دانشگاه پیام نورمرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته فیزیک

دانشکده علوم پایه گروه علمی فیزیک

عنوان پایان نامه:

اعمال ناهمگنی در معادله سینوسی گوردون و بررسی پاسخهای آن

استاد راهنما

دکتر عبدالرسول قرائتی

استاد مشاور

دکتر محمد قناعتیان

نگارش

علیرضا رضایی

ماه و سال

بهمن ماه ۱۳۸۸

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه /رساله

پایان نامه تحت عنوان : اعمال ناهمگنی در معادله سینوسی گوردون و بررسی پاسخهای آن که توسط علیرضا رضایی در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد. تاریخ دفاع: ۱۳۸۸/۱۱/۲۰ نمره: ۸۰/ ۱۸ درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر عبدالرسول قرائتی جهرمی	استاد راهنما	دانشیار	
۲- دکتر محمد قناعتیان	استاد مشاور	استادیار	
۳- دکتر فاطمه فلاحتی	استاد داور	استادیار	
٤- دکتر الهام اسراری	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	

بس است تو را از عقل وخرد که راههای گمراهیت را از راههای رستگاریت به تو آشکار می سازد.

امام علی علیه السلام

تقدیم به

پدر و مادر گرامی و

همسر مهربانم

که در تمامی مراحل تحصیل به بنده حقیر لطف داشتند.

سپاسگزاری

سپاس خداوندی را که طاعتش موجب قربت است وبه شکر اندرش مزید نعمت.

الهی: عاجز و سرگردانم، نه آنچه دانم دارم، نه آنچه دارم دانم.

الهی: چون توانستم ندانستم و چون دانستم نتوانستم. آه از این علم نا آموخته، گاه در غرقم از او، گاه سوخته.

الهی: کار جز خم و تاب، هیچ ندارد، اما بپذیر که الف هیچ ندارد.

الهی: شغل آنجاست، کز تو خبرو عیش آنجاست کز تو نظر.

الهی: به فضل خویش مرا بنواز.

انجام این تحقیق و پژوهش را مدیون استاد اخلاق با اقیانوسی از دانش و علم جناب آقای دکتر عبدالرسول قرائتی هستم که در تمامی مراحل بهترین راهنما برای من بودند.

از زحمات جناب آقای دکترمحمد قناعتیان و سرکار خانم دکتر فلاحتی که در به ثمر رسیدن این پایان نامه مرا یاری کردند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان امیدوارم تمامی کسانی که به هر ترتیب در دوران تحصیل مرا یاری نمودند در سایه لطف خداوند سالم و موفق باشند.

چکیده

در این پایان نامه با اعمال نا همگنی در معادله سینوسی گوردون معمولی یک معادله سینوسی گوردون تعمیم یافته‌ی جدید را معرفی کرده و به بررسی پاسخهای آن می پردازیم. برای ایــن منظور هامیلتونی جدیدی را معرفی می کنیم که با استفاده از آن مــی تــوان معادلــه سینوســی گوردون تعمیم یافته را به دست آورد. درضمن نشان می دهیم که تحت یک تبدیل خاص می-توان از معادله سینوسی گوردون تعمیم یافته به معادله سینوسی گوردون معمولی رسید. سپس با روشی که توضیح داده خواهد شد انواع پاسخهای معادله سینوسی گوردون تعمیم یافتــه را به صورت تحلیلی به دست می آوریم و پاسخها را مورد بررسی قرار مــی دهــیم. در نهایــت پاسخهای معادله سینوسی گوردون تعمیم یافته را با پاسخهای معادله سینوسی گوردون معمولی مقایسه می کنیم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست شکلها وجدول

فصل اول

مقدمه‌ای بر فیزیک غیر خطی

۱-۱ مقدمه

شرح وتفسیرپدیده‌ها درطبیعت بااستفاده از فیزیک خطی کم و بیش تقریبی است. بسیاری از پدیده‌ها درطبیعت وجود دارد که آنها را نمی‌توان با فیزیک خطی تفسیر کرد. علت آن معادله‌ی دینامیکی غیرخطی حاکم برآن پدیده‌ها می‌باشد. بنابراین بسیاری از دانشمندان به این نتیجه رسیده‌اندکه یکی از بهترین راه‌های اساسی برای بررسی این گونه پدیده‌ها توجه به فیزیک غیر خطی است. هر چند حدود یک قرن از آغاز فیزیک غیرخطی می‌گذرد ولی تا این اواخر پیشرفت مهم و قابل ملاحظه‌ای نداشته است. می‌توان به دو دلیل عمده اشاره کرد، یکی محاسبات سخت ودشواردراین زمینه ودیگری، هم زمان شدن آن با مکانیک کوانتومی بوده است. از ابتدای این قرن با آغاز کوانتوم مکانیک فیزیکدانها به نتایج بسیار جالبی رسیده‌اند، هر چند علم غیرخطی تقریباً فراموش شده بود. درچند دهه‌ی گذشته رایانه ها وتکنیکهای محاسبات عددی پیشرفت قابل ملاحظه‌ای داشته‌اندو باعث شده دانشمندان اهمیت زیادی به علم غیرخطی بدهند و مقالات متعددی را به این موضوع اختصاص بدهند.

سالیتون که آن را با فیزیک خطی نمی‌توان تفسیر کرد و می‌بایست برای بررسی آن به فیزیک غیرخطی توجه کرد در این چند دهۀ گذشته بیشتر قابل توجه بوده است چون پاسخ‌های معادلات غیرخطی می‌باشند.

با توجه به مطالبی که دربالا اشاره شد دانشمندان متوجه شدند که باید برای بررسی و تغییر پدیده های موجود در طبیعت به فیزیک غیرخطی توجه کرد. در تلاش برای اینکه پدیده های فیزیکی مثل زلزله، آب و هوا، ناهنجاری های قلبی و دیگر پدید ه های شبیه به این را بهتر بفهمند، دانشمندان مدلهای ریاضی مفیدی رایافته اند،که تحول زمانی آنها خواص فیزیکی پدیده های طبیعی رانشان می دهند. این مدلها اغلب شامل معادلات دیفرانسیل با **n** متغیر وابسته هستند، که معمولاً توابعی از متغیر های مستقل **x**، **y**، **z** و **t** می باشند.

این مدل های ریاضی باید قادر به توجیه رفتار های منظم و نا منظم پدیده های فیزیکی باشند. در این میان دستگاهی با معادله دیفرانسیل معمولی باید بتواند حرکت های پایدار و ناپایدار را توصیف کند. در حالی که اگر بخواهیم اطلاعاتی در مورد پدیده های آشو بناک به دست

بیاوریم نیاز به یک معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی داریم که بتواند الگو های فضا – زمانی را توصیف کند. دراین پایان نامه که هدف ما تعمیم دادن معادله‌ی سینوسی گودون[1] و بررسی پاسخهای آن می‌باشد، در فصل اول مطالبی راجع به فیزیک غیر خطی خواهیم گفت. در فصل دوم به امواج منفرد و سالیتونها می پردازیم. در فصل سوم معادله‌ی سینوسی گوردون و کاربردهای آن را بیان می‌کنیم. در فصل چهارم به معادله‌ی سینوسی گوردون تعمیم یافته و بررسی پاسخهای آن می‌پردازیم.[۱]

۱–۲ تاریخچه

نظریه معادلات دیفرانسیل از ابتدا توسط نیوتن و لایبنیتز[2] در قرن هفدهم پدید آمد. بعد از نیوتن برادران برنولی با استفاده از معادلات دیفرانسیل وانتگرال توانستند بسیاری از مسائل مکانیک را به صورت معادله دیفرانسیل بیان کرده و حل کنند.

در اواخر قرن هفدهم دانشمندان توانستندبخش وسیعی از معادلات دیفرانسیل معمولی را حل کنند و بعد به حل معادلات با مشتقات جزئی پرداختند. توسعه معادلات دیفرانسیل، انتگرال و کاربرد های آن در قرن هجدهم بیش از دیگران توسط اویلر[3] انجام شد. از سال ۱۹۶۰ پس از یافته های جالب توجه، مطالعه دینامیک غیرخطی به یکی از زمینه های تحقیقاتی فعال تبدیل شده ومنجر به مفاهیمی همچون سالیتون ، انتگرال پذیری وآشوب شد.

برای شناخت سیستم های غیر خطی در سطوح مختلف روش های جدیدی ارائه شده و در کنار آنها کاربردهای متنوعی از دینامیک غیرخطی بیان شده است. مطالعه و بحث در زمینه‌ی دینامیک غیرخطی به سه یا چهار دهه‌ی اخیر مربوط می شود. به عنوان مثال می توان به تعدادی از آنها اشاره کرد: الف) مشاهده‌ی امواج منفرد توسط جان اسکات –راسل[4] و خواص پایداری قابل ملاحظه‌ی آن در سال ۱۸۳۷، ب) طبقه بندی معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی توسط پین لیو[5]و همکارانش، ج) آنالیز پوانکاره[6] وابسته به شرایط اولیه سیستم های غیر خطی، د) نظریه‌ی میدان غیرخطی انشتین در ساختار ماده، چند مورد از آنها می باشند.[۱]

1- Sine-Gordon Equation
2-G. W Leibnitz
3-Euler
4- John Scott-Russels
5-Painleve
6-Poincare

تلاش هایی که برای توجیه نتایج دور از انتظار آزمایش های انریکوفرمی[7]، جان پاستا[8]واستن الم[9] (FPU) انجام گرفت وبا تحلیل سیستم های غیرخطی دیده شده، در نهایت منجر به بیان سالیتون ها درسال ۱۹٦۰ گردید. آزمایش های عددی زابوسکی[10] و کاراسکووال[11] روی شرایط برخورد امواج منفرد معادلات گورتوگ – دی وریس[12]، منجر به مفهوم سالیتون ها و پیشرفت بیشتر روش تبدیل پراکندگی معکوس گردید. تجزیه و تحلیل هنون – هیلس[13] از سیستمهای هامیلتونی غیر خطی دو بعدی، بررسی های راه گشای لورنتز[14] روی یک نسخه ساده شده از دینامیک جوی، در نهایت منجر به مفاهیم وابستگی بسیار حساس دینامیک روی بی نظمی و شرایط اولیه گردید.[۳]

درطول سال ۱۹۷۰ تحقیق روی جنبه های مختلف سیستم های آشفته و انتگرال پذیر، که رشد بسیارخوبی داشته و منجر به پیشرفت زیادی در دینامیک غیرخطی گردیده است.[٤]

این مطالعات باعث پیشرفت قابل ملاحظه‌ای در شناخت ما از سیستم های غیرخطی، هم از دیدگاه ریاضی و هم از دیدگاه فیزیکی و نیز شناختن کار برد های‌آنها شده است که به بعضی از آنها اشاره می‌کنیم: شناسایی و تعیین ویژگی های سیستم های دینامیکی غیرخطی انتگرال پذیروساختارپاسخهایشان، نظریه‌ی ریاضی سالیتون ها در(۱+۱) بعدوتعمیم آنها به (۱+۲) بعد، سیستم‌های انتگرال پذیرکوانتومی و کاربرد به سمت فناوری واقعی در جهان مثل مخابرات و.... [۲]

فرآینده های فیزیکی غیرخطی که به طور پیوسته در فضا تغییرمی‌کنند مانند پدیده های موجی که اغلب با استفاده از معالات دیفرانسیل جزئی غیرخطی توضیح داده می شوند. این معادلات سابقه بسیار طولانی دارند که به روز های ابتدایی حساب دیفرانسیل برمی گردد. به عنوان مثال معادلات پایه‌ای دینامیک سیالات مانند معادلات اویلر، معادله ناویر– استوکس و ... نمونه هایی ازمعادلات دیفرانسیل غیرخطی هستند.[٤]

1-Enrico Ferm
2-John Posta
3-Stan Ulam
4-Zabusky
5-karusk
6- Korteweg-de Vries
7- Henon-Heiles
8-Lorenz

در حال حاضر معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی زیادی برای توضیح پدیده های فیزیکی شناسایی شده است که برخی از آنها عبارتند از، معادله کورتوگ- دی وریس که به توضیح پدیده اسکات-راسل می پردازد؛ معادله سینوسی گوردون و معادله غیر خطی شرودینگر که هر کدام از

این معادلات دارای سابقه جالب و پاسخی با ویژگی خاص خود و کاربرد هایی می باشند که در فصل های بعدی با جزئیات بیشتر بررسی خواهند شد.

این معادلات را می توان بیشتر بر اساس انتگرال پذیری وانتگرال ناپذیری، پاشنده و غیر پاشنده بودن تقسیم بندی نمود.

بررسی انتگرال پذیری معادلات غیرخطی و اثبات اینکه آیا پاسخهای سالیتونی دارند یا خیر، غالباً بسیار مشکل می باشد. گرچه شبیه سازی های عددی کمک بسیار زیادی در نشان دادن رفتار سالیتون ها هنگام برخورد با دیگر سالیتون ها می کند، اما به علت وجود خطاهای اجتناب ناپذیردرروش های عددی، نمی توان از آن به عنوان یک روش دقیق برای بررسی انتگرال پذیری بهره برد.

توسعه انتگرال پذیری بیشتر به علت پیشرفت قابل ملاحظه‌ای درزمینه گروه خاصی از معادلات دیفرانسیل جزئی‌غیرخطی است که به معادلات تحول مشهور هستند. این معادلات دارای نوعی خاص از پاسخهای اولیه هستند که به صورت پاسخهای جایگزیده می باشند. شکل آنها حتی بعد ازبرخورد نیزثابت می‌ماندو شبیه ذرات عمل می کنند که به این پاسخهای جایگزیده سالیتون گفته می شود. در سال ۱۹٦۵ زاباسکی و کاراسکووال معادله**KdV** را به طور عددی به عنوان مدلی برای شبکه غیر خطی حل کردند. آنها به خاصیت غیر منتظره‌ای دست پیدا کردند، این امواج پالسی، اغلب به طور مستقل با سرعت های ثابت حرکت می کنندکه از میان یکدیگر بعد از برخورد، عبورمی کنند. تحلیل مفصل ترنشان می‌دهد که بعضی پالسها یک موج منفردبه شکل $\sec h^2$ می باشد. از آنجا که امواج منفرد مثل ذرات رفتار می کنند نام این امواج را سالیتون گذاشتند.[۳]

۱-۳ پدیده‌های خطی

در این بخش به بعضی از خصوصیات و رفتار سیستمهای خطی اشاره کنیم.

تعریف سیستم خطی s: وقتی M سیگنال مکان موجود باشد سیستم s خطی است، اگر برای تمام u,v ها که $u,v \in M$ و $\alpha \in R$ داشته باشیم:

(۱-۱) همگنی $$s(\alpha u) = \alpha s(u).$$

(۱-۲) جمع پذیری $$s(u+v) = s(u) + s(v).$$

به عبارت دیگر سیستم خطی از اصل بر هم نهی[۱۵]پیروی می‌کند. باتوجه به تعریف یک سیستم خطی می توان معادلات دیفرانسیل را نیز به صورت زیر تقسیم بندی کرد.معادله دیفرانسیل

(۱-۳) $$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

را خطی می گویند، هرگاه f تابعی خطی از متغییرهای $y^{(n)},\ldots,y',y$ باشد.

بدین ترتیب می توان گفت شکل کلی معادله دیفرانسیل خطی معمولی از مرتبه n به صورت زیر است

(۱-٤) $$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x).$$

شکل ۱- ۱ الف یک ورودی سیستم خطی را نشان می‌دهد. شکل۱-۱ب نمایش پاسخ یک سیستم خطی به سیگنالهای ورودی مذکور رانشان می دهد.

(الف) (ب)

شکل ۱-۱ (الف) سیگنالهای ورودی و(ب) سیگنالهای خروجی درسیستم خطی.

فیزیک پدیده‌ها در طبیعت بیشترغیرخطی هستند و حل معادلات غیرخطی آنها بسیار مشکل است. از جمله آب و هوا و زلزله و مشکلات قلبی باعث شد دانشمندان مدلهای ریاضی با تحول زمانی که نشان دهنده‌ی خواص فیزیکی این پدیده‌ها می‌باشد را کشف کنند. یک سیستم

1-Superposition principle

خطی یا غیر خطی، معادله دیفرانسیل حاکم بر آن خطی یا غیرخطی‌می باشد. یک مثال ساده از سیستم خطی وغیر خطی، دکمه‌های صفحه ماشین حساب است. کلید جمع، خطی وکلید سینوس ولگاریتم غیرخطی هستند.

۱-٤ پدیده‌های غیرخطی

برای آشنایی با پدیده‌های غیرخطی ابتدا مطالبی راجع به سیستمهای غیر خطی بیان می‌کنیم.

از نظر خصوصیات ریاضی، غیرخطی‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- غیر خطی پیوسته که قابلیت خطی شدن را دارند.

۲- غیر خطی ناپیوسته که قابلیت خطی شدن ندارند.

غیر خطی‌ها از نظر رابطه‌ی ورودی و خروجی نیز به دو دسته تقسیم می‌شوند.

۱- غیر خطی استاتیک، یعنی خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه بستگی داردکه با تابعی غیرخطی از ورودی بیان می‌شود.

$$y = f(u). \tag{۱-۵}$$

۲- غیر خطی دینامیکی، یعنی خروجی در هر لحظه به ورودیهای لحظه‌های قبل نیز بستگی داردکه با تابعی غیرخطی از ورودی، خروجی و مشتقات آنها بیان می‌شود.[۵]

معادله

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}) = 0, \tag{۱-٦}$$

یک معادله دیفرانسیل خطی است، وقتی که توان $y, y', y'', \ldots$، صفریا یک باشد. در غیر این صورت معادله غیرخطی می باشد.

در شکل۱-۲ الف ورودی یک سیستم غیرخطی رانشان می دهد. شکل۱-۲ب نمایش پاسخ یک سیستم غیرخطی به سیگنالهای ورودی مذکور می باشد.

(الف) (ب)

شکل ۱-۲ (الف) سیگنالهای ورودی و(ب) سیگنالهای خروجی درسیستم غیر خطی.

یک سیگنال ورودی درسیستم خطی فقط دامنه را تغییر می‌دهد.در صورتی که یک سیگنال ورودی درسیستم غیر خطی دامنه و مقدار فرکانس را تغییر می دهد. یعنی فرکانسهای 2ω و 3ω و....را تولید می‌کند. یکی از مشخصات بسیار مهم پاسخهای معادله دیفرانسیل غیر خطی‌این است که از اصل انطباق(اصل بر هم نهی) پیروی نمی‌کند. یعنی اینکه اگر y_2, y_1 پاسخهای معادله‌ی دیفرانسل غیر خطی باشند، درحالت کلی $y_1 + y_2$ پاسخ معادله دیفرانسیل غیر خطی نیست.

۱-۵ مفهوم فیزیکی انتگرال پذیری

به دستگاههای که با گذشت زمان دچار تحول می‌شوند، دستگاههای دینامیکی می‌گویند. با توجه به معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر دستگاههای دینامیکی، آنها را به دودسته‌ی دستگاههای دینامیکی خطی و غیرخطی تقسیم می‌کنند.
دستگاههایی‌که معادله‌ی دیفرانسیل حاکم برآنها خطی باشد،یعنی اگر y_2, y_1 جواب دستگاه خطی باشدآنگاه $y_1 + y_2$ نیزجواب‌آن دستگاه خواهد بود.خصوصیت دیگردستگاههای خطی این است که می‌توان آنها را به اجزای کوچکتر تقسیم کرد وبعد از بدست آمدن نتایج، آنها را با هم جمع کرد و بررسیهای لازم را انجام دهیم، مثل آنالیز فوریه و ... .
دستگاههای که معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر آنها غیرخطی باشد، از اصل بر هم نهی پیروی نمی کنند. همچنین نمی توان آنها را به اجزاء کوچکتر تقسیم کرد. باید برای حل شان بطور کامل آنها را در نظر گرفت.[٦]

دستگاههای دینامیکی غیرخطی را می‌توان به دوبخش انتگرال پذیروانتگرال ناپذیر تقسیم کرد. دستگاههای انتگرال پذیرمی توانند شامل پاسخهای سالیتونی باشند و دستگاههای انتگرال ناپذیر شامل پاسخهای آشوبناک می باشند. برای اینکه بتوان مفهوم فیزیکی انتگرال پذیری را درک کرد لازم است به بررسی دستگاههای فیزیکی با درجات آزادی محدود و نامحدود پرداخت.[۷]

در حالت کلی با مشخص شدن یک ثابت حرکت از دستگاهی با N درجه آزادی، دستگاه از قیدیک بعد رها می‌شود. اگر دو ثابت حرکت مشخص شود از قید دو بعد، و به همین ترکیب به ازاء هر ثابت حرکت، دستگاه یک درجه آزادی از دست می‌دهد ومسیر دستگاه در فضای فاز محدود می‌شود. اگر دستگاهی شامل N ثابت حرکت مستقل باشد در فضای فاز مسیر کاملاً مشخصی دارد که به صورت منحنی می باشد. به این دستگاهها، انتگرال پذیرمی گویند. برای دستگاهی که کمتر از N ثابت حرکت دارد، به علت قرار گرفتن در ناحیه‌ای از فضای فاز، که در آن ناحیه نمی‌توان مسیرمشخصی برای آن تعیین کرد، دستگاه را انتگرال ناپذیر می‌گویند.

اگر دستگاه با درجات آزادی محدود باشد پیدا کردن ثابت حرکت و در نتیجه مشخص کردن مسیر حرکت راحت می‌باشد. اگر دستگاه با درجات آزادی نامحدود وپیوسته باشد، پیدا کردن بی‌نهایت ثابت حرکت کار بسیار مشکلی است. در صورتی که اگر پاسخ معادله‌ی حاکم بر چنین دستگاههایی به صورت سالیتون باشد، به این معناست که بی‌نهایت ثابت حرکت مستقل وجود دارد و دستگاه انتگرال پذیر است. از آنجا که در مکانیک کوانتومی مفهومی بنام مسیر حرکت وجود ندارد، از دیدگاه کوانتومی مفهوم انتگرال پذیری بسیار پیچیده‌تر از مکانیک کلاسیک است. سطوح انرژی دستگاههای انتگرال پذیر کوانتومی دارای طیف منظمی می‌باشد. از آنجا که می‌خواهیم انتگرال پذیری را از دید کلاسیکی مورد استفاده قرار دهیم، لازم است به چند مفهوم اساسی بپردازیم:

الف) فضای فاز

فضایی که نقاط آن با مولفه‌های مکان q_i و اندازه حرکت آن با p_i مشخص می‌شود.

ب) کمیتهای پواسنی

کمیتهای دینامیکی $f_1(q,p), f_2(q,p),\ldots f_N(q,p)$ پواسنی هستند، هرگاه کروشه پواسون هر جفت از آنها صفر شود. [۸]

با درنظر گرفتن کروشه پواسون به صورت زیر،

$$\left\{F(p,q),G(p,q)\right\}=\sum_{j=i}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial G}{\partial q_j}-\frac{\partial F}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial G}{\partial p_j}\right), \qquad (۷-۱)$$

خواهیم داشت:

$$\left\{f_i(q,p), f_k(q,p)\right\}=0 \qquad i,k=1,2,\ldots,N, \qquad (۸-۱)$$

ودر فضای فاز داریم:

$$\begin{aligned}\{p_i,p_j\}&=\{q_i,q_j\}=0\\ \{q_i,p_j\}&=\delta_{i,j}.\end{aligned} \qquad (۹-۱)$$

ج) ثابتهای حرکت

اگر کمیتهای موجود در یک دستگاه فیزیکی با گذشت زمان تغییر نکند به آنها ثابتهای حرکت می‌گویند. ثابت ماندن آنها باعث می‌شود دستگاه در مناطق محدودی از فضای فاز محصور شوند. پس هر چه تعداد ثابتهای حرکت بیشترباشد، دستگاه محدودتر خواهد بود.

۱-۶ دستگاههای با درجات آزادی محدود

یک دستگاه فیزیکی با N درجه آزادی وهامیلتونی H، بامتغیرهای دینامیکی p_i, q_i، را در فضای فاز در نظر می‌گیریم. تحول زمانی آن به صورت زیر می‌باشد. [۸]

$$\begin{aligned}\dot{p}_i&=\{p_i,H\}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i=1,2,\ldots,N.\\ \dot{q}_i&=\{q_i,H\}=\frac{\partial H}{\partial p_i}.\end{aligned} \qquad (۱۰-۱)$$

از آنجا که f_i مستقل از زمان است، اگر ثابت حرکت باشد داریم:

$$\frac{df_i}{dt} = 0.$$
$$\frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial t}. \tag{۱-۱۱}$$

وبا استفاده از معادلات (۱-۷) و (۱-۱۰) داریم

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} = \{f, H\} = 0. \tag{۱-۱۲}$$

اگر شرایط اولیه $p_i(0) = p_{0i}, q_i(0) = q_{0i}$ را برای دستگاه در لحظه t=0 داشته باشیم با حل معادلات بالا می‌توان $p_i(t), q_i(t)$ را به دست آورد

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(p_0, q_0, t) \\ q_i &= q_i(p_0, q_0, t) \end{aligned} \tag{۱-۱۳}$$

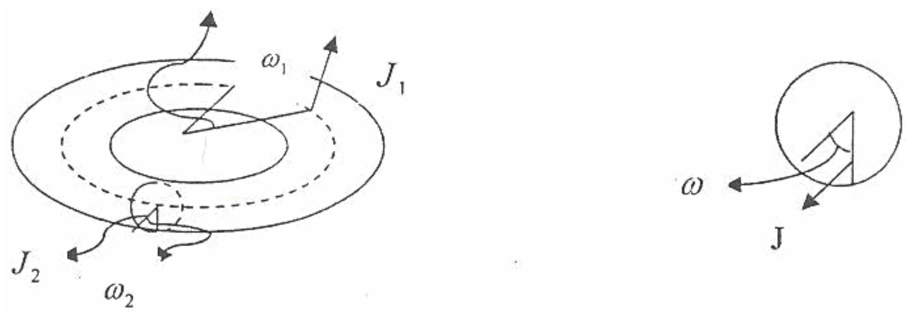
از آنجا که این معادلات از $2N$ کمیت p_{0i}, q_{0i} تشکیل شده است و در طول مسیر نیز ثابت هستند، اگر زمان t را از بین آنها حذف کنیم تعداد معادلات به $2N-1$ تابع کاسته می‌شود. می‌توان این طور گفت که هر دستگاه فیزیکی با N درجه آزادی حداکثر دارای $2N-1$ ثابت حرکت است. برای اینکه مسیر فضای فاز را کاملا مشخص کنیم باید به هر کدام از این ثابتهای حرکت یک مقدار عددی نسبت بدهیم. در صورتی که با استفاده از تبدیلات کانونیک، دستگاه را با مختصات جدید (Q,P) بیان کنیم آنگاه می‌توان دستگاه مختصاتی یافت که در آن همه‌ی مختصات به صورت دوره‌ای (قابل اغماض) در آیند. یعنی اینکه هامیلتونی و لاگرانژی دستگاه به طور صریح به آنها وابسته نباشد. در این حالت اندازه حرکت تعمیم یافته‌ی مربوط به این مختصات، ثابت حرکت است. در اکثر موارد اندازه حرکت تعمیم یافته P را متغیر عمل J و Qرا زاویه ω می‌نامند.

در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} \dot{P}_k &= -\frac{\partial H}{\partial Q_k} = 0 \Rightarrow P_k = J_k = const \qquad k = 1,2,\ldots,N. \\ \dot{Q}_k &= \frac{\partial J}{\partial P_i} = v_k \Rightarrow Q_k = \omega_k = v_k t + \beta_k \Rightarrow H = H(P_1, P_2, \ldots, P_N) = H(J_1, J_2, \ldots, J_N). \end{aligned} \tag{۱-۱٤}$$

که در آن v_k تابعی از J_K است. بنابراین نسبت به زمان ثابت می‌باشند. β_k نیز ثابت انتگرال گیری است که با استفاده از شرایط اولیه تعیین می‌شود. به این ترتیب P_k که ثابت می باشد و Q_k نیز از طریق انتگرال‌گیری به دست می‌آیند. در نتیجه می‌توان حرکت دستگاه را مشخص کرد.

فضای فاز چنین دستگاههایی را می‌توان روی سطح چنبره‌ای N بعدی نشان داد. که دارای N شعاع عمل ثابت و N زاویه ω می‌باشند. برای مثال در مورد $N=1$ ، این فضا به صورت محیط دایره‌ای به شعاع J_1 است و در حالت $N=2$ به صورت یک سطح چنبره‌ای در فضای سه بعدی است. شکل ۱-۳ مشاهده‌کنید



(ب) (الف)

شکل ۱-۳ فضای فاز دو دستگاه فیزیکی با درجات آزادی (الف) **N=1** و (ب.) **N=2**

با توجه به تحول زمانی دستگاه، یک مسیر در فضای فاز ایجاد می‌شود که این مسیر را می‌توان محل برخورد $2N-1$ ابررویه دانست. که هر کدام معرف یک ثابت حرکت هستند. اگر از $2N-1$ ثابت حرکت دستگاهی با N درجه آزادی، N ثابت حرکت مستقل آن پواسنی باشند آن دستگاه انتگرال پذیر است.

۱-۷ دستگاهها با درجات آزادی نامحدود

از آنجا که به ازای هر درجه آزادی باید یک ثابت حرکت وجود داشته باشد، وقتی N درجه آزادی داشته باشیم باید N ثابت حرکت وجود داشته باشد تا دستگاه انتگرال پذیر باشد. در این گروه از دستگاهها بی‌نهایت درجه آزادی وجود دارد لذا باید بینهایت ثابت حرکت وجود داشته باشدکه می‌توان انتگرال پذیری آنها را بررسی کرد. در این حالت می‌توان مسئله انتگرال پذیری را از بعد دیگری بررسی کرد.

معادله موج زیر را در نظر بگیرید:

$$u_t + cu_x = 0, \qquad (۱-۱۵)$$

این یک معادله خطی است که پاسخ آن به صورت زیراست