دانشگاه شهید چمران
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته:
ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان:

یک الگوریتم ژنتیک برای حل مسائل دوسطحی کسری– خطی

نگارنده: **کوثر لطفی پور**

استاد راهنما: **دکتر حبیبه صادقی**

استاد مشاور: **دکتر هادی بصیرزاده**

پاییز ۱۳۸۸

دانشگاه شهید چمران اهواز

مدیریت تحصیلات تکمیلی

بسمه‌تعالی

نتیجه ارزشیابی پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

بدین وسیله گواهی می‌شود پایان نامه خانم **کوثر لطفی پور** دانشجوی رشته ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات) از دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر به شماره دانشجویی **۸۶۱۵۳۰۱** تحت عنوان **یک الگوریتم ژنتیک برای حل مسائل دوسطحی کسری– خطی** جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در تاریخ ۸۸/۹/۳۰ توسط هیئت داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و با درجه عالی تصویب گردید.

۱– اعضای هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
الف– استاد راهنما: دکتر حبیبه صادقی	استادیار	
ب– استاد مشاور: دکتر هادی بصیرزاده	استادیار	
ج– داور اول: دکتر عبدالمحمد فروزانفر	استادیار	
د– داور دوم: دکتر منصور سراج	استادیار	
ه– نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر مهرداد نامداری	استادیار	
۲– مدیر گروه: دکتر سینا هدایتیان	استادیار	
۳– معاون پژوهشی– تحصیلات تکمیلی دانشکده:		
دکتر غلامعلی پرهام	دانشیار	
۴– مدیر کل تحصیلات تکمیلی: دکتر رحیم پیغان	استاد	

فهرست مطالب

چکیده

نام‌خانوادگی: لطفی‌پور **نام:** کوثر
عنوان پایان‌نامه: یک الگوریتم ژنتیک برای حل مسائل دوسطحی کسری– خطی
استاد راهنما: دکتر حبیبه صادقی **استاد مشاور:** دکتر هادی بصیرزاده
درجه تحصیلی: کارشناسی‌ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** تحقیق در عملیات **محل تحصیل:** دانشگاه شهید چمران اهواز **دانشکده:** علوم ریاضی و کامپیوتر **تاریخ فارغ‌التحصیلی:** ۱۳۸۸/۹/۳۰ **تعداد صفحه:** ۱۴۵
واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی دوسطحی، الگوریتم ژنتیک، برنامه‌ریزی کسری– خطی
چکیده: مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی یک مسئله بهینه‌سازی دو مرحله‌ای است به‌طوری‌که ناحیه شدنی مسئله سطح اول به‌طورضمنی توسط مسئله بهینه‌سازی سطح دوم تعیین می‌شود. دراین رساله یک الگوریتم ژنتیک برای دسته‌ای ازمسائل دوسطحی که توابع هدف سطح اول و سطح دوم کسری –خطی و ناحیه تعریف شده توسط قیود مسئله یک چندوجهی کراندار است، ارائه می‌شود. الگوریتم ارائه شده کروموزوم‌ها را نظیر نقاط رأسی چند وجهی در نظر می‌گیرد و با به‌کارگیری عملگرهای ادغام و جهش خاصی، جواب بهینه را جستجو می‌کند.

مقدمه

الگوریتم‌های طراحی شده برای حل مسائل دوسطحی عمدتاً شامل طرح‌های شمارشی، جایگزینی مسئله سطح پایین با شرایط K.K.T[۱] نظیرش و استفاده از روش‌های گرادیان یا پنالتی می‌باشد. البته بیشتر این الگوریتم‌ها نمی‌توانند استراتژی‌های مؤثری را برای یافتن جواب از لحاظ زمان محاسبات حتی برای مسائل با اندازه کوچک ارائه دهند. برای مطالعه بیشتر بهینه‌سازی دوسطحی می‌توان به مراجع [۲] و [۱۱] مراجعه کرد. در این رساله مسئله دوسطحی کسری− خطی که ناحیه تشکیل شده توسط قیود آن یک چندوجهی کراندار می‌باشد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. جواب بهینه چنین مسأله‌ای در یکی از نقاط رأسی چندوجهی کراندار مذکور رخ می‌دهد[۵]. با توجه به این موضوع می‌توان با امتحان کردن کلیه نقاط رأسی چندوجهی الگوریتمی به‌دست آورد که جواب بهینه را در تعداد متناهی تکرار به دست آورد، هر چند این تکنیک به خاطر تعداد زیاد نقاط رأسی چندوجهی به جز برای مسائل بسیار ساده کارایی ندارد. کالوت[۲] و گاله[۳] در سال ۲۰۰۳، روشی به نام الگوریتم $k-best$ برای حل‌مسئله دوسطحی کسری− خطی پیشنهاد دادند که یک طرح شمارشی متفاوت برای حل مسئله ارائه می‌دهد [۸]. همچنین ساویتا میشرا[۴] در سال ۲۰۰۶ یک روش دیگر معروف به روش وزن دهی[۵] برای حل مسئله دوسطحی کسری− خطی ارائه داد که مسئله دوسطحی کسری− خطی را با یافتن وزن‌های مناسب به یک مسئله بهینه‌سازی اسکالر تبدیل کرده و حل می‌کند [۲۸]، هر دو روش ذکر شده از لحاظ زمان محاسبات و دقت جواب از کارایی نسبتاً پایینی برخوردارند.

[۱] Karoush Khaun-Tuker

[۲] Calvete

[۳] Gale'

[۴] Savita Mishra

[۵] Weighting Method

این رساله شرحی بر مقاله A genetic algorithm for solving linear fractional bilevel problems نوشته کالوت، گاله و ماتئو[6] [۷] می‌باشد و به‌صورت زیر تنظیم شده است:

- در فصل اول، به معرفی مسئله دوسطحی کسری− خطی پرداخته و روش هندسی را برای حل آن ارائه می‌دهیم.
- در فصل دوم به اثبات این‌که جواب بهینه مسئله دوسطحی شبه‌مقعر در یکی از نقاط رأسی چندوجهی رخ می‌دهد، می‌پردازیم.
- در فصل سوم الگوریتم ژنتیک را معرفی کرده و عملگرهای مهم آن را همراه با مثال‌های متنوع تشریح می‌کنیم.
- در فصل چهارم یک الگوریتم ژنتیک که الگوریتم جستجوی ابتکاری نقطه رأسی نامیده می‌شود، برای حل مسئله دوسطحی کسری− خطی ارائه می‌دهیم.
- در فصل آخر نیز یک الگوریتم ژنتیک برای حل مسئله دوسطحی ضربی خطی− خطی که ناحیه تشکیل شده توسط قیود آن یک چندوجهی کراندارمی‌باشد، معرفی می‌کنیم.
- کد برنامه‌های مورد استفاده جهت حل مثال‌های عددی فصل چهارم را با نرم افزار متلب[7] ۷ نوشته و در پیوست انتهای رساله آورده‌ایم.

[6] Mateo

[7] Matlab

فصل ۱

برنامه‌ریزی دوسطحی کسری– خطی

در این فصل ابتدا مسئله برنامه‌ریزی کسری– خطی تعریف شده و دو روش برای حل آن ارائه می‌شود سپس به‌طور اجمالی برنامه‌ریزی دوسطحی را معرفی می‌کنیم، در انتها مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی کسری– خطی را تعریف و با آوردن چند مثال به تبیین موضوع می‌پردازیم.

۱.۱ مسئله برنامه ریزی کسری– خطی، (LFP) [۱]

مسئله برنامه ریزی کسری– خطی را به صورت زیر فرمول‌بندی می‌کنیم.

$$\min\ Z = \frac{\alpha + c^T X}{\beta + d^T X} \tag{۱.۱}$$

$$s.t\ \ X \in S = \{X \in \mathbb{R}^n |\ AX = b,\ X \geq \circ\}$$

به‌طوری‌که $b \in \mathbb{R}^m$ وماتریس A، ماتریسی از مرتبه $m \times n$ است. تابع هدف مسئله به صورت خارج قسمت دو تابع خطی تعریف می‌شود به‌طوری‌که مخرج کسر در همه نقاط مجموعه S مثبت است. به

۱ Linear Fractional Programming

بیان دیگر در هیچ نقطه‌ای از ناحیه S، مخرج کسر صفر نمی‌شود، همچنین فرض می‌کنیم به ازای هر $w \in \mathbb{R}$، داریم $c, d \neq 0$ و $c \neq wd$. برای تابع هدف $Z = \frac{\alpha + c^T X}{\beta + d^T X}$، منحنی‌های سطح[۲] را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم k عدد ثابتی باشد، منحنی سطح $Z = \frac{\alpha + c^T X}{\beta + d^T X}$ از سطح k، اشتراک صفحه $Z = k$ و $Z = \frac{\alpha + c^T X}{\beta + d^T X}$ می‌باشد.

نکته قابل توجه در مورد مسائل برنامه‌ریزی کسری‌ـ خطی، خاصیت خطی بودن منحنی‌های سطح تابع هدف آن‌هاست. برای روشن شدن این موضوع، منحنی سطح تابع هدف از سطح دلخواه k را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\alpha + c^T X}{\beta + d^T X} = k \qquad (۲.۱)$$

با مرتب سازی رابطه (۲.۱) خواهیم داشت:

$$(c^T X + \alpha) = (d^T X + \beta)k \quad \Rightarrow (c - kd)^T X = k\beta - \alpha \qquad (۳.۱)$$

از آن‌جایی که k به دلخواه انتخاب شده است، همان‌گونه که در رابطه (۳.۱) مشاهده می‌شود هر منحنی سطح تابع هدف کسری‌ـ خطی روی ناحیه S خطی است. با وجود خطی بودن منحنی‌های سطح تابع هدف کسری‌ـ خطی، این منحنی‌ها مانند حالتی که در برنامه‌ریزی خطی اتفاق می‌افتد با یکدیگر موازی نیستند. این منحنی‌ها به صورت شعاعی از مجموعه دوران گسترده می‌شوند.

قضیه ۲.۱.۱ اگر مسئله برنامه‌ریزی کسری‌ـ خطی (۱.۱)، جواب بهینه داشته باشد حداقل یک نقطه رأسی ناحیه S وجود دارد که جواب بهینه مسئله است [۱۶].

تعریف ۳.۱.۱ مجموعه نقاطی که به‌طور هم‌زمان در دو معادله زیر صدق می‌کند، مجموعه دوران[۳] نامیده می‌شود.

$$\begin{cases} c^T X = -\alpha \\ d^T X = -\beta \end{cases} \qquad (۴.۱)$$

---

[۲] Level Curves

[۳] Rotation Set

به عنوان مثال مجموعه دوران در $\mathbb{R}^{2}$، یک نقطه است که آن را نقطه دوران می‌نامیم.
اکنون دو مورد از روش‌های حل برنامه‌ریزی کسری− خطی را به اختصار شرح می‌دهیم.

۱.۱.۱ روش ترسیمی

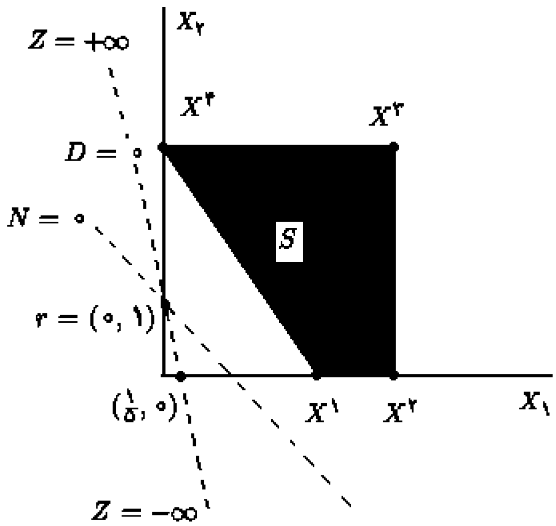
این روش را در قالب یک مثال ساده مطرح می‌کنیم.

مثال ۴.۱.۱ فرض کنیم مسئله برنامه‌ریزی کسری− خطی به شکل زیر فرمول‌بندی شده است:

$$\min\ Z=\frac{x_{1}+x_{2}-1}{5x_{1}+x_{2}-1}$$

$$s.t\begin{cases}3x_{1}+2x_{2}\geq 6\\ x_{1}\leq 3\\ x_{2}\leq 3\\ x_{1},x_{2}\geq 0\end{cases}$$

ناحیه شدنی مسئله که با S نمایش داده و به‌صورت زیر ترسیم می‌کنیم:



شکل (۱.۱)

همان‌طور که در شکل (۱.۱) مشاهده می‌شود نقاط رأسی چندوجهی S عبارتند از: $X^{1}=(2,0)$، $X^{2}=(3,0)$، $X^{3}=(3,3)$ و $X^{4}=(0,3)$. صورت کسر Z را با N ومخرج آن را با D نمایش

می‌دهیم. حال دو خط $N = ۰$ و $D = ۰$ را روی شکل مشخص می‌کنیم.

نقطه دوران که با r نمایش داده می‌شود، طبق تعریف از تلاقی دو خط $N = ۰$ و $D = ۰$ به دست می‌آید که در این مثال $r = (۰, ۱)$ می‌باشد. واضح است که روی خط $N = ۰$ داریم $Z = ۰$ و روی خط $D = ۰$، $Z = +\infty$ یا $Z = -\infty$ می‌باشد. برای تعیین این‌که $D = ۰$ متناظر با $Z = +\infty$ یا $Z = -\infty$ است به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

دو نقطه دلخواه در دو سمت نقطه دوران روی خط $D = ۰$ در نظر می‌گیریم، سپس مقدار N را به ازای نقاط مذکور محاسبه می‌کنیم. اگر به ازای نقطه مورد نظر $N > ۰$، دراین صورت این قسمت از خط $D = ۰$ متناظر با $Z = +\infty$ است و در غیر این صورت متناظر با $Z = -\infty$ است. در مثال قبل نقطه $(۰, \frac{۱}{۵})$ را روی خط $D = ۰$ در نظر می‌گیریم. به ازای این نقطه صورت کسر Z، منفی است پس قسمت پایین نقطه دوران روی خط $D = ۰$ متناظر با $Z = -\infty$ و قسمت بالای نقطه دوران روی خط $D = ۰$ متناظر با $Z = +\infty$ است. حال از خط $D = ۰$ (نظیر $Z = -\infty$) به سمت خط $N = ۰$ حول نقطه دوران، در جهت پادساعتگرد (در مسئله می‌نیمم سازی) دوران انجام می‌دهیم، اولین نقطه‌ای که از تلاقی خط $D = ۰$ و ناحیه شدنی S حاصل می‌شود جواب بهینه است که در این مثال $X^۱ = (۲, ۰)$، جواب بهینه مسئله می‌باشد.

بدیهی است که این روش تنها برای مسائل از مرتبه کوچک کارایی دارد. روش دیگر راه حل جامعی برای حل مسائل کسری- خطی ارائه می‌دهد.

۲.۱.۱ روش تغییر متغیر چارنز و کوپر[۴]

با فرض این‌که مخرج کسر تابع هدف در همه نقاط ناحیه S مثبت است، روش چارنز و کوپر تغییر متغیر زیر را برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری- خطی (۱.۱)، ارائه می‌دهد، گیریم:

$$\rho = \frac{1}{\beta + d^T X} \qquad (۵.۱)$$

[۴] Charnes And Cooper Transformation

با اعمال این تغییر متغیر تابع هدف مسئله (۱.۱) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$Z=\sum_{i=1}^{n}(c_ix_i\rho)+\alpha\rho \tag{۶.۱}$$

حال تغییر متغیر زیر را برای هر $i\in\{1,\dots,n\}$ اعمال می‌کنیم.

$$x_i\rho=y_i \tag{۷.۱}$$

لذا مسئله برنامه‌ریزی کسری– خطی (۱.۱) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}&\min\ c^TY+\alpha\rho\\ &s.t\begin{cases}\frac{AY}{\rho}=b\\ (d^TX+\beta)\rho=1\\ Y\geq 0,\rho\geq 0\\ \rho\in\mathbb{R},Y\in\mathbb{R}^n\end{cases}\end{aligned}$$

با مرتب سازی مسئله بالا، مسئله LFP در نهایت به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}&\min\ c^TY+\alpha\rho\\ &s.t\begin{cases}AY-b\rho=0\\ d^TY+\beta\rho=1\\ Y\geq 0,\rho\geq 0\\ \rho\in\mathbb{R},Y\in\mathbb{R}^n\end{cases}\end{aligned} \tag{۸.۱}$$

نکته قابل توجه این است که با اعمال تغییر متغیرهای ذکر شده تعداد محدودیت‌های مسئله (۱.۱) از m به $m+1$ و تعداد متغیرهای مسئله مذکور از n به $n+1$ افزایش می‌یابد. مسئله (۸.۱) یک مسئله برنامه ریزی خطی است که با روش سیمپلکس قابل حل است.

حال مثال ۴.۱.۱ را به روش تغییر متغیر چارنز و کوپر حل می‌کنیم. با اعمال تغییر متغیر $\rho=\frac{1}{5x_1+x_2-1}$ و $y_i=\rho x_i$ برای $i=1,2$ مسئله مذکور به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}&\min\ y_1+y_2-\rho\\ &s.t\begin{cases}3y_1+2y_2-6\rho\geq 0\\ y_1-3\rho\leq 0\\ y_2-3\rho\leq 0\\ 5y_1+y_2-\rho=1\\ y_1,y_2,\rho\geq 0\end{cases}\end{aligned}$$

پس از حل مسئله به روش سیمپلکس دوفازی، $y_۱ = \frac{۲}{۱۴}$، $y_۲ = ۰$ و $\rho = \frac{۱}{۱۴}$ به‌دست می‌آیند. حال با استفاده از تغییر متغیر (۷.۱) خواهیم داشت:

$$x_۱ = \frac{y_۱}{\rho} = ۲ , \quad x_۲ = \frac{y_۲}{\rho} = ۰ .$$

۳.۱.۱ کاربردهای برنامه‌ریزی کسری– خطی

کاربردهای برنامه‌ریزی خطی در شاخه‌های مختلف علوم انسانی به‌ویژه در اقتصاد بسیار مشهود است، اما کاربردهای برنامه‌ریزی کسری– خطی تا کنون کمتر شناخته شده است. البته خطی بودن مسئله موجب می‌شود برخورد با آن ساده‌تر بوده و بیشتر مورد توجه واقع شود. از آنجا که همه مسائل زندگی واقعی در قاعده خطی بودن توصیف نمی‌شوند، لذا برنامه‌ریزی کسری– خطی به عنوان یکی از شاخه‌های برنامه ریزی غیرخطی که تنها ۶۰ سال از معرفی آن می‌گذرد بسیار مورد توجه است، این شاخه از برنامه‌ریزی غیرخطی، به جهت دامنه وسیع مسائل دنیای واقعی که قابلیت فرموله شدن با آن را دارند توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. حال به عنوان مثال، یکی از کاربردهای بسیار مهم مسائل LFP را در اقتصاد مطرح می‌کنیم، [۱۲].

فرض کنیم یک شرکت n محصول متفاوت تولید می‌کند، همچنین فرض می‌شود p_j سود به‌دست آمده به ازای هر واحد محصول jاُم و $p_۰$ سود ثابت شرکت که مقدارش مستقل از حجم خروجی است باشد. تولید یک واحد محصول j هزینه‌ای برابر d_j در بر دارد و هزینه ثابت شرکت برابر $d_۰$ است که مقدارش به فعالیت‌های تولیدی شرکت بستگی ندارد و در هر شرایطی حتی در صورت عدم تولید محصول باید پرداخته شود. فرض کنیم b_i حجم iاُمین منبع در دسترس شرکت و a_{ij} سهم هزینه منبع i برای تولید یک واحد از محصول نوع jاُم باشد. شرکت باید تصمیم بگیرد چند واحد از هر محصول تولید کند تا نسبت سود کل به هزینه کل ماکزیمم شود. متغیر تصمیم x_j حجم خروجی محصول jاُم به ازای $j = ۱, \cdots, n$ است. سود کل شرکت (شامل سود ثابت $p_۰$) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(x) = \sum_{j=۱}^{n} p_j x_j + p_۰$$

هزینه کل فعالیت‌های تولیدی (شامل هزینه ثابت d_0) برابر است با:

$$D(x)=\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0$$

تابع هدف مسئله به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\max\ Q(x)=\frac{P(x)}{D(x)}=\frac{\sum_j p_j x_j + p_0}{\sum_j d_j x_j + d_0} \tag{9.1}$$

محدودیت اصلی شرکت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=1,\cdots,m$$

چون x_j نمایش دهنده مقدار محصولی است که باید تولید شود لازم است محدودیت زیر هم اضافه شود:

$$x_j \geq 0, \quad j=1,\cdots,n$$

لذا مسئله به شکل زیر فرمول‌بندی می شود:

$$\max\ Q(x)=\frac{P(x)}{D(x)}=\frac{\sum_j p_j x_j + p_0}{\sum_j d_j x_j + d_0}$$

$$s.t \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i=1,\ldots,m \\ x_j \geq 0, & j=1,\cdots,n \end{cases}$$

۲.۱ برنامه‌ریزی دوسطحی

برنامه‌ریزی چندسطحی برای توجیه فرایندهای تصمیم‌گیری شامل چند تصمیم‌گیرنده که ساختار سلسله مراتبی دارند، پیشنهاد شده است. مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی حالت خاصی از مسائل برنامه‌ریزی چند سطحی هستند که ساختاری با دو سطح دارند. این مسائل حالت مهمی از

بهینه‌سازی نامحدب هستند. در این مسائل تصمیم گیرنده سطح دوم تابع هدف خود را تحت پارامترهای ارسالی از تصمیم گیرنده سطح اول بهینه می‌سازد، سپس تصمیم گیرنده سطح اول با اطلاع کامل از واکنش‌های ممکن تصمیم‌گیرنده سطح دوم، پارامترهایی را انتخاب می‌کند که تابع هدف خودش را بهینه سازد. به بیان دیگر هر تصمیم گیرنده بدون توجه به هدف تصمیم گیرنده دیگر سعی بر بهینه‌سازی تابع هدف خود را دارد اما تصمیم هر بخش همان‌گونه که بر فضای تصمیم اثر می‌گذارد، بر مقدار تابع هدف بخش دیگر هم تأثیر دارد. لذا مسائل دوسطحی با دو مسئله بهینه‌سازی شناخته می‌شوند به‌طوری‌که ناحیه شدنی برای مسئله سطح اول به‌طور ضمنی توسط مسئله بهینه‌سازی دوم تعیین می‌شود. در حالت کلی این مسائل به شکل زیر فرمول‌بندی می‌شوند.

$$\begin{aligned} &\min_{(x_۱,x_۲)\in S} f_۱(x_۱,x_۲) \\ &x_۲ \in argmin_{\nu\in S(x_۱)} f_۲(x_۱,\nu) \end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

که در آن $x_۱ \in \mathbb{R}^{n_۱}$ و $x_۲ \in \mathbb{R}^{n_۲}$ به ترتیب متغیرهای تحت کنترل تصمیم گیرنده‌های سطح اول و سطح دوم هستند. توابع $f_۱, f_۲ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ که $n = n_۱ + n_۲$ به ترتیب توابع هدف سطح اول و سطح دوم مسأله، $S \subset \mathbb{R}^n$ ناحیهٔ تشکیل شده توسط قیودمسئله و $S(x_۱) = \{x_۲ \in \mathbb{R}^{n_۲} : \quad (x_۱, x_۲) \in S\}$ می‌باشد. مشخصات مسائل دوسطحی به‌ویژه نامحدب بودن، حل آن‌ها را دشوار می‌سازد به گونه‌ای که حتی مسائل دوسطحی خطی که در آن تمامی توابع به شکل خطی هستند نیز به عنوان مسائل $NP - Hard$ شناخته شده‌اند. برخی از روش‌هایی که برای حل این مسائل وجود دارد به اختصار توضیح داده می‌شود.

۱. روش‌های مبتنی بر شمارش نقاط رأسی

این روش‌ها برای دسته‌ای از مسائل دوسطحی که جواب بهینه آن در یک نقطه رأسی ناحیه S رخ می‌دهد طراحی شده‌اند، نمونه‌ای از این روش‌ها را می‌توان در مرجع [۲۱] یافت.

۲. روش‌های مبتنی بر شرایط کان- تاکر

دراین روش‌ها مسئله سطح دوم با شرایط کان- تاکر نظیرش جایگزین می‌شود و مسئله تبدیل به یک مسئله بهینه‌سازی یک سطحی با شرایط مکمل زائد می‌شود[۳].

۳. از روش‌های دیگر می‌توان به روش جریمه‌ای و روش گرادیان اشاره کرد که هر کدام با توجه به نوع مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی روند خاصی را پیش می‌گیرند [۳۰].

بسیاری از الگوریتم‌های ارائه شده جواب مؤثری را از لحاظ زمان محاسبات، حتی در مسائل با اندازه کوچک به دست نمی‌دهد. لذا برای این نوع مسائل الگوریتم‌های فرا ابتکاری[5] بسیار مفید به‌نظر می‌رسد. این الگوریتم‌ها در یافتن جواب مناسب برای مسائل بهینه‌سازی پیچیده، بسیار قوی عمل می‌کنند و نیز توانایی حل مسائل بزرگ را در زمان محاسباتی قابل قبول دارند. یکی از این الگوریتم‌های فرا ابتکاری، الگوریتم ژنتیک است که موضوع این رساله می‌باشد.

۱.۲.۱ برنامه‌ریزی دوسطحی کسری- خطی[6] (LFB)

مسائل برنامه ریزی دوسطحی کسری- خطی به شکل زیر فرمول‌بندی می‌شوند.

$$\begin{aligned}&\min_{x_1,x_2}\ \frac{\alpha_1+c_{11}x_1+c_{12}x_2}{\beta_1+d_{11}x_1+d_{12}x_2}\\&\min_{x_2}\ \frac{\alpha_2+c_{21}x_1+c_{22}x_2}{\beta_2+d_{21}x_1+d_{22}x_2}\\&s.t\begin{cases}A_1x_1+A_2x_2\le b\\x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}\end{aligned}\tag{۱۱.۱}$$

که در آن بردارهای c_{ij} و d_{ij} برای $i,j\in\{1,2\}$، بردارهایی از مرتبه‌های قابل قبول هستند. ماتریس A_1 از مرتبه $m\times n_1$ و ماتریس A_2، ماتریسی از مرتبه $m\times n_2$ می‌باشد. بردار b، یک بردار ستونی از مرتبه $m\times 1$ می‌باشد و α_i و β_i اسکالر هستند. فرض می‌کنیم چندوجهی تشکیل شده توسط قیود مسئله که با S نمایش داده می‌شود یک چندوجهی ناتهی و کراندار است و نیز بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌شود برای هر $(x_1,x_2)\in S$ و $i=1,2$، $\beta_i+d_{i1}x_1+d_{i2}x_2>0$. تصویر S در $\mathbb{R}^{n_1}$ را با S_1 نمایش می‌دهیم.

$$S_1=\{x_1\in\mathbb{R}^{n_1}:\ (x_1,x_2)\in S\}\tag{۱۲.۱}$$

با توجه به ساختار سلسله مراتبی مسائل دوسطحی برای هر $\widetilde{x_1}\in S_1$ که از تصمیم گیرنده سطح اول ارسال می‌شود، تصمیم گیرنده سطح دوم تابع هدف خود را بهینه می‌سازد به عبارت دیگر تصمیم گیرنده

[5] Metaheuristic

[6] Linear Fractional Bilevel

سطح دوم مسئله بهینه‌سازی زیر را حل می‌کند.

$$LF(\widetilde{x_1}): \qquad \min_{x_2} \frac{\widetilde{\alpha_2} + c_{22}x_2}{\widetilde{\beta_2} + d_{22}x_2} \quad s.t \begin{cases} A_2 x_2 \leq \widetilde{b} \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{۱۳.۱}$$

که در آن $\widetilde{\alpha_2} = \alpha_2 + c_{21}\widetilde{x_1}$، $\widetilde{\beta_2} = \beta_2 + d_{21}\widetilde{x_1}$ و $\widetilde{b} = b - A_1\widetilde{x_1}$. مجموعه جواب‌های بهینه مسئله (۱۳.۱) یا به بیان دیگر مجموعه واکنش‌های منطقی تصمیم گیرنده سطح دوم به ازای هر $\widetilde{x_1} \in S_1$ را با $M(\widetilde{x_1})$ نشان می‌دهیم. ناحیه شدنی تصمیم گیرنده سطح اول را ناحیه القایی[۷] می‌نامیم و با IR نمایش می‌دهیم. ناحیه القایی به‌طور ضمنی توسط مسئله بهینه‌سازی سطح دوم تعیین می‌شود.

$$IR = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : \ x_1 \in S_1, \ x_2 \in M(x_1)\} \tag{۱۴.۱}$$

هر نقطه IR یک جواب شدنی مسئله دوسطحی است. تصمیم گیرنده سطح اول با اطلاع کامل از واکنش‌های تصمیم گیرنده سطح دوم بردار x_1 ی را انتخاب می‌کند که تابع هدف خودش را بهینه می‌سازد. پس مسئله دوسطحی فرموله شده (۱۱.۱) به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$\min_{x_1, x_2} \frac{\alpha_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2}{\beta_1 + d_{11}x_1 + d_{12}x_2} \quad s.t \ (x_1, x_2) \in IR \tag{۱۵.۱}$$

برای درک بهتر ساختار مسائل دوسطحی کسری– خطی، مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

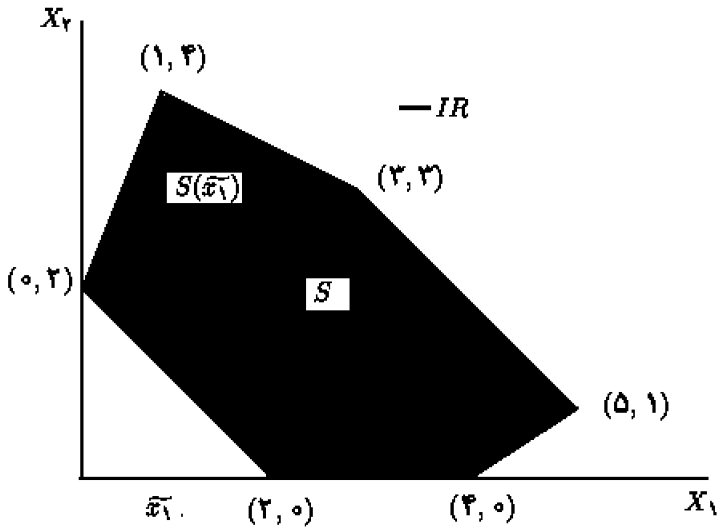
مثال ۱.۲.۱ در مسئله زیر متغیر x_1 تحت کنترل تصمیم گیرنده سطح اول و متغیر x_2 تحت کنترل تصمیم گیرنده سطح دوم می‌باشد.

$$\min_{x_1} \frac{x_1 + 5x_2 + 2}{x_1 + 1}$$
$$\min_{x_2} \frac{3x_1 + 2x_2 + 8}{x_1 + x_2 + 3}$$

[۷] Inducible Region

$$s.t\begin{cases} x_۱ + x_۲ \geq ۲ \\ -۲x_۱ + x_۲ \leq ۲ \\ x_۱ + ۲x_۲ \leq ۹ \\ x_۱ + x_۲ \leq ٦ \\ x_۱ - x_۲ \leq ۴ \\ x_۱ \geq ۰,\ x_۲ \geq ۰ \end{cases}$$

با ترسیم قیود مسئله در دستگاه مختصات، چندوجهی S به شکل زیر به‌دست می آید. همان‌گونه که در شکل زیر قابل مشاهده است تصویر S روی $\mathbb{R}^{n_۱}$ که در اینجا $n_۱ = ۱$ است مجموعه $S_۱ = [۰, ۵]$ می‌باشد.



شکل (۲.۱)

لذا برای هر $\widetilde{x_۱} \in [۰, ۵]$، تصمیم گیرنده سطح دوم مسئله زیر را حل می‌کند.

$$\min_{x_۲} \frac{۲x_۲ + ۸ + ۳\widetilde{x_۱}}{x_۲ + ۳ + \widetilde{x_۱}}$$

$$s.t\begin{cases} x_2 \geq 2 - \widetilde{x_1} \\ x_2 \leq 2 + 2\widetilde{x_1} \\ 2x_2 \leq 9 - \widetilde{x_1} \\ x_2 \leq 6 - \widetilde{x_1} \\ -x_2 \leq 4 - \widetilde{x_1} \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

به عنوان مثال برای $\widetilde{x_1} = 1$ که در شکل (۲.۱) مشخص گردیده است مسئله زیر توسط تصمیم گیرنده سطح دوم حل می‌شود.

$$\min_{x_2} \frac{2x_2 + 11}{x_2 + 4}$$
$$s.t\begin{cases} x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 5 \\ -x_2 \leq 3 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

این مسئله به‌سادگی به روش تغییر متغیر چارنز و کوپر که در بخش ۲.۱.۱ مطرح شد قابل حل است و جواب بهینه آن $x_2 = 4$ است. همان‌گونه که پیش‌تر هم ذکر گردید برای همه $\widetilde{x_1} \in [0,5]$، چنین مسأله‌ای توسط تصمیم گیرنده سطح دوم حل می‌شود. لذا ناحیه IR که در شکل (۲.۱) با خطوط تیره نمایش داده شده طبق تعریف برابر است با:

$$IR = \{(x_1,x_2):\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 = 2x_1 + 2\} \cup \{(x_1,x_2):\ 1 \leq x_1 \leq 3,\ x_2 = \tfrac{(9-x_1)}{2}\}$$
$$\cup\{(x_1,x_2):\ 3 \leq x_1 \leq 5,\ x_2 = 6 - x_1\}$$

حال که ناحیه شدنی تصمیم گیرنده سطح اول یا همان ناحیه IR مشخص گردید، تصمیم گیرنده سطح اول تابع هدف خود را روی این ناحیه بهینه می‌سازد. به عبارت دیگر تصمیم گیرنده سطح اول مسئله زیر را حل می‌کند.

$$\min_{x_1,x_2} \frac{x_1 + 5x_2 + 2}{x_1 + 1} \qquad (16.1)$$
$$s.t\ \ (x_1,x_2) \in IR$$

این مسئله را با روش ترسیمی که در بخش ۱.۱.۱ مطرح شد حل می‌کنیم. برای این کار ابتدا نقطه دوران را طبق معادله (۴.۱) به‌دست می‌آوریم که نقطه $(-1,-\frac{1}{5})$ می‌باشد. حال دو خط $N = 0$