بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای یدالله زارع** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۹۵۲۰۵۱۰۰۸ تحت عنوان: «**نقاط ضرب مختلط روی برخی از خم‌های شیمورا**» را در تاریخ ۱۳۹۱/۶/۳۰ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر علی رجایی	استادیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر سیدحمید حاج‌سیدجوادی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۱۳۹۱ در دانشکده ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر علی رجالی ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر امیر جعفری و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب یدالله زارع دانشجوی رشته ریاضی محض-هندسه مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: یدالله زارع

تاریخ و امضا:

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب یدالله زارع دانشجوی رشته ریاضی محض ورودی سال تحصیلی ۱۳۸۹ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:..............

تاریخ: ....

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

نقاط ضرب مختلط روی برخی خم‌های شیمورا

دانشجو:

یدالله زارع

استاد راهنما:

دکتر علی رجایی

استاد مشاور:

دکترامیر جعفری

شهریور ماه ۱۳۹۱

چکیده

فرض کنیم که $\Gamma \subseteq PSL(۲,\mathbb{R})$ یک گروه فوخسی باشد که روی نیم صفحه‌ی بالایی پوانکاره H بطور سره ناپیوسته عمل کند. خارج قسمت $\frac{H}{\Gamma}$به عنوان خم جبری با ساختار رویه ریمانی شناخته شده‌اند.دراین پایان نامه به تعریف زیرگروه‌های حسابی تعمیم یافته از $SL(۲,\mathbb{R}$ می پردازیم و نشان می‌دهیم که برای آن‌ها، فضای خارج قسمت فوق تعبیر پیمانه‌ای مناسب به عنوان فضای رده بندی کننده‌ی چندگوناهای آبلی مناسب با درون ریختی‌هایی متناظر با این زیر گروه‌ها دارد.

در ادامه به معرفی نقاط خاصی از این خم‌ها به نام نقاط ضرب مختلط می پردازیم و نشان می‌دهیم که تعبیر پیمانه‌ای فوق ساختاری طبیعی روی درون ریختی‌های رویه‌های آبلی متناظر با این نقاط القا می‌کند.

کلید واژه ها: زیر گروه‌های همنهشتی از $SL(۲,\mathbb{Z})$ ، زیر گروه‌های حسابی از $PSL(۲,\mathbb{R})$ ، خم های مدولار، گونا ،خم‌های شیمورا، جبر چهارگانی.

فهرست

لیست تصاویر

مقدمه

پیشگفتار

برای دادن انگیزه‌ی شناخت خم‌های شیمورا نخست خم‌های مدولار را معرفی می‌کنیم

برای هر $0 < N \in \mathbb{Z}$ زیر گروه پایین را در نظر می‌گیریم

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \ : \ c \equiv 0 (mod\ N) \right\} \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$$

گروه $\Gamma_0(N)$ بر نیم‌صفحه‌ی کامل شده‌ی بالایی [1] $H^\star = H \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ توسط تبدیلات خطی کسری [2] عمل می‌کند.

خارج‌قسمت $X_0(N) := \Gamma_0(N) \setminus H^*$ خم مدولاری (کلاسیک)است که می‌تواند به عنوان یک رویه‌ی ریمانی فشرده در نظر گرفته شود.

خم‌های مدولار کلاسیک مربوط به زیرگروه‌های همنهشتی $PSL_2(\mathbb{Q})$ که به مدت طولانی مورد بررسی قرار گرفته بودند، دوباره علاقه‌ی تعدادی از نظریه پردازان که کارهای محاسباتی می‌کردند را به خود جلب کرد.

در دهه‌ی ۶۰ قرن بیستم، شیمورا [3] در مقاله‌ی معروفش [۲۶] ، خم‌های مرتبط به جبرهای چهارگانی روی میدان‌های اعداد کاملا حقیقی را تعریف کرد که مشابه خم‌های مدولار کلاسیک مرتبط به جبر $M(2, \mathbb{Q})$ روی $\mathbb{Q}$ می‌باشند. شیمورا این خم‌های جبری خاص را به

[1] completed upper half plane

[2] fractional linear transformation

[3] G.Shimura

منظور ساختن میدان‌های رده‌ای [۴] برای میدان‌های اعداد کاملا حقیقی مورد بررسی قرار داد. این خم‌ها که بعدا خم‌های شیمورا [۵] نامیده شدند، در واقع در تعمیم ساختار $M(۲, \mathbb{Q})$ به یک جبر چهارگانی با شرایطی خاص روی یک میدان کاملا حقیقی بدست آمدند. این خم‌ها به طور گسترده توسط دلین [۶] تعمیم یافتند. در واقع دلین یک چهارچوب بدیهی برای کار شیمورا ایجاد کرد.

در مبحث خم‌های شیمورا، از شاخه‌های مختلف ریاضیات از جمله: آنالیز مختلط، آنالیز p - ادیک، هندسه‌ی جبری، جبر و جبر ناجابه‌جایی سخن به‌میان می‌آید.

چرا خم‌های شیمورا را بررسی و مطالعه می‌کنیم؟

خم‌های شیمورا هم اکنون به عنوان خم‌هایی که شباهت زیادی به خم‌های مدولار کلاسیک دارند به رسمیت شناخته شده‌اند. دلیل دیگر مطالعه‌ی این خم‌ها این است که خم‌های شیمورا نمونه‌های شگرفی از خم‌های با گونای پایین و نگاشت‌های بین آنها ارایه می‌دهند و اخیرا نیز ساختار شگرف نقاط هیگنر [۷] که به ساختار ضرب مختلط روی خم‌های شیمورا مرتبط می‌باشند مورد بررسی قرار گرفتند.

تقریبا هر نتیجه‌ی حاصل از خم‌های کلاسیک را می‌توان با بررسی و کار بیشتر به خم‌های شیمورا تعمیم داد؛ خم‌های شیمورا در کنار خم‌های کلاسیک در یک مرحله‌ی کلیدی اثبات "آخرین قضیه‌ی فرما "ظاهر شدند [۲۱] ؛ ولی کار محاسباتی روی خم‌های شیمورا با فاصله‌ی زمانی زیادی پس از تلاش‌های گسترده بر خم‌های مدولار کلاسیک انجام شد. پیشگامان قرن نوزدهم با همان هیجان و علاقه که صرف مطالعه‌ی $PSL_۲(\mathbb{Q})$ کردند کار روی برخی از خارج‌قسمت‌های حسابی نیم‌صفحه‌ی بالایی را که در حال حاضر آن‌ها را به عنوان خم‌های شیمورا به رسمیت می‌شناسیم شروع کردند.

[۴] class field

[۵] Shimura curves

[۶] Deligne

[۷] Heegner point

اما در ادامه دریافتند که کار روی خم‌های شیمورا دشوارتر از کار روی خم‌های مدولار کلاسیک است. خم‌های شیمورا در مقایسه با خم‌های مدولار پرسش‌های محاسباتی سخت‌تری را مطرح می‌کردند، ولی هرگونه پاسخ کارا برای این پرسش‌ها، سود و فایده‌های بزرگی را نوید می‌داد. این خم‌ها نه تنها به این دلیل، بلکه به‌خاطر کاربردهای مستقیم، ویژگی‌هایشان و پتانسیل آنها برای بیان ایده‌های تازه در پژوهش‌های نظری، نظریه اعداد دانان را وسوسه می‌کرد.

یک خم شیمورای $X_\circ^D(\mathfrak{N}) = \Gamma_\circ^D(\mathfrak{N}) \setminus H$ عبارتست از خارج‌قسمت نیم‌صفحه‌ی بالایی H توسط گروه فوخسی حسابی [8] $\Gamma_\circ^D(\mathfrak{N}) \subset PSL_2(\mathbb{R})$.

اگر $\mathbb{Z}_F$ را حلقه‌ی اعداد صحیح در یک میدان کاملا حقیقی F در نظر بگیریم: $\Gamma_\circ^D(\mathfrak{N})$ توسط دو ایده‌آل نسبت به هم اول $\mathfrak{N}$ و D از $\mathbb{Z}_F$ مشخص می‌شود. هر خم شیمورای $X_\circ^D(\mathfrak{N})$ در تناظر با یک زیرگروه $\Gamma_\circ^D(\mathfrak{N})$ بدست آمده از یک F جبر چهارگانی است.

خم مدولار $X_\circ(N)_\mathbb{C} := \Gamma_\circ(N) \setminus H^*$ (H^* نیم صفحه‌ی بالایی کامل شده است) دارای یک مدل $X_\circ(N)_\mathbb{Q}$ روی $\mathbb{Q}$ است، [۲۵] به عبارتی به وسیله‌ی یک چند جمله‌ای با ضرایب در $\mathbb{Q}$ مشخص می‌شود. این خم یک فضای پیمانه ای[9] است به این مفهوم که نقاط خاصی از این خم به نام نقاط CM وجود دارندکه متناظر هستند با خم‌های بیضوی دارای ضرب مختلط [10]که از یک میدان موهومی درجه ۲ بدست می آید.

تصویر نقاط CM تحت J-تابع مدولار بیضوی به عنوان پیمانه تکین [11] شناخته شده‌اند. میتوان این مطلب را برای خم های شیمورا تعمیم داد که هر نقطه‌ی CM یک خم شیمورا متناظر با یک چندگونای آبلی است .

در این پایان نامه به محاسبه‌ی نقطه CM متناظر با یک توسیع موهومی درجه ۲ از F روی

[8] arithmetic Fuchsian group

[9] moduli space

[10] Complex Multiplication

[11] Singular Modulus

یک خم شیمورا می پردازیم .

فصل ۱

پیش‌نیازها

تعریف ۱.۰.۱ (جبر). فرض کنید K یک میدان و A فضایی برداری روی K با عمل دوتایی ضرب $\cdot : A \times A \to A$ باشد. A را یک جبر روی K گویند هرگاه در سه شرط زیر صدق کند

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z \qquad \forall x,y,z \in A$$ (پخش‌پذیری از راست)

$$x\cdot (y+z) = x\cdot z + y\cdot z \qquad \forall x,y,z \in A$$ (پخش‌پذیری از چپ)

$$(ax)\cdot(by) = (ab)(x\cdot y) \qquad \forall x,y \in A \;\; \forall a,b \in K$$

A را اغلب اوقات $K-$ جبر می‌نامند.

نکته ۲.۰.۱. هر جبر یک حلقه است.

مثال ۳.۰.۱. ماتریس های $n \times n$ روی F

مثال ۴.۰.۱. $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{Q}$

مثال ۵.۰.۱. جبرهای چهارگانی B روی $\mathbb{Q}$

قرار دهید $K' := \{k\cdot 1_A \ : \ k \in K\}$ ؛ از آنجایی که $K' \subseteq Z(A)$ ، اعضای K' مرکزی هستند.

تعریف ۶.۰.۱ (جبر مرکزی). K−جبر A را مرکزی گویند هرگاه $Z(A) = K'$.

تعریف ۷.۰.۱ (جبر ساده). K−جبر A را ساده گویند هرگاه به عنوان یک حلقه، هیچ ایده‌آل دوطرفه‌ی نابدیهی نداشته باشد.

در ادامه به بیان تعریف مکان [۱] می‌پردازیم.

K یک میدان اعداد [۲] (توسیع متناهی از $\mathbb{Q}$) در نظر گرفته شود. اگر r تعداد نشانندەهای حقیقی و $2s$ تعداد نشانندەهای مختلط K به توی $\mathbb{C}$ باشد ، داریم

$$[K : \mathbb{Q}] = r + 2s$$

مجموعه‌ی اول‌های بی‌پایان [۳] K را می‌توان برحسب نشانندەهای حقیقی و مختلط ناحقیقی بیان کرد. ازاین رو r تا بی‌پایان حقیقی و s تا بی‌پایان مختلط داریم؛ به عبارتی K ، $r + s$ تا اول بی پایان دارد.

مثال ۸.۰.۱. برای $\mathbb{Q}$ یک بی‌پایان حقیقی داریم وبرای هر گسترش درجه دوم حقیقی $\mathbb{Q}$ داریم

$$[K : \mathbb{Q}] = r + 2s = 2$$

اگر $r = 2$ و $s = 0$ پس ۲ بی‌پایان حقیقی داریم.

اگر $r = 0$ و $s = 1$ پس ۱ بی‌پایان مختلط داریم.

K را یک میدان و $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}_K$ را حلقه‌ی اعداد صحیح [۴] در میدان K در نظر بگیرید.

ایده‌آل اول $P \neq \infty$ از $\mathcal{O}_K$ را یک "مکان باپایان" [۵] از K گویند.

---

[۱] place

[۲] number field

[۳] infinite places

[۴] ring of integer

[۵] finite place

بی‌پایان‌های بیان شده در بالا را "مکان‌های بی‌پایان" [۶] از K گویند. در واقع مکان‌های باپایان K در تناظر دوسویی با ایده‌آل‌های اول $\mathcal{O}_K$ می‌باشند و هر مکان بی‌پایان در K یا حقیقی است که در تناظر با یک نشاننده‌ی $K \hookrightarrow \mathbb{R}$ است و یا مختلط است که در تناظر با جفت مجزایی از نشاننده‌های مزدوج مختلط $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ است.

چنانچه ν یک مکان باپایان باشد،

برای ν حقیقی داریم $\qquad K_\nu \cong \mathbb{R}$

برای ν مختلط داریم $\qquad K_\nu \cong \mathbb{C}$

تعریف ۹.۰.۱ (نرم). تابع نرم روی میدان K عبارت است از تابع

$$| \ \ | : K \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto |x|$$

به طوری که

$$(۱) \quad |x| > ۰ \quad \forall x \neq ۰ \ , \qquad |۰| = ۰$$

$$(۲) \quad |xy| = |x||y|$$

$$(۳) \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

نرم بالا را با سه ویژگی داده شده اقلیدسی [۷] گویند. چنانچه علاوه بر این ۳ ویژگی، شرط قوی‌تر

$$(۴) \quad |x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$$

[۶] infinite places

[۷] archimedean

را برای نرم داشته باشیم، نرم را نااقلیدسی [8] می‌نامند.

نکته ۱.۰.۱۰. :نرم بدیهی

$$| \; | : K \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a \longmapsto |a| = 1 \;\; , \;\forall a \in K^{\times}.$$

حال به بیان تعریف نرم $P-$ ادیک می‌پردازیم

تعریف ۱.۰.۱۱ (نرم $p-$ ادیک). K را یک میدان اعداد و $\mathcal{O}_K$ را حلقه‌ی اعداد صحیح K در نظر بگیرید. برای ایده‌آل اول p از $\mathcal{O}_K$، $\mathrm{N}p$ تعداد عناصر $\mathcal{O}_K/p$ تعریف می‌شود؛ نرم $p-$ ادیک $|\;|_p$ به‌صورت $|x|_p := (\mathrm{N}p)^{-a} \;\; \forall 0 \neq x \in K$ که a بزرگترین توان p در تجزیه‌ی $x\mathcal{O}_K$ می‌باشد تعریف می‌شود.

نکته ۱.۰.۱۲. $|0|_p := 0$

اگر $K = \mathbb{Q}$ آنگاه $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$ و داریم

$$|\frac{a}{b}|_p := |p^n \frac{a'}{b'}|_p = p^{-n} \;\; , \; (a', p) = (b', p) = 1$$

$$|\frac{a}{b}|_p = 1 \qquad\qquad p \nmid a, \; p \nmid b$$

نکته: نرم $p-$ ادیک، اقلیدسی می‌باشد.

در ادامه فهرستی کامل از نرم‌های روی $\mathbb{Q}$ از رده‌ی یکریختی داده می‌شود. نرم $|\;|_\infty$ روی $\mathbb{Q}$ همان قدرمطلق معمولی روی $\mathbb{R}$ است

$|\;|_\infty$ را نرمال‌شده [9] گویند.

قضیه ۱.۰.۱۳. (استروفسکی [10]): فرض کنید $|\;|$ نرمی نابدیهی روی $\mathbb{Q}$ باشد

[8] non-archimedean

[9] normalized

[10] Ostrowski

(a) اگر $|\ |$ اقلیدسی باشد آنگاه $|\ |$ هم‌ارز است با $|\ |_\infty$.

(b) اگر $|\ |$ نااقلیدسی باشد آنگاه $|\ |$ برای یک مکان p اول هم‌ارزاست با $|\ |_p$.

ر.ک.به [۱۸]

تعریف ۱۴.۰.۱ (میدان موضعی). میدان K با نرم نابدیهی $|\ |$ را یک میدان موضعی [۱۱] گویند هرگاه K موضعا فشرده باشد. (ازاین رو کامل خواهد بود.)

فضای نرم‌دار $(\mathbb{Q}, |\ |_p)$ کامل نیست. چنانچه حد دنباله‌های کوشی را به $\mathbb{Q}$ با این نرم جدید بیافزاییم فضایی کامل شده‌ای به دست می‌آید که با $\mathbb{Q}_p$ نمایش می‌دهند

$$\overline{(\mathbb{Q}, |\ |_p)} = (\mathbb{Q}_p, |\ |_p)$$

$\mathbb{Q}_p$ با نرم $p-$ ادیک مثالی از یک میدان موضعی است. اگر نرم را نرم اقلیدسی در نظر بگیریم، داریم

$$(\mathbb{Q}, |\ |_\infty) = (\mathbb{Q}, |\ |) \hookrightarrow \overline{(\mathbb{Q}, |\ |)} = (\mathbb{R}, |\ |)$$

۱.۰.۱ رده‌بندی میدان‌های موضعی

(۱) اگر K یک میدان موضعی اقلیدسی با مشخصه‌ی [۱۲] صفر باشد، K یکریخت با $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است و نرم آن هم‌ارز با قدرمطلق معمولی است.

(۲) اگر K یک میدان موضعی نااقلیدسی با مشخصه‌ی صفر باشد، K با یک توسیع متناهی از $\mathbb{Q}_p$ یکریخت است و نرم هم‌ارز با نرم $p-$ادیک است.

(۳) اگر K یک میدان موضعی نااقلیدسی با مشخصه‌ی $p \neq ۰$ باشد، K با میدان سری لوران معمولی $k((T))$ روی یک میدان باپایان k یکریخت است؛ که میدان $k((T))$ کامل‌شده‌ی $k(T)$ برای نرم تعریف شده توسط ایده‌آل $(T) \subset k[T]$ است.

---

[۱۱] Local field

[۱۲] characteristic