چکیده

در این پایان‌نامه رده‌ای از نگاشت‌های غیرخطی موسوم به نگاشت‌های افزاینده و قویاً افزاینده مورد بررسی قرار می‌گیرند. با توجه به ارتباطی که بین نگاشت‌های افزاینده و نگاشت‌های غیرانبساطی وجود دارد، قضایای ثابت شده در زمینه وجود و تقریب نقطه ثابت برای نگاشت‌های غیرانبساطی را می‌توان به نحوی در مورد وجود و تقریب صفر نگاشت‌های افزاینده به کار برد. با این حال، ما در این‌جا یک قضیه وجودی صفر برای نگاشت‌های افزاینده و قویاً افزاینده را به طور مستقل از نگاشت‌های غیرانبساطی بیان می‌کنیم. همچنین تحت شرایطی صفر مشترک را برای خانواده‌ای نامتناهی شمارا از نگاشت‌های m—افزاینده، به روش تکرار هالپرن تقریب می‌زنیم و همگرایی روش تکرار پیکارد را برای تقریب صفر یک نگاشت لیپشیتز و قویاً افزاینده، اثبات می‌کنیم.

بحث مهمی که همواره با نگاشت‌های افزاینده مطرح بوده است، بررسی معادله تحولی

$$u'(t) + Au(t) = \circ \ , \qquad u(\circ) = x,$$

از نقطه نظر وجود و یکتایی جواب می‌باشد که در آن E یک فضای باناخ، $A : D \subseteq E \longrightarrow E$ یک عملگر افزاینده و $x \in D$ عنصری ثابت می‌باشد. سرانجام شرایط وجود جواب را برای یک صورت کلی‌تر از معادله تحولی بیان می‌کنیم و در نهایت به کاربرد این قضایا در زمینه وجود و تقریب نقطه ثابت برای نگاشت‌های شبه انقباضی و قویاً شبه انقباضی خواهیم پرداخت.

فهرست

عنوان **صفحه**

فهرست نمادها

میدان اعداد حقیقی به انضمام $\{+\infty\}$	$\tilde{\mathbb{R}}$
زیر مشتق تابع f	∂f
نقاط درونی D	$IntD$
دامنه مؤثر تابع f	$D(f)$
فضای برداری نرمدار	E
فضای دوگان E	E^*
مجموعه نقاط ثابت تابع T	$Fix(T)$
مجموعه صفر تابع T	$N(T)$
مقدار تابع f در نقطه x	$\langle x, f \rangle$
نگاشت دوگانی نرمال شده	J
معادله با مقدار اولیه	IVP
همگرایی قوی	$\rightarrow$
همگرایی ضعیف *	$\rightharpoonup^*$
مجموعه توابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته	$C^۱$
فاصله x از مجموعه D	$d(x, D)$

پیش‌گفتار

فرض کنید E یک فضای برداری نرمدار حقیقی باشد، عملگر $A : D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ را افزاینده[۱] نامند هرگاه برای هر $x, y \in D(A)$ و هر $\lambda > 0$ داشته باشیم

$$\| x - y \| \leq \| x - y + \lambda(Ax - Ay) \| .$$

علاوه بر این اگر برای هر $\lambda > 0$ ، برد عملگر $I + \lambda A$ برابر E باشد، آن‌گاه A را m—افزاینده[۲] می‌نامند.(منظور از $D(A)$ و I به ترتیب دامنه عملگر A و عملگر همانی می‌باشد.) رده نگاشت‌های غیرخطی افزاینده و m—افزاینده، در سال ۱۹۶۷ توسط براودر[۳] و کاتو[۴] معرفی شدند. مسئله‌ی مهمی که در مورد این نگاشت‌ها مطرح است، وجود و تقریب صفر برای آن‌ها می‌باشد.
فرض کنید E یک فضای برداری نرمدار حقیقی باشد، عملگر $A : D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ را قویاً افزاینده[۵] نامند هرگاه $k \in (0, 1)$ای موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in D(A)$ و هر $\lambda > 0$ داشته باشیم

$$\| x - y \| \leq \| x - y + \lambda[(A - kI)x - (A - kI)y] \| .$$

در این پایان‌نامه علاوه بر بررسی عملگرهای افزاینده، نگاشت‌های قویاً افزاینده، از نقطه نظر وجود و تقریب صفر نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرند.
بحث مهمی که همیشه با نگاشت‌های افزاینده مطرح بوده است، بررسی معادله دیفرانسیل با مقدار اولیه

$$u'(t) + Au(t) = 0 , \qquad u(0) = u_0, \tag{۱}$$

[۱] accretive
[۲] m-accretive
[۳] Browder
[۴] Kato
[۵] strongly accretive

می‌باشد که در آن A عملگری افزاینده، $u_\circ \in D(A)$ و $u : [\circ, +\infty) \longrightarrow D(A)$ تابع مجهول می‌باشد. به وضوح دیده می‌شود که عملگر A دارای صفری در $D(A)$ است اگر و تنها اگر معادله (۱) دارای جوابی ثابت (مستقل از t) باشد. معادله (۱) در حالت کلی، به معادله تحولی[۶] معروف است و بسیاری از مسائل فیزیکی توسط این نوع معادلات مدل‌سازی می‌شوند.

همچنین نگاشت‌های افزاینده در نظریه نقطه ثابت از جهت ارتباط با رده نگاشت‌های شبه انقباضی حائز اهمیت‌اند. فرض کنید E یک فضای برداری نرمدار حقیقی باشد، عملگر $U : D(U) \subseteq E \longrightarrow E$ را قویاً شبه انقباضی[۷] نامند اگر $t > ۱$ای موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in D(U)$ و هر $\lambda > \circ$ داشته باشیم

$$\| x - y \| \leq \| (۱ + \lambda)(x - y) - \lambda t(Ux - Uy) \| .$$

در حالت $t = ۱$ ، U را شبه انقباضی[۸] می‌نامند.

در فصل اول ملاحظه خواهیم کرد که عملگر U شبه انقباضی (قویاً شبه انقباضی) است اگر و تنها اگر $A = I - U$ افزاینده (قویاً افزاینده) باشد، یا به عبارت دیگر x نقطه ثابتی برای عملگر شبه انقباضی (قویاً شبه انقباضی) U است اگر و تنها اگر x صفری برای عملگر افزاینده (قویاً افزاینده) $A = I - U$ باشد.

از دیدگاه دیگر عملگرهای افزاینده ارتباط بسیار نزدیکی با رده مهمی از نگاشت‌های غیرخطی به نام نگاشت‌های غیرانبساطی[۹] دارند. فرض کنید E یک فضای برداری نرمدار حقیقی و $C \subseteq E$ باشد. نگاشت $T : C \longrightarrow E$ را غیرانبساطی نامند هرگاه برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم

$$\| Tx - Ty \| \leq \| x - y \| .$$

مجموعه‌های $F(T) = \{x \in D(T); Tx = x\}$ و $N(T) = \{x \in D(T); Tx = \circ\}$ را به ترتیب مجموعه صفر و مجموعه نقاط ثابت نگاشت T تعریف می‌کنیم.

فرض کنید A عملگری افزاینده باشد، بنا به تعریف افزایندگی، $I + \lambda A$ ، برای هر $\lambda > \circ$ ، یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. اگر $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-۱}$ و $x, y \in D(J_\lambda) = R(I + \lambda A)$ باشد، آن‌گاه $x_\circ, y_\circ \in D(A)$ای وجود دارند به‌طوری‌که $y = (I + \lambda A)y_\circ, x = (I + \lambda A)x_\circ$. از طرفی از افزاینده بودن A به دست می‌آید

$$\| (I + \lambda A)^{-۱} x - (I + \lambda A)^{-۱} y \| \quad = \quad \| x_\circ - y_\circ \| \leq \| x_\circ - y_\circ + \lambda(Ax_\circ - Ay_\circ) \|$$

[۶] evolution equation
[۷] strongly pseudo-contractive
[۸] pseudo-contractive
[۹] nonexpansive

$$= \ \| (I+\lambda A)x_\circ - (I+\lambda A)y_\circ \| = \| x-y \| .$$

به عبارت دیگر J_λ غیرانبساطی است. به همین صورت ملاحظه خواهیم کرد که اگر برای هر $\lambda > \circ$، نگاشت J_λ غیرانبساطی باشد، آن‌گاه A عملگری افزاینده است و همچنین $F(J_\lambda) = N(A)$.
با توجه به ارتباط مذکور می‌توان قضیه‌های ثابت شده در زمینه وجود نقطه ثابت برای نگاشت‌های غیرانبساطی را به نوعی برای صفر نگاشت‌های افزاینده نیز به کار برد که می‌توان به نمونه‌هایی از این قضیه‌ها در منابع [۳, ۴, ۱۲, ۱۷] اشاره کرد.
بخش دیگری از قضیه‌های نقطه ثابت نگاشت‌های غیرانبساطی، مربوط به تقریب این نقاط ثابت می‌باشد که نمونه‌هایی از آن‌ها در منابع [۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۸, ۲۲, ۲۳] یافت می‌شود.
کرک در سال ۱۹۷۱ برای تقریب نقطه ثابت یک خود نگاشت غیرانبساطی که روی زیرمجموعه محدبی از یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب[۱۰] تعریف شده است، دنباله تکرار

$$x_{n+1} = \alpha_\circ x_n + \alpha_1 T x_n + \alpha_2 T^2 x_n + \cdots + \alpha_r T^r x_n \ , \quad n \geq \circ,$$

را که درآن $\alpha_i \geq \circ, \alpha_\circ > \circ, \sum_{i=\circ}^{r} \alpha_i = 1$ می‌باشد، معرفی کرد.
فرض کنید E یک فضای باناخ، $C \subseteq E$ و $(i = 1, 2, \ldots, k), T_i : C \longrightarrow C$ یک خانواده متناهی از نگاشت‌های غیرانبساطی باشد، می‌گوییم خانواده $\{T_i\}_{i=1}^{k}$ که دارای مجموعه نقاط ثابت مشترک $F = \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ می‌باشد، در شرط A صدق می‌کند، هرگاه تابع غیرنزولی $\emptyset : [\circ, +\infty) \longrightarrow [\circ, +\infty)$ موجود باشد به‌طوری‌که $\emptyset(\circ) = \circ$ و به ازای هر $\epsilon \in (\circ, +\infty)$ ، $\emptyset(\epsilon) > \circ$ و همچنین برای هر $x \in C$ داشته باشیم $\| x - Sx \| \geq \emptyset(d(x, F))$ که $d(x, F) = \inf\{\| x - z \|; z \in F\}$ و نگاشت S به صورت

$$S = \alpha_\circ I + \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \cdots + \alpha_k T_k,$$

می‌باشد که در آن $\alpha_i \geq \circ, \alpha_\circ, \alpha_1 > \circ, \sum_{i=\circ}^{k} \alpha_i = 1$.
در سال ۲۰۰۰ ، لیو و همکارانش[۱۱] نشان دادند که اگر C یک زیرمجموعه ناتهی، محدب، بسته و کراندار از فضای باناخ حقیقی E باشد و خانواده نگاشت‌های غیرانبساطی $\{T_i\}_{i=1}^{k}$ در شرط A صدق کند، آن‌گاه دنباله $\{x_n\}_{n \geq 1}$ حاصل از روش تکرار پیکارد

$$x_{n+1} = Sx_n \ , \qquad n \geq \circ, \qquad (۲)$$

[۱۰] uniformly convex
[۱۱] Liu et al

با نقطه آغازی دلخواه $x_\circ \in C$ ، به نقطه ثابت مشترک $\{T_i\}_{i=1}^{k}$ها همگراست.

اولین بار هالپرن[۱۲] در سال ۱۹۶۷ ثابت کرد که اگر C یک زیرمجموعه بسته و محدب از یک فضای هیلبرت و $T : C \longrightarrow C$ یک نگاشت غیرانبساطی با $F(T) \neq \emptyset$ باشد، آن‌گاه دنباله‌ی حاصل از روش تکرار

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) T x_n \ , \qquad n \geq \circ,$$

با $u \in C$ ثابت و $x_\circ \in C$ دلخواه، تحت شرایطی روی دنباله‌ی $\{\alpha_n\} \subset [\circ, 1]$ به نقطه ثابت T همگراست. خو[۱۳] در سال ۲۰۰۲ ، همگرایی روش تکرار هالپرن را در فضاهای باناخ به طور یکنواخت هموار[۱۴] تحت شرایط

۱) $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \circ, \{\alpha_n\} \subset [\circ, 1]$.

۲) $\sum_{n=\circ}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

۳) $\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \circ$.

ثابت کرد. ویتمان[۱۵] همین قضیه را برای $\{\alpha_n\}$ با فرض (۱) ، (۲) و شرط

۳′) $\sum_{n=\circ}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$.

اثبات کرد. همچنین اگر فرض شود که E یک فضای باناخ انعکاسی و اکیداً محدب[۱۶] با نرم به طور یکنواخت مشتق‌پذیر گاتو[۱۷] باشد و $T_i : E \longrightarrow E, (i = 1, 2, \ldots, k)$ نگاشت‌های غیرانبساطی با $F = \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ باشند و $J^{-1} : E^* \longrightarrow E$ به طور ضعیف پیوسته دنباله‌ای باشد، آن‌گاه دنباله‌ی حاصل از روش تکرار (۲) به نقطه ثابت مشترک T_iها، به طور ضعیف همگراست. این قضیه‌ای است که توسط جانگ[۱۸] در سال ۲۰۰۲ ثابت شد.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل است. در فصل اول به تعاریف و لم‌های اولیه مورد نیاز و بحث کامل نگاشت‌های افزاینده، قویاً افزاینده و m—افزاینده خواهیم پرداخت. در فصل دوم به بحث در وجود و یکتایی جواب برای معادله تحولی، تحت شرایط و فرض‌های مناسب می پردازیم و همچنین از قضیه‌های ثابت شده در این فصل برای اثبات یک قضیه وجودی صفر برای نگاشت‌های قویاً افزاینده و افزاینده که

[۱۲] Halpern
[۱۳] Xu
[۱۴] uniformly smooth
[۱۵] Witmann
[۱۶] strictly convex
[۱۷] uniformly Gateaux differentiable
[۱۸] Jung

به طور مستقل از نگاشت‌های غیرانبساطی در فصل سوم بیان می‌گردد، بهره می‌گیریم. در نهایت در فصل چهارم صفر مشترک را برای خانواده‌ای نامتناهی شمارا از نگاشت‌های m—افزاینده به روش تکرار هالپرن تقریب می‌زنیم. این قضیه قبلاً توسط زگیه و شهزاد[۱۹] برای خانواده‌ای متناهی از نگاشت‌های m—افزاینده، ثابت شده بود[۲۴]. علاوه بر این به عنوان نتایجی از این قضیه، می‌توان صفر مشترک خانواده‌ای نامتناهی شمارا از نگاشت‌های افزاینده و پیوسته، و نقطه ثابت مشترک را برای خانواده‌ای نامتناهی شمارا از نگاشت‌های شبه انقباضی تقریب زد. همچنین فصل چهارم شامل همگرایی روش تکرار پیکارد برای تقریب صفر یک نگاشت قویاً افزاینده و لیپشیتز می‌باشد. در سال ۱۹۹۸ چیدامه و اسیلیک[۲۰]، تحت شرایطی، صفر را برای یک نگاشت قویاً افزاینده و لیپشیتز تقریب زدند[۵]، ولی سرعت همگرایی دنباله پیکارد به مراتب از روش تکرار چیدامه و اسیلیک بیشتر است.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌های زیر تهیه و تنظیم شده است:

1) Ciric, L. and Rafiq, A. and Cakic, N. "**On Picard iterations for strongly accretive and strongly pseudo-contractive lipschitz mappings,**" Nonlinear Analysis, vol. 70, pp. 4332-4337, 2009.

2) Deimling, K. "**Zeros of accretive operators,**" Manuscripta Math. vol. 13, pp. 365-374, 1974.

3) Martin, R. H. "**Differential equations on closed subsets of a Banach space,**" Trans. Amer. Math. Soc. vol. 179, 399-414, 1973.

4) Ofoedu, E. U. "**Iterative approximation of a common zero of a countably infinite family of m-accretive operators in Banach spaces,**" Fixed Point Theory and Applications, ID 325792, doi:10.1155, 2008.

[۱۹] Zegeye , Shahzad
[۲۰] Chidume , Osilike

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل فرض می‌کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک است. برای تابع $f : X \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ ، مجموعه‌ی

$$D(f) = \{x \in X; f(x) < +\infty\},$$

را دامنه مؤثر[۱] f می‌نامند و همچنین f را سره[۲] نامند هرگاه $D(f) \neq \emptyset$.

۱–۱ پیش‌نیاز

یادآوری : تابع $f : X \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ را محدب نامند، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

توجه : به وضوح ملاحظه می‌گردد که برای تابع محدب f، $D(f)$ محدب است.

[۱] effective domain
[۲] proper

تعریف ۱.۱ : فرض کنید Y, X فضاهای باناخ حقیقی و D زیرمجموعه بازی از X ، $F : D \longrightarrow Y$ و $x \in D$ باشد، حد

$$\lim_{t \to ۰^+} \frac{F(x+ty) - F(x)}{t} = F'_+(x, y),$$

را در صورت وجود، مشتق جهت‌دار F در x و در جهت بردار $y \in X$ می‌نامند. همچنین داریم

$$F'_-(x, y) = -F'_+(x, -y).$$

لم ۱.۱ : اگر تابع $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ محدب باشد، آن‌گاه φ در هر $t \in IntD(\varphi)$ دارای مشتق یک طرفه بوده و

$$\varphi'_-(t) \leq \varphi'_+(t). \qquad (۱)$$

علاوه بر این برای هر $t_۱, t_۲ \in IntD(\varphi)$ که $t_۱ < t_۲$ داریم

$$\varphi'_+(t_۱) \leq \frac{\varphi(t_۲) - \varphi(t_۱)}{t_۲ - t_۱} \leq \varphi'_-(t_۲). \qquad (۲)$$

برهان : به منبع [۶] مراجعه شود.

نکته : اولین نامساوی در (۲) به ازای هر $t_۱ \in IntD(\varphi)$ و هر $t_۲ \in \mathbb{R}$ که $t_۱ < t_۲$ می‌باشد، نیز برقرار است.

قضیه ۱.۱ : اگر $f : X \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ تابع محدبی باشد که روی همسایگی‌ای از یک نقطه درونی $x_۰ \in D(f)$ از بالا کراندار است، آن‌گاه f روی $IntD(f)$ پیوسته می‌باشد.

برهان : بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $f(x_۰) = ۰, x_۰ = ۰$. همچنین فرض کنید U همسایگی‌ای از مبدأ باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in U$ داشته باشیم $f(x) \leq M < \infty$.
حال قرار دهید $W = U \bigcap (-U)$. برای هر $\epsilon \in (۰, ۱)$ و هر $x \in \epsilon W$ داریم

$$f(x) = f(\epsilon \cdot \frac{x}{\epsilon} + (۱ - \epsilon) \cdot ۰) \leq \epsilon f(\frac{x}{\epsilon}) \leq \epsilon M. \qquad (۳)$$

از طرف دیگر

$$۰ = f(۰) = f(\frac{۱}{۱+\epsilon} \cdot x + (۱ - \frac{۱}{۱+\epsilon})(-\frac{x}{\epsilon})) \leq \frac{۱}{۱+\epsilon} f(x) + \frac{\epsilon}{۱+\epsilon} f(-\frac{x}{\epsilon}).$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۱+\epsilon}f(x) \geq \frac{-\epsilon}{۱+\epsilon}f(-\frac{x}{\epsilon}),$$

یا

$$f(x) \geq -\epsilon f(-\frac{x}{\epsilon}) \geq -\epsilon M. \tag{۴}$$

از (۳) و (۴) برای هر $x \in \epsilon W$ به دست می‌آید $|f(x)| \leq \epsilon M$ ، یعنی f در صفر پیوسته است. برای تکمیل اثبات کافیست نشان دهیم که به ازای هر $y \in IntD(f)$ ، یک همسایگی حول y موجود است به‌طوری‌که f روی آن همسایگی، از بالا کراندار است.

چون $IntD(f)$ مجموعه‌ای باز است، پس $\rho > ۱$ای موجود است به‌طوری‌که $\rho y \in D(f)$. (زیرا $r > ۰$ای موجود است به‌طوری‌که $S_r(y) = \{x \in X; |x-y| < r\} \subset D(f)$ ، می‌توان $۱ < \rho < \frac{r}{k} + ۱$ را اختیار کرد که $k = \| y \|$.) اگر W همان همسایگی حول صفر باشد، آن‌گاه برای هر $x \in y + (۱ - \frac{۱}{\rho})W = V_y$ می‌توان نوشت

$$x = y + (۱ - \frac{۱}{\rho})z = \frac{۱}{\rho}(\rho y) + (۱ - \frac{۱}{\rho})z,$$

که $z \in W \subset D(f)$. چون $۰ < \frac{۱}{\rho} < ۱$ ، از محدب بودن $D(f)$ مشاهده می‌گردد $x \in D(f)$. لذا

$$y + (۱ - \frac{۱}{\rho})W \subset D(f),$$

و در پایان محدب بودن تابع f ، برای هر $x \in V_y$ نتیجه می‌دهد

$$f(x) \leq \frac{۱}{\rho}f(\rho y) + (۱ - \frac{۱}{\rho})f(z) \leq \frac{۱}{\rho}f(\rho y) + (۱ - \frac{۱}{\rho})M < \infty.$$

پس همسایگی V_y حول y موجود است به‌طوری‌که f روی آن همسایگی، از بالا کراندار است.

نتیجه ۱.۱ : اگر X یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، آن‌گاه تابع محدب سره $f : X \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ روی $IntD(f)$ پیوسته است.

برهان : فرض کنید $۰ \in IntD(f)$ ، $dimX = n$ و $\{e_i; ۱ \leq i \leq n\}$ پایه‌ای برای X باشد. عدد $\alpha > ۰$ را آن‌قدر کوچک اختیار می‌کنیم که داشته باشیم

$$V = \{x \in X; x = \sum_{i=۱}^{n} x_i e_i, ۰ < x_i < \frac{\alpha}{n}\} \subset D(f).$$

به ازای هر $x \in V$ می‌توان نوشت

$$x = \sum_{i=۱}^{n} x_i e_i = \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{\alpha} \cdot \alpha e_i + (۱ - \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{\alpha}) \cdot ۰$$

از محدب بودن f و $۱ > \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{\alpha} > ۰$ نتیجه می‌شود

$$f(x) \leq \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{\alpha} f(\alpha e_i) + (۱ - \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{\alpha}) f(۰) \leq \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} |f(\alpha e_i)| + |f(۰)|.$$

بنابراین f روی V از بالا کراندار است، حال از قضیه (۱.۱)، پیوستگی روی $IntD(f)$ حاصل می‌شود.

تعریف ۲.۱ : فرض کنید X,Y فضاهای برداری حقیقی باشند. تابع $f : X \longrightarrow Y$ را همگن مثبت[۳] نامند هرگاه برای هر $x \in X$ و هر $\lambda > ۰$ داشته باشیم $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

قضیه ۲.۱ : فرض کنید $f : X \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ یک تابع محدب سره باشد، در این صورت برای هر $x \in IntD(f)$ ، مشتق جهت‌دار $f'_+(x,y)$ در هر جهت $y \in X$ موجود است، تابع $\psi : y \to f'_+(x,y)$ محدب و همگن مثبت می‌باشد و برای هر $y \in X$ داریم

$$f'_-(x,y) \leq f'_+(x,y).$$

همچنین اگر تابع f در یک نقطه درونی $x_۰ \in D(f)$ پیوسته باشد، آن‌گاه ψ روی X پیوسته است.

برهان : فرض کنید $x \in IntD(f)$ و $y \in X$ باشد، به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ تعریف کنید $\varphi(t) = f(x+ty)$.
φ یک تابع محدب است زیرا برای هر $t_۱, t_۲ \in \mathbb{R}$ و هر $\lambda \in [۰,۱]$ داریم

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda t_۱ + (۱-\lambda)t_۲) &= f(x + (\lambda t_۱ + (۱-\lambda)t_۲)y) = f(\lambda(x+t_۱ y) + (۱-\lambda)(x+t_۲ y)) \\ &\leq \lambda f(x+t_۱ y) + (۱-\lambda) f(x+t_۲ y) \\ &= \lambda \varphi(t_۱) + (۱-\lambda)\varphi(t_۲). \end{aligned}$$

و همچنین $۰ \in IntD(\varphi)$ (اگر $r > ۰$ را چنان در نظر بگیریم که $S_r(x) \subset D(f)$ ، آن‌گاه $(-\frac{r}{\|x\|}, \frac{r}{\|x\|}) \subset D(\varphi)$). حال بنا به لم (۱.۱)، $\varphi'_+(۰)$ و $\varphi'_-(۰)$ وجود دارد و

$$f'_-(x,y) = \varphi'_-(۰) \leq \varphi'_+(۰) = f'_+(x,y).$$

[۳] positive homogeneous

از طرفی به وضوح مشاهده می‌شود که برای هر $\lambda > ۰$ ،

$$\psi(\lambda y) = f'_+(x, \lambda y) = \lambda f'_+(x,y) = \lambda\psi(y).$$

یعنی ψ همگن مثبت است، حال برای اثبات محدب بودن آن کافیست بررسی کنیم که تابع ψ زیرخطی می‌باشد.

فرض کنید $y_۱, y_۲ \in X$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\psi(y_۱ + y_۲) &= f'_+(x, y_۱ + y_۲) = \lim_{t\to ۰^+} \frac{f(x + \frac{t}{۲}(y_۱ + y_۲)) - f(x)}{\frac{t}{۲}} \\
&= \lim_{t\to ۰^+} \frac{۲f(\frac{x+ty_۱}{۲} + \frac{x+ty_۲}{۲}) - ۲f(x)}{t} \\
&\leq \lim_{t\to ۰^+} \frac{f(x+ty_۱) - f(x)}{t} + \lim_{t\to ۰^+} \frac{f(x+ty_۲) - f(x)}{t} \\
&= f'_+(x, y_۱) + f'_+(x, y_۲) = \psi(y_۱) + \psi(y_۲).
\end{aligned}$$

یعنی ψ محدب است. سپس فرض کنید f در $x_۰ \in IntD(f)$ پیوسته باشد و اعداد $\epsilon > ۰$ و $M > ۰$ را چنان در نظر بگیرید که داشته باشیم

$$\bar{S}_\epsilon(x_۰) = \{x \in X; \parallel x - x_۰ \parallel \leq \epsilon\} \subset D(f),$$

و به ازای هر $x \in \bar{S}_\epsilon(x_۰)$ ، $|f(x)| \leq M$. برای هر $y \in X$ ، تابع $\varphi(t) = f(x_۰ + ty)$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. پس $[-\frac{\epsilon}{\|y\|}, \frac{\epsilon}{\|y\|}] \subset D(\varphi)$ و از نامساوی (۲) در لم (۱.۱) با $t_۱ = ۰, t_۲ = \frac{\epsilon}{\|y\|}$ نتیجه می‌گردد

$$\begin{aligned}
f'_+(x_۰, y) = \varphi'_+(۰) &\leq \frac{\varphi(\frac{\epsilon}{\|y\|}) - \varphi(۰)}{\frac{\epsilon}{\|y\|}} = \frac{f(x_۰ + \frac{\epsilon}{\|y\|}y) - f(x_۰)}{\epsilon} \parallel y \parallel \\
&\leq \frac{۲M}{\epsilon} \parallel y \parallel .
\end{aligned}$$

به طور مشابه با $t_۲ = ۰, t_۱ = -\frac{\epsilon}{\|y\|}$ ، داریم

$$\begin{aligned}
f'_+(x_۰, y) &\geq f'_-(x_۰, y) = \varphi'_-(۰) \geq \frac{\varphi(۰) - \varphi(-\frac{\epsilon}{\|y\|})}{\epsilon} \parallel y \parallel \\
&= \frac{f(x_۰) - f(x_۰ - \frac{\epsilon}{\|y\|}y)}{\epsilon} \parallel y \parallel \geq -\frac{۲M}{\epsilon} \parallel y \parallel .
\end{aligned}$$

در نتیجه برای هر $y \in X$،

$$|\psi(y)| = |f'_+(x_۰, y)| \leq \frac{۲M}{\epsilon} \parallel y \parallel,$$

و این به معنی پیوستگی تابع ψ در $y_{\circ} = \circ$ می‌باشد و از قضیه (۱.۱) پیوستگی تابع ψ روی X نتیجه می‌گردد.

تعریف ۳.۱ : فضای برداری توپولوژیک X را موضعاً محدب[۴] می‌نامند هرگاه دارای پایه‌ای از همسایگی‌های محدب حول نقطه صفر باشد.

تعریف ۴.۱ : فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک باشد،

۱) $A \subset X$ را یک مجموعه جاذب[۵] نامند هرگاه برای هر $x \in X$ ، $\epsilon > \circ$ای موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $\circ \leq \lambda < \epsilon$ ، داشته باشیم $\lambda x \in A$.

۲) $A \subset X$ را متوازن[۶] نامند هرگاه برای هر $x \in A$ و هر $|\alpha| \leq ۱$ ، داشته باشیم $\alpha x \in A$.

۳) یک مجموعه محدب، بسته، جاذب و متوازن را یک بشکه[۷] می‌نامند.

۴) اگر در فضای موضعاً محدب X ، هر بشکه شامل یک همسایگی حول نقطه صفر باشد، آن‌گاه فضا را بشکه‌ای[۸] می‌نامند.

قضیه ۳.۱ : هر فضای باناخ، یک فضای موضعاً محدب و بشکه‌ای است.

برهان : به منبع [۸] مراجعه شود.

یادآوری : تابع $f : X \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ را نیم‌پیوسته پایینی[۹] (یا به اختصار $l.s.c$) نامند هرگاه برای هر $x_{\circ} \in X$ داشته باشیم

$$f(x_{\circ}) = \liminf_{x \to x_{\circ}} f(x) = \sup_{v \in v_{x_{\circ}}} \inf_{x \in v} f(x),$$

که $v_{x_{\circ}}$ مجموعه‌ی همسایگی‌های نقطه $x_{\circ}$ می‌باشد.

لم ۲.۱ : برای تابع $f : X \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ عبارات زیر معادلند:

i) f روی X ، $l.s.c$ است.

ii) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ ، مجموعه $\{x \in X; f(x) \leq \alpha\}$ در X بسته است.

---

[۴] locally convex
[۵] absorbent
[۶] balanced
[۷] barrel
[۸] barrelled
[۹] lower semicontinue

برهان : $i \Rightarrow ii$: مجموعه $A = \{x \in X; f(x) \le \alpha\}$ بسته است اگر و تنها اگر مجموعه $A^c = \{x \in X; f(x) > \alpha\}$ باز باشد. فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}$ و $x_\circ \in A^c$ ، بنا به (i)،

$$\alpha < f(x_\circ) = \sup_{v \in v_{x_\circ}} \inf_{x \in v} f(x).$$

پس $v_\circ \in v_{x_\circ}$ای موجود است به‌طوری‌که $\inf\{f(x); x \in v_\circ\} > \alpha$. بنابراین $v_\circ \subset A^c$ ، یا به عبارت دیگر A^c باز است.

$ii \Rightarrow i$: فرض کنید $x_\circ \in X$ و $\epsilon > \circ$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$v_\circ = \{x \in X; f(x) > f(x_\circ) - \epsilon\}.$$

بنا به (ii)، $v_\circ \in v_{x_\circ}$ و $\inf\{f(x); x \in v_\circ\} \ge f(x_\circ) - \epsilon$. بنابراین

$$\liminf_{x \to x_\circ} f(x) \ge f(x_\circ) - \epsilon,$$

و چون ϵ دلخواه در نظر گرفته شده بود، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

قضیه ۴.۱ : فرض کنید X یک فضای باناخ و $f : X \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ تابعی محدب، سره و $l.s.c$ باشد، در این صورت f روی $IntD(f)$ پیوسته می‌باشد.

برهان : بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $\circ \in IntD(f)$ و $f(\circ) < M$. به وضوح مجموعه $W = \{x \in D(f); f(x) \le M\}$ محدب و بنا به لم (۲.۱) بسته است، همچنین W جاذب است، زیرا اگر $x \in X$ باشد و $X_\circ = \{\lambda x; \lambda \in \mathbb{R}\}$ را در نظر بگیرید بنا به نتیجه (۱.۱)، تحدید f به $X_\circ$ پیوسته است، در نتیجه به ازای هر $\circ < \epsilon \le M - f(\circ)$ ، $\lambda_\epsilon > \circ$ای موجود است به‌طوری‌که اگر $|\lambda| \le \lambda_\epsilon$ ، آن‌گاه $f(\lambda x) - f(\circ) \le \epsilon$. یا به عبارت دیگر برای $|\lambda| \le \lambda_\epsilon$ ، $f(\lambda x) \le M$. پس $\lambda x \in W$ یعنی W جاذب است. به وضوح ملاحظه می‌گردد که $U = W \bigcap (-W)$ نیز بسته، محدب و جاذب می‌باشد. علاوه بر این اگر $x \in U$ باشد، به ازای هر $|\lambda| \le ۱$ داریم

$$f(\lambda x) = f[\lambda x + (۱ - \lambda) \cdot \circ] \le M.$$

یعنی U متوازن نیز می‌باشد، بنابراین U یک بشکه است و چون فضای باناخ بشکه‌ای است، لذا U شامل یک همسایگی برای نقطه صفر می‌باشد و قضیه (۱.۱) اثبات را کامل می‌کند.

۱−۲ تابع مشتق‌پذیر گاتو

فرض کنید Y, X فضاهای باناخ حقیقی، Y^*, X^* به ترتیب فضای دوگان آن‌ها و $L(X, Y)$ فضای همه نگاشت‌های خطی و پیوسته از X به توی Y باشد.

تعریف ۵.۱ : فرض کنید D زیرمجموعه بازی از X باشد، تابع $F : D \longrightarrow Y$ را در $x \in D$ مشتق‌پذیر گاتو[۱۰] نامند، هرگاه عملگری در $L(X, Y)$ که آن را با $F'(x)$ نمایش می‌دهیم موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $y \in X$ داشته باشیم

$$\lim_{t \to \circ} \frac{F(x + ty) - F(x)}{t} = F'(x)y = \langle F'(x), y \rangle.$$

در این صورت به اختصار می‌گوییم، F در x ، G−مشتق‌پذیر است و $F'(x)$ را مشتق گاتو[۱۱] F در x می‌نامند. تابع F را G−مشتق‌پذیر نامند هرگاه F در هر $x \in D$ ، G−مشتق‌پذیر باشد.

مثال ۱ : در هر فضای هیلبرت X ، تابع $f(x) = \| x \|$ روی $X - \{\circ\}$ ، G−مشتق‌پذیر است و $f'(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

نتیجه ۲.۱ : تابع محدب و پیوسته f در $x \in IntD(f)$ ، G−مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $y \in X$ ، داشته باشیم $f'_+(x, y) = f'_-(x, y)$.

برهان : اگر f در $x \in D$ ، G−مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در x و در هر جهت $y \in X$ دارای مشتق جهت‌دار می‌باشد و همچنین برای هر $y \in X$،

$$f'_+(x, y) = f'(x)(y) = -f'(x)(-y) = -f'_+(x, -y) = f'_-(x, y).$$

بالعکس: فرض کنید برای هر $y \in X$ ، داشته باشیم $f'_-(x, y) = f'_+(x, y)$. بنا به برهان قضیه (۲.۱)، تابع $\psi(y) = f'_+(x, y) = f'_-(x, y)$ زیرخطی است یعنی برای هر $y_۱, y_۲ \in X$ ، داریم

$$f'_+(x, y_۱ + y_۲) \leq f'_+(x, y_۱) + f'_+(x, y_۲). \qquad (۵)$$

علاوه بر این

$$-f'_+(x, y_۱ + y_۲) \quad = \quad f'_-(x, -(y_۱ + y_۲)) \leq f'_-(x, -y_۱) + f'_-(x, -y_۲)$$

[۱۰] Gateaux differentiable
[۱۱] Gateaux derivative

$$= \quad -f'_+(x,y_1) - f'_+(x,y_2).$$

یا به عبارت دیگر

$$f'_+(x,y_1+y_2) \geq f'_+(x,y_1) + f'_+(x,y_2). \tag{6}$$

از (۵) و (٦) نتیجه می‌گردد که $f'_+(x,y_1+y_2) = f'_+(x,y_1) + f'_+(x,y_2)$. از طرف دیگر با توجه به همگن مثبت بودن ψ برای هر $a > 0$ و هر $y \in X$ داریم $f'_+(x,ay) = af'_+(x,y)$. و برای $a < 0$ ملاحظه می‌گردد

$$\begin{aligned} \psi(ay) &= f'_+(x,ay) = f'_+(x,-|a|y) = |a|f'_+(x,-y) \\ &= |a|f'_-(x,-y) = -|a|f'_+(x,y) = af'_+(x,y) = a\psi(y). \end{aligned}$$

یعنی تابع ψ خطی است. مجدداً بنا به قضیه (۲.۱)، تابع ψ روی X پیوسته نیز می‌باشد. بنابراین $\psi \in X^*$، یعنی f در x ، G—مشتق‌پذیر است.

۱—۳ زیر مشتق

فرض کنید X یک فضای برداری نرمدار باشد:

تعریف ٦.۱ : تابع $f : X \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ را در نقطه $x \in X$ زیر مشتق‌پذیر[۱۲] نامند هرگاه تابعک $c^* \in X^*$ای موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $y \in X$ داشته باشیم

$$f(y) - f(x) \geq \langle c^*, y-x \rangle.$$

c^* را یک زیر گرادیان[۱۳] f در x می نامند. مجموعه‌ی همه‌ی زیر گرادیان‌های f در x را با $\partial f(x)$ نمایش می‌دهند و نگاشت مجموعه مقدار $\partial f : X \longrightarrow 2^{X^*}$ را زیر مشتق[۱۴] f می‌نامند.

توجه : $\partial f(x)$ یک زیرمجموعه محدب و بسته ضعیف * از X^* می‌باشد.

برهان : فرض کنید $c_1^*, c_2^* \in \partial f(x)$ و $\lambda \in (0, 1)$ باشد، آن‌گاه

$$\langle \lambda c_1^* + (1-\lambda)c_2^*, y-x \rangle \quad = \quad \lambda \langle c_1^*, y-x \rangle + (1-\lambda) \langle c_2^*, y-x \rangle$$

---

[۱۲] subdifferentiable
[۱۳] subgradient
[۱۴] subdifferential

$$\leq \quad \lambda(f(x)-f(y))+(۱-\lambda)(f(x)-f(y))=f(x)-f(y).$$

یعنی $\lambda c_۱^* + (۱-\lambda)c_۲^* \in \partial f(x)$ ، یا به عبارت دیگر $\partial f(x)$ محدب است. حال فرض کنید $\{c_n^*\}_n \subset \partial f(x)$ باشد به‌طوری‌که c_n^* به طور ضعیف * به c^* همگراست، پس داریم $\langle c_n^*, y-x\rangle \to \langle c^*, y-x\rangle$. از طرفی

$$\langle c_n^*, y-x\rangle \leq f(y)-f(x).$$

لذا $\langle c^*, y-x\rangle \leq f(y)-f(x)$. یعنی $c^* \in \partial f(x)$ و در نتیجه $\partial f(x)$ در X^* ، بسته ضعیف * می‌باشد.

قضیه ۵.۱ : فرض کنید $f : X \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ یک تابع محدب سره و $x \in IntD(f)$ باشد، در این صورت $c^* \in \partial f(x)$ اگر و تنها اگر برای هر $y \in X$ داشته باشیم

$$f'_-(x,y) \leq \langle c^*, y\rangle \leq f'_+(x,y). \tag{۷}$$

برهان : فرض کنید $c^* \in \partial f(x)$ ، آن‌گاه برای هر $y \in X$ و هر $t > ۰$ داریم

$$\frac{f(x)-f(x-ty)}{t} \leq \langle c^*, y\rangle \leq \frac{f(x+ty)-f(x)}{t},$$

و این نامساوی وقتی $t \to ۰^+$ ، (۷) را نتیجه می‌دهد.

بالعکس : $y \in X$ و $z = y - x$ را در نظر بگیرید. برای $t \in \mathbb{R}$ ، قرار دهید $\varphi(t) = f(x+tz)$.

φ محدب است زیرا برای هر $t_۱, t_۲ \in \mathbb{R}$ و هر $\lambda \in (۰,۱)$ داریم

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda t_۱ + (۱-\lambda)t_۲) &= f(x+\lambda t_۱ z + (۱-\lambda)t_۲ z) \\
&= f(\lambda(x+t_۱ z) + (۱-\lambda)(x+t_۲ z)) \\
&\leq \lambda f(x+t_۱ z) + (۱-\lambda) f(x+t_۲ z) = \lambda\varphi(t_۱) + (۱-\lambda)\varphi(t_۲).
\end{aligned}$$

پس با استفاده از (۷) و لم (۱.۱) برای $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۱$ مشاهده می‌شود

$$\langle c^*, z\rangle \leq f'_+(x,y) = \varphi'_+(۰) \leq \varphi(۱) - \varphi(۰) = f(y) - f(x).$$

یعنی $c^* \in \partial f(x)$.

قضیه ۶.۱ : فرض کنید X یک فضای باناخ و $f : X \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ تابعی محدب، سره و $l.s.c$ باشد، در این صورت f روی $IntD(f)$ زیر مشتق‌پذیر است.

برهان : کافیست ثابت کنیم که برای هر $x \in IntD(f)$ ، $c^* \in X^*$ای موجود است به‌طوری‌که در رابطه (۷) صدق می‌کند. بنا به قضیه (۴.۱)، f روی $IntD(f)$ پیوسته است. $y_\circ \in X$ را ثابت در نظر می‌گیریم و تابعک خطی F را روی زیر فضای $Y_\circ = \{\lambda y_\circ ; \lambda \in \mathbb{R}\}$ به صورت

$$F(\lambda y_\circ) = \lambda f'_+(x, y_\circ)$$

تعریف می‌کنیم . بنا به قضیه (۲.۱)، $y \mapsto f'_+(x,y)$ پیوسته و همگن مثبت است پس نتیجه می‌گیریم برای هر $\lambda \geq \circ$، $F(\lambda y_\circ) = f'_+(x, \lambda y_\circ)$. همچنین به ازای هر $\lambda < \circ$ داریم

$$F(\lambda y_\circ) = \lambda f'_+(x, y_\circ) = |\lambda| f'_-(x, -y_\circ) \leq |\lambda| f'_+(x, -y_\circ) = f'_+(x, \lambda y_\circ).$$

بنابراین برای هر $y \in Y_\circ$ ، $F(y) \leq f'_+(x,y)$. حال بنا به قضیه هان–باناخ، می‌توان F را به یک تابعک خطی و پیوسته مانند c^* روی X توسعه داد به‌طوری‌که برای هر $y \in X$ داشته باشیم

$$\langle c^*, y \rangle \leq f'_+(x,y) \ , \qquad \langle c^*, y_\circ \rangle = f'_+(x, y_\circ). \tag{۸}$$

بنابراین

$$\langle c^*, y \rangle = -\langle c^*, -y \rangle \geq -f'_+(x, -y) = f'_-(x,y).$$

لذا برای هر $y \in X$ ، داریم

$$f'_-(x,y) \leq \langle c^*, y \rangle \leq f'_+(x,y).$$

نتیجه ۳.۱ : فرض کنید f تابعی سره، پیوسته و محدب باشد که روی فضای باناخ X داده شده است، در این صورت f در $x \in IntD(f)$ ، G–مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر دارای یک زیر گرادیان یکتا در x باشد که در این حالت $\partial f(x) = f'(x)$.

برهان : اگر f در x ، G–مشتق‌پذیر باشد، بنا به نتیجه (۲.۱)، برای هر $y \in X$ ، $f'_+(x,y) = f'_-(x,y)$. وجود زیر گرادیان در اثبات قضیه (٦.۱) نشان داده شد و یکتایی آن از رابطه (۷) نتیجه می‌شود.
بالعکس: فرض کنید f در x دارای زیر گرادیان یکتای c^* باشد، این زیر گرادیان با توجه به اثبات قضیه (٦.۱) همان تابعک $c^* \in X^*$ای هست که با استفاده از $y_\circ \in X$ دلخواه ساخته می‌شود. بنابراین از (۸)، برای هر $y \in X$، نتیجه می‌شود

$$\langle c^*, y \rangle = f'_+(x,y).$$