کاملاً مستقل از حرکت زاویه‌ای مداری، دارد که این اندازه حرکت ذاتی، اسپین الکترون نامیده می‌شود. اسپین چهارمین عدد کوانتومی الکترون است.)، ذرات با اسپین نیمه صحیح را فرمیون و ذرات با اسپین صحیح را بوزون می‌گویند. اگر بخواهیم با استعاره صحبت کنیم باید بگوییم لازم است فرمیون‌ها دو دور کامل بچرخند تا به وضعیت ابتدایی خویش بازگـردند اما بوزون‌ها با یک دور به فاز اولیه برمی‌گردند. الکترون‌ها، لپتون‌ها، نیتریون‌ها و حتی کوارک‌ها همگی فرمیون می‌باشند و فوتون‌ها بوزون هستند. مطالعه هم‌زمان تاثیرات رفتـارهای این دو ذره بر یکدیگر انگیزه اصلی گسترش نظریه فضاهای بیش‌متقارن است که فـیزیکدان‌ها جرقه آن را زده‌اند. یعنی نظریه بیش‌خمینه‌ها در واقع مدل‌سازی ریاضی آن چیزی است که فیزیکدان‌ها در پی آن بوده‌اند([۵])

اولین اشیاء بیش‌هندسی که توسط فیزیکدانان پیشگام همچون F. A. Berezin [۷] و B. Kostant [۲] وD.A. Leites [۶] و B. De Witt [۱] به وسیله مدل‌سازی‌های ریاضی ساخته شد، فضاهای حلقوی با بافه Z_2-مدرج جبری هستند. پس از آن، استفاده از روش های هندسه جبری توسط Bernstein [۱۲] و D.A. Leites [۶] برای تعمیق مطالعه بیش‌تقارن صورت گرفت. سپس پایه‌های نظریه‌ی هندسه دیفرانسیل روی بیش‌خمینه‌ها بنا نهاده شد-[۱۲]، [۱۳]، [۱۵]- با واین وجود تعدادکتـاب‌ها و مقـاله ها در زمینه‌ی هندسه ریمـانی روی بیش‌خمینه‌ها چندان چشمگیر نیست. در واقع بیشتر تحقیقـات معطوف، به هموستار«Levi-Civita »می‌باشد و نظریه کلی‌تری از بیـش‌خمینه‌های‌ریمانی در دسترس نیست. علاقه‌مندی به مطالعه روی مقوله بیش‌تقارن در دهه اخیر فزونی یافته و اشخاصی چون V. S. Varadarajan [۱۵] مقاله ها و تألیفات خوبی در این‌باره ارائه کرده‌اند.

این پایان‌نامه به تشریح مطالب مرجع [۱۰] می‌پردازد و ساختار آن چنین است: ابتدا در فصل ۱ مفاهیم اساسی و مورد نیاز جهت مطالعه بیش‌خمینه‌ها بیـان می‌شود. مهم‌ترین مباحثی که به آن‌ها پرداخته خواهد شد عبارتند از: بیش‌جبرها، بیش‌مدول‌ها، بیش‌ماتریس‌ها، مقدمه‌ای بر نظریه رسته و نظریه بافه‌ها که در این میان نظریه بافه‌ها به نوعی شالوده بنای بیش‌خمینه‌ها به شمار می‌رود. مفهوم بافه، این اجـازه را می‌دهد تا یک راه واحد برای توصیف اشیاء هندسی ارائه شود.

در فصل۲ ابتدا مفهوم فضای حلقوی مورد مطالعه قرار خواهد گرفت که به نوعی ساختار اصلی یک بیش‌خمینه است. هر فضای حلقوی از یک جفت تشکیل شده است که یک فضای توپولوژیک به همراه بافه‌ای از توابع تعریف شده بر روی آن می‌باشد. مثلا برای خمینه‌های عادی، بافـه توابع مذکور در واقع همان بافه توابع C^∞ است. سپس معرفی بیش‌خمینه‌ها به عنوان زیر مجموعه‌ای از بیش‌فضاهای حلقوی از نظر خواهد گذشت. پس ازآن به تشریح بیش‌خمینه‌های شکافته شده و کاهیده وابسته به یک بیش‌خمینه پرداخته می‌شود و بعد مقدمات حساب دیفرانسیل به روی بیش‌خمینه‌ها تعمیم داده خواهد شد. در نهایت جهت رسیدن به یک درک و بینش بهتر از بیش‌خمینه‌ها به اجمال مبحث تابعگون نقاط بیان می‌شود.

در فصل۳ بیش گروه‌های لی که زیر مجموعه مهمی از بیش‌خمینه‌هاست و در مطالعه فضاهای بیش‌متقارن، مطرح می‌شوند، اجمالا معرفی می‌شوند. یک بیش‌گروه لی، بیش‌خمینه‌ای است که به همراه آن نگاشت‌هایی به نام‌های ضـرب و معکوس تعریف می‌شوند، چنان‌که این نگاشت‌ها یک سری روابط متداول را که بر حسب دیاگرام‌های جابجـایی مناسبی بیان می‌شود، برآورده می‌سازند. به طور طبیعی می‌توان به هر بیش گروه لی، یک بیش‌جبر لی را وابسته کرد که شامل بیش‌میدان‌های برداری ناوردای چپ می‌باشد.

در فصل۴ با معرفی متریک ریمانی مدرج و بیش‌هموستار روی یک بیش‌خمینه، تعریف بیش‌خمینه‌های ریمانی بنا نهاده می‌شود و سپس به گسترش مفاهیم معمول در هندسه ریمانی همچون هموستار لوی-چیویتا، مشتق هموردا در امتداد یک خم، میدان‌های برداری موازی، ژئودزیک‌ها و میدان‌های کیلینگ پرداخته خواهد شد.

فصل ۱

پیش نیازهای بیش‌هندسه

در این فصل مفاهیــم اساسی و مورد نیاز جهت مطالعه بیش‌خمینه‌ها بیـان می‌شود. مهمترین مبحث هایی که به آن‌ها پرداخته می‌شود عبارتند از بیش‌جبرها، بیش‌مدول‌ها، بیش‌ماتریس‌ها، مقدمه‌ای بر نظریه رسته و نظریه بافه‌ها که در این میان نظریه بافه‌ها به نوعی شالوده بنای بیش‌خمینه‌ها به شمار می‌رود. فـرض کنید $\mathbb{K}$، نشان دهنده میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد.

۱.۱ بیش‌فضاهای برداری

تعریف۱.۱.۱: یک بیش‌فـضای برداری Vروی میدان$\mathbb{K}$، یک فـضای برداری$\mathbb{Z}_2$-مدرج است، یعنی فضایی برداری است که بتوان آن را به دو زیر فضای $V = V_0 \oplus V_1$تجـزیه کرد. بردارهای عضـوV_0را زوج و بردارهای عضو V_1را فـرد می‌نامند. همچنین V از بعـد$p|q$است اگر $dimV_0 = p$ و $dimV_1 = q$. اعضـای $V_0 \cup V_1$ را همگــن می‌نامند. اگرv یک عنصر همگــن ناصفر باشد، درجـه‌یv به صورت پایین تعریف و با نماد$|v|$ مشخص می‌شود.

$$|v| = \begin{cases} 0 & v \epsilon V_0 \\ 1 & v \epsilon V_1 \end{cases}$$

نماد $\mathbb{K}^{p|q}$ بیش‌فضای برداری $\mathbb{K}^p \oplus \mathbb{K}^q$ را مشخص می‌کند.

تعریف۲.۱.۱: یک ریختی از بیش‌فـضای برداری Vبه بیش‌فضای برداری W، عبارت از یک نگاشت خطی از V به Wاســت به طوری که $\mathbb{Z}_2$ -مدرج بودن تحت آن حفظ شود. یعنــی تبدیـل خطی که اعضـای همگن را به اعضای همگنی از همان درجه نظیر کند. مجموعه‌ی همه‌ی ریختی‌ها از بیش‌فـضای برداری Vبه Wرا با نماد $Hom_{Svec}(V,W)$نمایش می‌دهیم.

تعریف۳.۱.۱: اگر $V = V_0 \oplus V_1$ و $W = W_0 \oplus W_1$ دو بیش‌فضای برداری باشند، $\underline{Hom}(V,W)$ را مجموعه همه نگاشت‌های خطی از V به W در نظر بگیرید. $\underline{Hom}(V,W)$ با درجه‌بندی به صورت (۱) به یک بیش‌فضای برداری تبدیل می‌شود.

$$\underline{Hom}(V,W)_0 = \{V \xrightarrow{T} W | \text{حافظ درجه باشد } T\} \quad (= Hom_{svec}(V,W))$$

$$\underline{Hom}(V,W)_1 = \{V \xrightarrow{T} W | \text{درجه را عوض کند } T\} \tag{۱}$$

مثال۴.۱.۱: اگر $V = \mathbb{K}^{m|n}$ و $W = \mathbb{K}^{p|q}$ داریم :

$$Hom(V,W)_0 = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} | \text{ماتریس هایی با درایه هایی در } \mathbb{K} \text{ هستند } D_{q\times n} \text{ و } A_{p\times m}\}$$

$$Hom(V,W)_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \middle| \text{ماتریس هایی با درایه هایی در } \mathbb{K} \text{ هستند } C_{q\times m} \text{ و } B_{P\times n}\right\}.$$

هرگاه V و W دو بیش‌فضای برداری باشند، حاصل‌جمع مستقیم آنها با درجه بندی

$$(V \oplus W)_i = V_i \oplus W_i$$

و حاصل ضرب تانسوری آنها با درجه بندی زیر بیش‌فضای برداری خواهند بود.

$$(V \otimes W)_i = \sum_{j+k \equiv i(mod 2)} V_j \otimes W_k \Rightarrow \begin{cases} (V \otimes W)_0 = (V_0 \otimes W_0) \oplus (V_1 \otimes W_1) \\ (V \otimes W)_1 = (V_0 \otimes W_1) \oplus (V_1 \otimes W_0) \end{cases}$$

منظور از یک پایه همگن برای بیش‌فضای برداری V یک پایه متشکل از عناصر همگن است. یک زیر فضای همگن از V، زیر فضای چون W از V است به طوریکه $W = W_0 \oplus W_1$ و W_0 و W_1 به ترتیب زیر فضایی از V_0 و V_1 باشد.

قانون علامت‌ها و سازگاری آن: در دسته فضاهای برداری ضرب تانسوری $\otimes$، به طور طبیعی جابجایی و شرکتپذیر است. در واقع برای فضاهای برداری U و V و W یکریختی طبیعی شرکتپذیری به صورت(۲) برقرار

است.

$$(\mathrm{U}\otimes\mathrm{V})\otimes\mathrm{W} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{U}\otimes(\mathrm{V}\otimes\mathrm{W})\,,\ \ (u\otimes v)\otimes w \longmapsto u\otimes(v\otimes w) \qquad (۲)$$

همچنین یکریختی جابجایی را به صورت $\begin{cases} c_{V,W} : V\otimes W \longrightarrow W\otimes V \\ \qquad\quad v\otimes w \longmapsto w\otimes v \end{cases}$ داریم.

برای بیش‌فضاهای برداری یکریختی شرکتپذیری به همان شکل فوق باقی می‌ماند ولی برای یکریختی جا-بجایی تغییری به صورت (۳) لازم است.

$$\begin{cases} c_{V,W} : V\otimes W \longrightarrow W\otimes V \\ \qquad\quad v\otimes w \longmapsto (-1)^{|v|\,|w|}w\otimes v \end{cases} \qquad (۳)$$

یکریختی جـابجایی در دیاگرام شش ضلعی (شکل۱) صدق می‌کند که نشان‌دهنده سازگاری آن با یکریختی شرکتپذیری است.

توجه۵.۱.۱: در فرمول اخیر فقط عناصر همگن لحاظ شده‌اند زیرا با استفاده از خاصیت خطی می‌توان آن را

$$\begin{tikzcd}
 & W\otimes U\otimes V \arrow[dl, "c_{W,U}\otimes 1_V"'] & \\
U\otimes W\otimes V \arrow[d, "1_U\otimes c_{W,V}"'] & & W\otimes V\otimes U \arrow[ul, "1_W\otimes c_{V,U}"'] \arrow[ll, "c_{W\otimes V,U}"] \\
U\otimes V\otimes W \arrow[rr, "c_{U,V\otimes W}"] \arrow[dr, "c_{U,V}\otimes 1_W"'] & & V\otimes W\otimes U \arrow[u, "c_{V,W}\otimes 1_U"'] \\
 & V\otimes U\otimes W \arrow[ur, "1_V\otimes c_{U,V}"'] &
\end{tikzcd}$$

شکل ۱

به عناصر غیرهمگن گسترش داد. همچنین داریم:

$$c_{V,W} \circ c_{W,V} = 1_{V\otimes W}$$

رابطه (۳) منشاء قانون علامت است که در برخی تالیفات و نوشته‌های فیزیکی و ریاضیاتی به چشم می‌خورد و بیان می‌کند که «هرگاه دو عنصر فرد با هم جابه‌جا شوند یک علامت منفی جلوی آنها ایجاد خواهد شد».

هرگاه V_1 و V_2 و.... وV_n بیش‌فضاهای برداری باشند وS_n گروه جایگشت‌هایn عنصر باشد، برای یک$\sigma \epsilon S_n$ می‌توان یکریختی جابجایی را به شکل (۴) تعمیم داد.

$$\begin{cases} c_\sigma : V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow V_{\sigma(1)} \otimes V_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)} \\ \qquad v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto (-1)^{|\sigma|} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \end{cases} \tag{۴}$$

که در آن،

$$|\sigma| := \sum_{\substack{k<l \\ \sigma(k)>\sigma(l)}} |V_k||V_l|$$

۲.۱ فضای دوگان

هرگاه V یک بیش‌فضای برداری باشد، دوگان آن،V^* ، به صورت$V^* = \underline{Hom}(V, \mathbb{K})$ تعریف می‌شود. بنا براین داریم

$$(V^*)_0 = \underline{Hom}(V, \mathbb{K})_0 = Hom_{Svec}(V, \mathbb{K}) = \left\{ V \xrightarrow{T} \mathbb{K}^{1|0} \,\middle|\, T \text{ حافظ درجه باشد} \right\}$$

$$= \left\{ V \xrightarrow{T} \mathbb{K}^{1|0} \,\middle|\, T(V_0) \subset \mathbb{K}^1, T(V_1) \subset \mathbb{K}^0 \right\}$$

$$= \left\{ V \xrightarrow{T} \mathbb{K}^{1|0} \,\middle|\, Ker\, T = V_1 \right\}$$

و به طور مشابه

$$(V^*)_1 = \underline{Hom}(V, \mathbb{K})_1 = \left\{ V \xrightarrow{T} \mathbb{K}^{1|0} \,\middle|\, Ker\, T = V_0 \right\}$$

پس به طور کلی داریم

$$(V^*)_i = \left\{ V \xrightarrow{T} \mathbb{K}^{1|0} \,\middle|\, Ker\, T = V_{1-i} \right\}$$

هرگاه $\langle .,. \rangle : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ که $(\omega, v) \longmapsto \langle \omega, v \rangle$ نگاشت جفت‌ساز دوگانی باشد، جفت‌ساز دوگانی حاصل ضرب تانسوری دو بیش‌فضای برداری V و W به صورت (۵) تعریف می‌شود.

$$\langle \, .,. \rangle : (V \otimes W)^* \times V \otimes W \longrightarrow \mathbb{K} \tag{۵}$$

$$(\psi \otimes \omega \, , v \otimes w) \;\longmapsto\; \langle \psi \otimes \omega \, , v \otimes w \rangle = \; (-1)^{|\omega||v|} \langle \psi, v \rangle \langle \omega, w \rangle$$

توجه کنید که علامت منفی به اینکه در ضرب تانسوری V^* سمت چپ باشد یا راست بستگی ندارد زیرا

$$(-1)^{|\omega||v|} = \; (-1)^{|\psi||w|}$$

گزاره۱.۲.۱ (خاصیت جهانی ضرب تانسوری): فرض کنید V و W دو بیش‌فضای برداری و f یک نگاشت دو خطی از $V \times W$ به توی بیش‌فضای برداری سومی چون Z باشد. در این صورت ریختی یکتای

$$g : V \times W \longrightarrow Z$$

موجود است به طوری‌که برای هر $v \epsilon V$ و $w \epsilon W$

$$g(v \otimes w) = f(v, w)$$

برهان: مرجع [۵] را ببینید.■

توجه: $V^{\otimes n} \; = \overbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}^{n\text{ بار}}$ به ازای یک بیش‌فضای برداری V خوش‌تعریف است. همچنین می-توانیم با استفاده از تابع تغییر درجه Π، ($\Pi(V)_i = V_{1-i}$)، مفهوم $V^{\otimes n}$ را به $V^{\otimes n|m}$ گسترش دهیم.

$$V^{n|m} := \; \overbrace{V \times V \times \ldots \times V}^{n\text{ بار}} \times \overbrace{\Pi(V) \times \; \Pi(V) \times \ldots \times \Pi(V)}^{m\text{ بار}}$$

حال با استفاده از خاصیت جهانی داریم:

$$V^{\otimes n|m} := \; \overbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}^{n\text{ بار}} \otimes \overbrace{\Pi(V) \otimes \; \Pi(V) \otimes \ldots \otimes \Pi(V)}^{m\text{ بار}}$$

در این صورت درجه هر عنصر با استفاده تعریف ضرب تانسوری بدست می‌آید که قبلاً به آن اشاره شد.

۳.۱ بیش‌جبر

به طور معمول یک جبر عبارت است از یک فضای برداری A که به یک ضرب دوخطی مجهز باشد. حال یک بیش‌جبر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف۱.۳.۱: یک بیش‌جبر، عبارت است از یک بیش‌فضای برداری A به همراه یک ضرب شرکتپذیر (و در بیشتر مواقع یکدار) $\tau : A\otimes A \longrightarrow A$ که در واقع یک ریختـــی بیش‌فضاهای برداری است، یعنی $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$. می‌گوییم بیش‌جبر A (بیش)جابجائی است هرگاه $\tau \circ c_{A,A} = \tau$ ، این بدان معنی است که اگر عناصر همگن a و b در هم ضرب شوند از قانون $ab = (-1)^{|a||b|}ba$ تبعیت می‌کنند.

شرکتپذیری بیش‌جبر A بدین معنی است که روی $A\otimes A\otimes A$ داریم $\tau \circ \tau\otimes id = \tau \circ id\otimes\tau$ (شکل ۲)، یعنی $(ab)c = a(bc)$، همچنین جبر A یکدار است هرگاه به ازای هر $a \in A$، داشته باشیم

$$\tau(1\otimes a) = \tau(a\otimes 1) = a$$

یعنی، $1.a = a.1 = a$.

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "\tau\circ id"] \arrow[d, "id\otimes\tau"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A\otimes A \arrow[d, "\tau"] \\
A\otimes A \arrow[r, "\tau"'] & A
\end{tikzcd}$$

شکل ۲

هرگاه A و B دو بیش‌جبر باشند با ضرب (۶) بیش‌فضای برداری $A\otimes B$ نیز یک بیش‌جبر خواهد بود .

$$(a\otimes b)(c\otimes d) = (-1)^{|b||c|}ac\otimes b \qquad (۶)$$

به عنوان مثالی از یک بیش‌جبر شرکتپذیر قصد داریم بیش‌جبر تانسوری را تعریف کنیم.

تعریف۲.۳.۱: فرض کنید V یک بیش‌جبـــر باشد. بیش‌جبر تانسوری عبـــارت است از بیش‌فضـــای برداری $T(V) = \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$ که در آن $T(V)_0 = \bigoplus_{n\,\text{زوج}} V^{\otimes n}$ و $T(V)_1 = \bigoplus_{n\,\text{فرد}} V^{\otimes n}$، به همراه ضرب طبیعی که از طریق نگاشت دوخطی $\varphi_{r,s}$ به صورت (۷) تعریف می‌شود.

$$\varphi_{r,s}: V^{\otimes r} \times V^{\otimes r} \longrightarrow V^{\otimes (r+s)} \qquad (۷)$$

$$\varphi_{r,s}(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}\, , w_{j_1} \otimes \cdots \otimes w_{i_s}) = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes w_{j_1} \otimes \cdots \otimes w_{i_s}$$

$T(V)$ یک بیش‌جبر شرکتپذیر و یکدار است. از این پس ما همه بیش‌جبرها را شرکتپذیر و یکدار در نظر می‌گیریم مگر اینکه مشخصاً خلاف آن ذکر شود. واضح است که هرگاه j_A ایده آل تولید شده توسط عناصر فرد از یک بیش‌جبر جابجاییA باشد در این صورت $A/_{j_A}$ یک فضای برداری معمولی (زوج) خواهد بود .

مثال۴.۳.۱: $A = \mathbb{K}[t_1, t_2, \dots, t_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q]$ را در نظر بگیرید که در آن$t_1, t_2, \dots, t_p$ متغیر های معمولی (زوج) و$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ متغیرهای فرد هستند، به این معنی که برای$1 \leq i\, , j \leq q$ داریم

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i$$

(این تساوی نتیجه می‌دهد که$\forall i : {\theta_i}^2 = 0$). به بیان دیگر می‌توانیمA را به صورت حاصلضرب تانسوری$\mathbb{K}[t_1, t_2, \dots, t_p] \otimes \Lambda(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ ببینیم، که در آن منظور از $\Lambda(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$جبر خـارجی تولید شده توسـط $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ می‌باشد. می‌تـوان دید کهA یک بیش‌جبر جـابجایی است و به صورت (۸) مدرج می‌شود.

$$\theta_I = \theta_{i_1} \theta_{i_2} \dots \theta_{i_r} \quad , \quad |I| = r \quad , \quad f_0, f_I \in \mathbb{K}[t_1, t_2, \dots, t_p]$$

$$A_0 = \{f_0 + \textstyle\sum_{|I|\,\text{زوج}} f_I \theta_I \;\mid\; I = \{i_1 < \cdots < i_r\}\} \qquad (۸)$$