فهرست مندرجات

مقدمه و تاریخچه

نظریه نیم گروه عملگرهای کراندار بخشی از آنالیز تابعی را تشکیل داده است و تا حدی مطالب آنالیز تابعی را تحت الشعاع خود قرار می دهد. این نظریه پس از یافتن قضیه مولد توسط هیل[۱] و یوشیدا[۲] در سال ۱۹۴۸ با سرعت نسبتاً زیادی پیشرفت خود را آغاز کرد و در حال حاضر، کاربردهای اساسی آن در بسیاری از زمینه های آنالیز موضوع اصلی ریاضیات را تشکیل می دهد.

نظریه شبه نیم گروه ها از مباحث جدید و در واقع تعمیمی از نیم گروه عملگرها است. برای اولین بار مفهوم شبه نیم گروه توسط بارسناز[۳] و لیوا[۴] در سال ۱۹۹۱ [۱] مطرح شد و ایدهٔ اصلی نوشتن مقاله در این زمینه توسط کک [۵] با سه مقالهٔ [۷]،[۸] و [۹] او به وجود آمد.

پیچل[۶] و شاپاچر[۷] [۲۱] نتایجی درکنترل پذیری پوچ معادلات تکاملی در فضاهای

[۱] Hille
[۲] Yosida
[۳] Barcenas
[۴] Leiva
[۵] Cuc
[۶] Peichl
[۷] Schappecher

باناخ به دست آوردند. کلید اصلی این نتایج این بود که در فضاهای بازتابی نیم گروه های عملگری، دارای دوگان پیوسته قوی هستند [۱۵,۱۷,۲۳]. پاپ جورجیو[۸] [۲۰] در سال ۱۹۹۳ نتیجه مشابهی با نتایج پیچل و شاپاچر برای عملگرهای تکاملی به دست آورد، که دوگان این عملگرهای تکاملی به طور پیوسته قوی بودند. بارسناز و دایستل[۹] [۵] در سال ۱۹۹۵ نتایج پیچل، شاپاچر و پاپ جورجیو را به حالتی که نیم گروه دوگان در یک فضای باناخ دلخواه پیوسته قوی است تعمیم دادند، که به آنها اجازه به کار بردن نتایج در معادلات دیفرانسیل جزئی در فضای باناخ غیر بازتابی را می داد.

بارسناز و لیوا [۲] به طور همزمان یافته های پیچل و شاپاچر، پاپ جورجیو، بارسناز و دایستل را برای نشان دادن ارتباط کنترل پذیری پوچ سیستمهای تکاملی عملگری به طور قوی پیوسته با عملگرهای دوگان به طور قوی پیوسته روی $(0, +\infty)$ گسترش دادند. تازگی کار در این است که در فضای باناخ بازتابی دوگان شبه نیم گروه های به طور قوی پیوسته خود به طور قوی پیوسته است.

دراین پایان نامه به کمک پیوستگی قوی شبه نیم گروه های دوگان، یک شرط لازم و کافی برای کنترل پذیری دسته بزرگی از معادلات تکاملی ارائه می شود.

این پایان نامه شامل سه فصل است.

فصل اول شامل پنج بخش است که بخش اول به مقدمات اختصاص دارد که در آن تعاریف

[۸] Papageorgiou

[۹] Diestel

و قضایایی از آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی بیان می شود که در طول این پایان نامه به کار رفته است. بخش دوم نیم گروه یک پارامتری از عملگرها روی فضای باناخ تعریف می شود و ویژگیهای آن در قضیه هایی عنوان می شود. در بخش سوم به مسالهٔ آشفتگی می پردازیم و در بخش چهارم مسالهٔ کوشی مجرد یک پارامتری عنوان می شود و درپایان، در بخش پنجم فضای سوبولوف را تعریف کرده و مثالی از نیم گروه ها در این فضا عنوان می کنیم که عمدهٔ مطالب این بخشها از کتابهای

[13] K.J. Engel and R.Nagel, *One-parameter Semigroups for Linear Evaluation Equations*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[19] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Differential Equations*, Appl. Math. Sci. Vol. 44, Springer-Verlag, 1983.

استخراج شده است. در این فصل تمامی قضایا بدون اثبات پذیرفته می شوند و تنها مراجع لازم برای اثبات آنها بیان می شود.

فصل دوم شامل دو بخش است که عمدتاً مستخرج از مقالهٔ

[4] D. Barcenas, H. Leiva, A.Tineo Moya, *Quasi semigroups and evolution equetions*, Int. J. Evolution Equations Vol. 33 (2005) 17-36.

است. در بخش اول شبه نیم گروه عملگرها را تعریف کرده و قضایا و ویژگیهای مربوط به نیم گروه ها را برای شبه نیم گروه ها بیان می کنیم. در بخش دوم دستگاه‌های معادلات

تکاملی را معرفی کرده و چگونگی حل این دستگاه ها را در حالت همگن و نا همگن با استفاده از شبه نیم گروه ها بررسی می کنیم.

فصل سوم نیز شامل سه بخش است که از مقالهٔ

[3] D. Barcenas, H. Leiva, A. Tineo Moya, *The dual quasi semigroups and controllability of evolution equation*, J. Math. Appl. 320 (2006) 691-701.

آورده شده است. در بخش اول مفهوم دوگان شبه نیم گروه را عنوان کرده و قضایا و ویژگیهای مربوط به آن را بیان می کنیم. در بخش دوم کنترل پذیری معادلات تکاملی را که در فصل قبل عنوان کردیم بررسی می کنیم وشرط لازم وکافی برای کنترل پذیری دستگاه معادلات تکاملی را مورد توجه قرار داده و کاربردی از آنها را بیان می کنیم. و در بخش سوم کاربردی از کنترل پذیری را طی مثالی بررسی می کنیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل تعاریف مورد نیاز در فصل بعدی ارائه می‌شود که در آن تعاریف و قضایایی از آنالیز حقیقی، تابعی، نیم‌گروه‌های یک پارامتری و ... بیان می‌شوند که در طول این پایان نامه به‌کار رفته‌اند. در این فصل تمامی قضایا بدون اثبات پذیرفته می‌شوند.

۱.۱ مفاهیم اولیه

این بخش را به معرفی فضاهای نرم دار، عملگرها روی این فضاها، توپولوژی های ضعیف وضعیف*، انتگرال بوخنر و برخی قضایائی اختصاص داده‌ایم که در فصل آتی به آن نیاز داریم.

تعریف ۱.۱.۱ یک **فضای برداری**[۱] عبارت است از یک گروه آبلی جمعی مانند $(X,+)$، به همراه ضرب اسکالر از میدان $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}=\mathbb{R}$ یا $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) به توی X مانند

$$\begin{aligned} . : \mathbb{F}\times X &\longrightarrow X \\ (\alpha,x) &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

---

[۱] Vector Space

که برای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ دارای شرایط زیر است

الف) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$،

ب) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$،

ج) $۱x = x$،

د) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید X فضایی برداری روی میدان F باشد، تابع $\|.\| : X \longrightarrow [۰, \infty)$ یک **نرم**[۲] روی X نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند

الف) $x = ۰$ اگر و فقط اگر $\|x\| = ۰$،

ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ و هر $x \in X$، $\|\alpha x\| =\mid \alpha \mid \|x\|$،

ج) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

اگر در شرط الف) از $\|x\| = ۰$ نتوانیم $x = ۰$ را نتیجه بگیریم به نگاشت فوق یک نیم نرم گفته می شود. فضای برداری X روی میدان F را یک فضای نرم [۳] گویند، اگر یک نرم $\|.\|$ روی X وجود داشته باشد. فضای نرمدار X با متر $d(x,y) = \|x-y\|$ یک فضای متریک است. حال اگر این فضای متریک کامل باشد یعنی هر دنباله کوشی[۴] در آن همگرا باشد، آن را یک **فضای باناخ**[۵] گوییم.

---

[۲] Norm
[۳] Normed space
[۴] Cauchy sequence
[۵] Banach space

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرم، μ اندازه مثبت [۶] و(X,ν,μ) یک فضای اندازه[۷] باشد وf یک تابع اندازه پذیر باشد و$1 \leq p < \infty$ تعریف می کنیم

$$\|f\|_p = [\int |f|^p d\mu]^{\frac{1}{p}}.$$

وقرار می دهیم

$$L^p(X,\nu,\mu) = \{f : X \to \mathbb{C}; \|f\|_p < \infty\}.$$

در این صورت $L^p(X,\nu,\mu)$ را با $L^p(\mu)$ ویاL^p نمایش می دهیم.

قضیه ۴.۱.۱ همگرایی تسلطی[۸] $D.C.T$

فرض کنید f_n یک دنباله از توابع اندازه پذیر مختلط[۹] باشد به طوری که برای یک $g \in L^1(\mu)$ و هر $n \in N$ داشته باشیم $|f_n| < g$. اگر به طور نقطه وار f_n همگرا به f باشد، آن گاه $f \in L^1(\mu)$ و $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

برهان : به مرجع [۱۴] قضیه ۲.۲۴ مراجعه کنید. ■

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید X و Y دو فضای نرم روی میدان F باشند. تابع $T : X \longrightarrow Y$ یک **عملگر خطی**[۱۰] نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $x,y \in X$ و هر $\alpha,\beta \in F$ داشته باشیم

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

[۶] Positive measure
[۷] Measure space
[۸] Dominated convergence
[۹] Complex measurable
[۱۰] Linear operator

عملگر خطی T از فضای نرم‌دار X به فضای نرم‌دار Y را **کراندار** گوییم هرگاه $M > ۰$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$، $\|Tx\| \leq M\|x\|$. مجموعه تمام عملگرهای خطی کراندار از X به Y را با نماد $B(X, Y)$ نمایش می‌دهیم و برای $T \in B(X, Y)$ قرار می‌دهیم $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| \leq ۱\}$.

می توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای کرانداری T پیوستگی آن است. واضح است که $B(X, Y)$ با این نرم فضای نرم دار است و Y فضای باناخ است اگر و تنها اگر $B(X, Y)$ نیز فضای باناخ باشد. $B(X, X)$ را معمولاً با $B(X)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ عملگر خطی A با دامنه $D(A)$ در فضای باناخ X، یعنی $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$، را **بسته** گوییم هرگاه برای هر دنباله $\{x_n \mid n \in N\} \subset D(A)$، اگر حدهای $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ و $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y \in X$ موجود باشند، آن‌گاه $x \in D(A)$ و $Ax = y$.

تذکر ۷.۱.۱ اگر X فضائی باناخ و A عملگری کراندار در $B(X)$ باشد می توان نشان داد که سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

در فضای باناخ $B(X)$ همگرای مطلق و در نتیجه همگراست. این عضو از $B(X)$ را با نماد e^A نمایش می دهیم. حال اگر $A, B \in B(X)$ قابل بررسی است که شرط لازم و کافی برای آن که $e^{A+B} = e^A e^B$، آن است که $AB = BA$. همچنین در این حالت واضح است که $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

تعریف ۸.۱.۱ اگر X فضای برداری و دارای توپولوژیی باشد که اعمال فضای برداری روی آن پیوسته است، آن‌گاه این فضا را **فضای برداری توپولوژیکی** [۱۱] می‌نامیم.

فضای برداری توپولوژیکی X را یک **فضای موضعاً محدب** [۱۲] گوئیم هر گاه صفر دارای یک همسایگی محدب باشد.

به عنوان مثال می توان نشان داد که هر فضای نرم دار یک فضای برداری توپولوژیکی است.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای موضعاً محدب باشد، در این صورت فضای همه توابع خطی پیوسته از X به $\mathbb{C}$ را با X^* نشان می‌دهیم و آن را **فضای دوگان** [۱۳] X گوئیم. برای هر $x \in X$ و هر $x^* \in X^*$، $x^*(x)$ را با نماد $< x, x^* >$ نشان می‌دهیم.

برای مثال وقتی X یک فضای اندازه و $1 \leq p < \infty$ باشد آن گاه $(L^p(\mu))^* = L^q(\mu)$ که در آن $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.(به مرجع [۱۴] قضیه ۶.۱۵ مراجعه کنید.)

تعریف ۱۰.۱.۱ اگر X یک فضای موضعاً محدب باشد، **توپولوژی ضعیف** [۱۴] روی X را با $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهیم. این توپولوژی تعریف شده توسط خانواده‌ای از نیم نرم‌های $\{P_{x^*} \mid x^* \in X^*\}$ است که در آن $P_{x^*}(x) = | < x, x^* > |$. در واقع این توپولوژی ضعیف ترین توپولوژی روی X است که تحت آن نیم نرم‌های فوق پیوسته هستند.

---

[۱۱] Topological vector space

[۱۲] Locally convex space

[۱۳] Dual space

[۱۴] Weak topology

قضیه ۱۱.۱.۱ دنباله $\{x_n\}$ در فضای نرم دار X همگرای ضعیف به x است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، $\langle x_n^*, x\rangle$ همگرا به $\langle x^*, x\rangle$ باشد.

برهان : به مرجع [۲۲] مراجعه کنید. ■

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. آن گاه X^* یک فضای برداری است، حال اگر F به صورت مجموعهٔ

$$\{\varphi_x : X^* \to \mathbb{C}; x \in X \ \ , \ \ \varphi_x(f) = f(x)\}.$$

باشد، آن گاه توپولوژی F روی X^* را **توپولوژی ضعیف*** [۱۵] گویند. در واقع این توپولوژی ضعیف ترین توپولوژی روی X^* است که تحت آن هر φ_x پیوسته می شود.

لازم به یادآوری است که برای فضای نرمدار X و $x \in X$، φ_x را گاهی با $\hat{x}$ نمایش می دهند که دارای ویژگیهای زیر است

۱) $\forall x, y \in X \qquad \widehat{(x+y)} = \hat{x} + \hat{y}$،

۲) $\forall \alpha \in \mathbb{C} \qquad \widehat{(\alpha x)} = \alpha \hat{x}$،

۳) $\forall x \in X \qquad \|\hat{x}\| = \|x\|$.

یعنی $\hat{x} \in X^{**}$. همچنین $\wedge : X \to X^{**}$ یک ایزومتری خطی است و بنابراین یک به یک است، حال اگر این نگاشت پوشا هم باشد آن گاه X بازتابی است. که در این حالت $X \cong X^{**}$ و هر فضای بازتابی،[۱۶] باناخ هم می باشد.

[۱۵] Weak star topology
[۱۶] Reflexive space

قضیه زیر شرطهای معادل بازتابی بودن یک فضای باناخ را بیان می کند.

قضیه ۱۳.۱.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ باشد موارد زیر با هم معادلند.

۱) X فضای بازتابی است.

۲) X^* فضای بازتابی است.

۳) توپولوژی ضعیف و ضعیف* روی X^* با هم یکی هستند.

برهان : به مرجع [۶] قضیه ۴.۲ .V مراجعه کنید. ■

قضیه ۱۴.۱.۱ (نامساوی هولدر [۱۷]) فرض کنید $1 < p < \infty$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ که $(q = \frac{p}{p-1})$.
اگر $f \in L^p$ و $g \in L^q$ پس $f.g \in L^1$ آن گاه $\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

برهان: به مرجع [۱۴] قضیه ۶.۲ مراجعه کنید. ■

قضیه ۱۵.۱.۱ (هان ـباناخ [۱۸]) فرض کنید X یک فضای نرم دار و M زیر فضائی نه لزوماً بسته از X باشد. اگر $f : M \to \mathbb{C}$ یک تابعک خطی کراندار باشد آن گاه تابعک خطی کراندار مانند F در X^* موجود است به طوری که تحدید F به M برابر f است. همچنین F را می توان به گونه ای یافت که $\|F\| = \|f\|$.

برهان : به مرجع [۲۲] قضیهٔ ۳.۳ رجوع شود. ■

تابع F در قضیه فوق را معمولاً گسترش هان — باناخ f روی X می نامیم.

---

[۱۷] Holder's Inequality

[۱۸] Hahn-Banach

نتیجه ۱۶.۱.۱ اگر X یک فضای برداری توپولوژیکی و موضعاً محدب باشد و M یک زیر فضا از X باشد و $x_\circ$ در بستار M نباشد آن گاه عملگر $F \in X^*$ وجود دارد به طوری که $F(x_\circ) = ۱ \quad , \quad F(M) = \circ$.

برهان: به مرجع [۲۲] قضیهٔ ۳.۵ مراجعه کنید. ■

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنید X و Y فضاهای برداری هستند و $T : X \to Y$ یک نگاشت خطی است. و Y' همهٔ نگاشتهای خطی از $Y \to \mathbb{F}$ باشد. اگر $y' \in Y'$ آن گاه $y'oT : X \to \mathbb{F}$ یک تابع خطی روی X است که $y'oT \in X'$. این یک نگاشت به صورت $T' : Y' \to X'$ با $T'(y') = y'oT$ تعریف می کند. حال اگر X و Y نرمدا باشند و $A \in B(X,Y)$ و $y^* \in Y^*$ آن گاه $y^*oA = A'(y^*) \in X^*$ این یک نگاشت به صورت $A^* : Y^* \to X^*$ تعریف می کند در حالی که $A^* = A'|_{Y^*}$. بنابراین برای هر $x \in X$ و $y^* \in Y^*$

$$\langle x, A^*(y^*)\rangle = \langle A(x), y^*\rangle.$$

A^* را الحاقی[۱۹] A گویند.

قضیه ۱۸.۱.۱ فرض کنید X و Y فضای باناخ باشند و $A, B \in B(X,Y)$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ آن گاه

۱) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$.

[۱۹] Adjoint

۲) $A^{**}|_X = A$.

۳) $\|A^*\| = \|A\|$.

۴) $(AB)^* = B^*A^*$.

برهان : به مرجع [٦] قضیه های ۱.۴ و ۱.۳ .VI مراجعه کنید. ■

قضیه ۱۹.۱.۱ فرض کنید X و Y فضاهای باناخ بازتابی باشند، $T : X \to Y$ عملگری خطی کراندار باشد آن گاه شرط لازم و کافی برای آن که $RangT = Y$ باشد آن است که $r > \circ$ ای چنان یافت شود که برای هر $y^* \in Y^*$ داشته باشیم $r\|T^*y^*\| \geq \|y^*\|$.

برهان : به مرجع [۱۰] قضیهٔ ۳.۳ مراجعه کنید. ■

قضیه ۲۰.۱.۱ فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند، اگر $T \in B(X,Y)$ آن گاه

$$\overline{RangT} = \{y \in Y : y^*y = \circ, \forall y^* \in Y^* \ni T^*y^* = \circ\}.$$

برهان : به مرجع [۱۲] قضیهٔ ۲.۸ .VI مراجعه کنید. ■

نتیجه ۲۱.۱.۱ فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند، اگر $T \in B(X,Y)$ آن گاه $\overline{RangT} = Y$ اگر و تنها اگر T^* یک به یک باشد.

برهان : اگر $\overline{RangT} = Y$ و $T^*y^* = \circ$ آن گاه بنا بر قضیهٔ قبل برای هر $y \in Y$ داریم $y^*(y) = \circ$ لذا $y^* = \circ$ یعنی T^* یک به یک است.

برعکس اگر T^* یک به یک باشد بنا بر قضیهٔ قبل می دانیم

$$\overline{RangT} = \{y \in Y : y^*y = \circ, \forall y^* \in Y^* \ni T^*y^* = \circ\}.$$

اما چون T^* یک به یک است پس هیچ y^* ای به جز صفر در $T^*y^* = \circ$ صادق نیست. لذا هر y ای در رابطهٔ مجموعهٔ فوق صدق می کند یعنی $\overline{RangT} = Y$. ■

حال به معرفی **انتگرال‌گیری بوخنر**[20] از توابع برداری می‌پردازیم. فضای باناخ X و تابع $f : J \subseteq \mathbb{R} \to X$ روی بازه J را در نظر بگیرید. اگر f تابعی پیوسته باشد، همانند توابع اسکالر مقدار، می‌توان انتگرال را به صورت حد مجموع ریمان تعریف کرد.

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنید f تابعی برداری مقدار است،

الف) تابع f را **ساده**[21] گوییم هرگاه بتوان آن را به صورت زیر نمایش داد

$$f = \sum_{k=\text{۱}}^{n} x_k \chi_{J_k}$$

که در آن $x_k \in X$ و $J_k \subseteq J$ و J_k ها اندازه‌پذیرند (χ_{J_k} نمایشگر تابع مشخصه روی مجموعه J_k است). برای تابع ساده f انتگرال را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\int_J f(s)ds = \sum_{k=\text{۱}}^{n} x_k m(J_k) \ ,$$

که در آن m اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ است.

ب) اگر بتوانیم f را به صورت نقطه‌وار با توابع ساده تقریب بزنیم، یعنی اگر دنباله $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از توابع ساده موجود باشد که

$$\lim_{n\to\infty} \|f(s) - f_n(s)\| = \circ \quad \text{a.e.}$$

[20] Bochner integration
[21] Simple

آن‌گاه f را (به‌طور قوی) **اندازه‌پذیر** گوییم.

ج) اگر f اندازه‌پذیر باشد و دنباله‌ای از توابع ساده روی J موجود باشد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\int_J \|f(s)-f_n(s)\|ds = \circ$$

آن‌گاه f را انتگرال پذیر بوخنر گوییم و انتگرال تابع f به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_J f(s)ds = \lim_{n\to\infty}\int_J f_n(s)ds.$$

همچنین هر تابع پیوسته ضعیف روی مجموعه های فشرده $[a,b]\subset(\circ,+\infty)$ انتگرال پذیر بوخنر است.

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرم، μ اندازه مثبت و (Ω,ν,μ) یک فضای اندازه باشد مجموعه توابع اندازه پذیر $f:\Omega\to X$ که p—انتگرالپذیر بوخنر باشد (یعنی $\int_\Omega \|f(x)\|^p dx$ موجود باشد) را با $L^p(\mu,X)$ نمایش می دهیم و در این فضا نرم به صورت زیر تعریف می شود،

$$\|f\|_p = (\int_\Omega \|f(x)\|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

اگر X فضائی باناخ باشد آن گاه $L^p(\mu,X)$ نیز باناخ است. (به مرجع ۱۴ مراجعه کنید.) همچنین هنگامی که μ اندازهٔ لبگ روی مجموعهٔ $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ است آن گاه به جای $L^p(\mu)$ می نویسیم $L^p(\Omega)$. حال اگر μ اندازه لبگ $[\circ,T]$ باشد آن را به صورت $L^p(\circ,T,X)$ نشان می دهیم.

قضیه ۲۴.۱.۱ اگر X یک فضای باناخ بازتابی باشد و $1 < p,q < \infty$ آن گاه وقتی $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ داریم

$$[L^p(\circ, T; X)]^* = L^q(\circ, T; X^*).$$

برهان : به مرجع [۱۱] صفحهٔ ۹۸ مراجعه کنید. ■

در ادامه فضای هیلبرت را معرفی می کنیم.

تعریف ۲۵.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری باشد. نگاشت $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ را که $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ یک **ضرب داخلی**[۲۲] روی X گوئیم هرگاه برای هر $x,y,z \in X, \alpha \in \mathbb{F}$، شرایط زیر برقرار باشد

۱) $\langle x,x \rangle > \circ$ و $\langle x,x \rangle = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$،

۲) $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle x,y \rangle$،

۳) $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$،

۴) $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$.

X به همراه این ضرب داخلی را یک فضای ضرب داخلی گوئیم. اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد، آن گاه $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ یک نرم روی X تعریف می کند، به عبارت دیگر هر فضای ضرب داخلی یک فضای نرم‌دار است. اگر این فضای نرم‌دار $(X, \|.\|)$ باناخ باشد آن گاه $(X, \langle .,. \rangle)$ را یک **فضای هیلبرت**[۲۳] گوئیم. فضای هیلبرت را به صورت $(H, \langle .,. \rangle)$ نشان

[۲۲] Inner product

[۲۳] Hilbert space

می دهیم . برای مثال ثابت می شود که در هر فضای اندازه $L^{2}(\mu)$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی $\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}d\mu$ است.

تعریف ۲۶.۱.۱ در فضای هیلبرت $(H, \langle ., .\rangle)$ برای هر $x, y \in H$ گوئیم x بر y عمود است هرگاه $\langle x, y\rangle = 0$، در این وضعیت می نویسیم $x \perp y$. خانواده غیر تهی $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را در فضای هیلبرت متعامد یکه گوئیم هرگاه

$$\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases}$$

حال اگر $H = \overline{span\{e_\alpha : \alpha \in I\}}$ آن گاه $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را یک پایه متعامد یکه[24] برای H گوئیم. می دانیم اگر $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پایه متعامد یکه برای H باشد آن گاه برای هر $x \in H$ داریم،

$$x = \sum_{\alpha\in I}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha.$$

که در سری فوق فقط تعدادی شمارا جمله ناصفر وجود دارد (به مرجع [۶] مراجعه کنید.) همچنین در این وضعیت

$$\|x\|^{2} = \sum_{\alpha\in I}|\langle x, e_\alpha\rangle|^{2}.$$

[24] Orthonormal basis

تعریف ۲۷.۱.۱ فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $B(H)$ فضای همهٔ عملگرهای خطی کراندار روی H باشد. عملگر $T \in B(H)$ را **متقارن**[۲۵] گوئیم هرگاه

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y \in H.$$

و آن را **پاد متقارن** [۲۶] گوئیم اگر

$$\langle Tx, y\rangle = -\langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y \in H.$$

تعریف ۲۸.۱.۱ خانواده $\{A(t), \quad t \in \mathbb{R}\}$ از عملگرهای روی فضای باناخ X را **انتگرال پذیر قوی موضعی**[۲۷] گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ و هر بازه بسته $[a, b]$ انتگرال بوخنر زیر وجود داشته باشد

$$\int_a^b A(t)xdt.$$

لم ۲۹.۱.۱ (لم گرانوال)[۲۸] فرض کنید $u(t)$ و $g(t)$ توابع پیوسته نامنفی روی $I = [0, \infty]$ هستند و برای یک c نامنفی نامساوی

$$u(t) \leq c + \int_a^t g(s)u(s)ds \quad , \quad t \in I$$

[۲۵] Symmetric

[۲۶] Skew-symmetric

[۲۷] Local strongly integrable

[۲۸] Gronwall lemma