بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مازندران
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره دکتری در رشته ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی غیر خطی

موضوع:

توابع حافظ یکنوای ماکسیمال و یکنوای ماکسیمال بودن عملگرهای ترکیبی

استاد راهنما:

دکتر محسن علیمحمدی

اساتید مشاور:

دکتر سید منصور واعظ پور

دکتر قاسم علیزاده افروزی

داوران خارجی:

دکتر عبدالرحمن رازانی

دکتر مجید اسحاقی گرجی

دکتر بهرام محمدزاده

داور داخلی:

دکتر علی تقوی جلودار

نگارش:

وحید داداشی سرخکلایی

آبان ۱۳۹۰

قدردانی

شکر و سپاس خدای را، که به انسان نعمت تفکر و قدرت اندیشه را عطا نمود تا بر اساس آن از فقر تا رفاه و از جهل تا کمال دانش و معنویت گام بر دارد. همچنین یکتا پروردگار عالمیان را به بهانه این لطف خداوندی سپاس می‌گویم که از قدرت فهم ریاضیات مرا بی‌بهره نگذاشت و همیشه و همه حال الطاف خداوندی‌اش را در پیمودن این راه پر دردسر، اما شیرین، یار و یاور خود یافته‌ام.

در این فرصت وظیفه خود می‌دانم با خضوع کامل از همه کسانی که به هر نحوی و در هر سمتی به اینجانب یاری رسانده‌اند تشکر و سپاسگزاری نمایم. به ویژه، سپاس فراوان از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر محسن علیمحمدی که با دقت نظر و ارائه رهنمودهای ارزشمند، نقش برجسته‌ای در به ثمر رسیدن این تحقیق ایفا کردند. از جناب آقای دکتر سید منصور واعظ‌پور و دکتر قاسم علیزاده افروزی که به عنوان استاد مشاور با نظرات عالمانه‌شان مرا در ارتقاء سطح پایان نامه یاری کردند، تشکر می کنم. همچنین لازم می دانم از زحمات داوران محترم دکتر رازانی، دکتر اسحاقی، دکتر محمد زاده و دکتر تقوی که با وجود مشغله فراوان زحمت مطالعه این پایان نامه را تقبل نمودند، صمیمانه قدردانی نمایم.

با احترام و سپاس تقدیم به:

- پدر مهربان و مادر دلسوزم،
- همسر مهربانم،
- و فرزند نازنینم وندا.

چکیده

ابتدا یک شرط کافی برای یکنوای ماکسیمال عملگر $S + A^*TA$ ارائه می‌کنیم که در آن $S : X \rightharpoonup X^*$ و $T : Y \rightharpoonup Y^*$ دو عملگر یکنوای ماکسیمال، $A : X \to Y$ یک نگاشت خطی پیوسته با الحاق A^* و X و Y فضاهای باناخ انعکاسی می‌باشند. با استفاده از تابع نمایش S و T تابع نمایشی برای $S + A^*TA$ معرفی می‌کنیم که ثابت می‌کند $S + A^*TA$ یک عملگر یکنوای ماکسیمال است. همچنین تحت شرایطی روی مجموعه یکنوای ماکسیمال $M \subset X \times X^*$ و نگاشت مجموعه مقدار $T : X \times X^* \rightharpoonup Y \times Y^*$ نشان می‌دهیم که $T(M)$ یکنوای ماکسیمال است و به عنوان دو نتیجه از این قسمت شرایطی برای یکنوای ماکسیمال بودن مجموع و ترکیب به‌دست می‌آوریم. سپس الگوریتم جدیدی را برای خانواده شمارا از نگاشت‌های غیرانبساطی نسبت به نگاشت غیر انبساطی دیگری ارائه می‌کنیم و سپس چندین قضیه همگرایی قوی از الگوریتم تکرار تعریف شده ثابت می‌شوند و کاربردهایی از قضایای ثابت شده را برای به‌دست آوردن ریشه‌های عملگر افزاینده ارائه می‌گردند. در پایان نتیجه ای از نوع تجزیه و همچنین یک قضیه ساندویچ برای توابع نیم بسته محدب اثبات شده‌اند. به عنوان نتیجه‌ای از قضیه ساندویچ به یک قاعده جمع زیر دیفرانسیل محدب و دو نتیجه جداسازی می‌رسیم که از قاعده جمع زیر دیفرانسیل محدب به دست آمده، برای حل مسئله برنامه ریزی محدب به کار گرفته شده است.

کلمات کلیدی: عملگرهای یکنوا، عملگرهای یکنوای ماکسیمال، قوانین مجموع و ترکیب عملگرهای یکنوای ماکسیمال، فرآیند محدب، تابع نمایش، قاعده جمع زیر دیفرانسیل محدب، نامساوی تغییراتی، الگوریتم تکرار، عملگر افزاینده.

لیست علائم و اختصارات

گردایه زیرمجموعه‌های X	$\mathcal{P}(X)$
درون مجموعه A	$\mathrm{Int}(A)$ (A^o)
بستار مجموعه A	$\mathrm{Cl}(A)$ $(\overline{A})$
نیم درون مجموعه A	$s\text{-}\mathrm{Int}(A)$
نیم بستار مجموعه A	$s\text{-}\mathrm{Cl}(A)$
غلاف آفینی مجموعه A	$\mathrm{aff}(A)$
غلاف محدب مجموعه A	$\mathrm{conv}(A)$
غلاف مخروطی مجموعه A	$\mathrm{cone}(A)$
درون جبری A نسبت به M	$aint_M A$
درون جبری نسبی A	${}^iA$
مجموعه ${}^iA$ است اگر $\mathrm{aff}(A)$ بسته باشد و در غیر این صورت تهی است	${}^{ic}A$
هسته A	$core(A)$
f نگاشتی است از مجموعه X به توی مجموعه Y	$f : X \longrightarrow Y$
T عملگر مجموعه مقداری است از مجموعه X به توی مجموعه Y	$T : X \multimap Y$
تابع مشخصه مجموعه A	χ_A
نرم	$\|.\|$
متریک	$d(.,.)$
دوگان X	X^*
دوگان دوم X	X^{**}
دامنه نگاشت f	$\mathrm{dom}(f)$
ابر نمودار نگاشت f	$\mathrm{Epi}(f)$
گردایه همه توابع انقباضی روی C	Π_C
دامنه عملگر مجموعه مقدار T	$\mathrm{Dom}(T)$
برد عملگر مجموعه مقدار T	$\mathrm{Range}(T)$
نمودار عملگر مجموعه مقدار T	$\mathrm{Gph}(T)$

مجموعه نقاط ثابت T .... $F(T)$

$\{x \in X: \ T(x) = \circ\}$ .... $ker(T)$

مشتق گتو T .... δT

فرآیند .... $\mathcal{C}$

زیر دیفرانسیل f .... ∂f

مزدوج فنچل f .... f^*

گردایه فیتزپاتریک نگاشت یکنوای ماکسیمال S .... $\mathcal{F}_S$

تابع فیتزپاتریک نگاشت یکنوای ماکسیمال S .... φ_S

تابع نمایش نگاشت یکنوای ماکسیمال S .... f_S

نگاشت تصویر روی C .... Pr_C

نگاشت دوگانگی .... $\mathcal{J}$

مخروط نرمال در C .... N_C

زوج دوگانگی .... $\langle .,. \rangle$

تابع شاخص C .... ι_C

$\langle .,. \rangle + \iota_S$ .... c_S

$\{(x,x^*) \in X \times X^* \mid f(x,x^*) = \langle x^*, x\rangle\}$ .... $K(f)$

$\{(x,x^*) \in X \times X^* \mid f^*(x^*,x) = \langle x^*, x\rangle\}$ .... $T(f)$

فضای هیلبرت .... $\mathcal{H}$

گرادیان .... grad

عملگر حلال .... $\mathcal{J}_r$

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها

۱—۱ مقدماتی از آنالیز تابعی، آنالیز مجموعه مقدار و آنالیز محدب

فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد. زیر مجموعه A از X **نیم باز** نامیده می‌شود هرگاه یک $U \in \tau$ موجود باشد که $U \subseteq A \subseteq \mathrm{Cl}(U)$ یا به طور معادل $A \subseteq \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$[۳۹]. متمم مجموعه‌های نیم باز مجموعه **نیم بسته** نامیده می‌شوند. به آسانی می‌توان دید که A نیم بسته است اگر و فقط اگر یک مجموعه بسته F از τ موجود باشد که $\mathrm{Int}(F) \subseteq A \subseteq F$ و یا معادلاً $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq A$. هر مجموعه باز و محدب در یک فضای باناخ نیم بسته است در حالی که مثال‌های فراوانی از مجموعه‌های نیم بسته موجودند که باز و محدب نیستند. به ازای هر زیر مجموعه A از X، **نیم بستار** به وسیله

$$s\text{-}\mathrm{Cl}(A) = \bigcap\{B : B \supseteq A, \text{ نیم بسته است } B\}$$

تعریف می گردد. همچنین **نیم درون** A با $s\text{-}\mathrm{Int}(A) = \bigcup\{U : A \supseteq U, \text{ نیم باز است } U\}$ تعریف می‌شود. به وضوح $s\text{-}\mathrm{Cl}(A) = A$ اگر و فقط اگر A نیم بسته باشد و به طور مشابه $s\text{-}\mathrm{Int}(A) = A$ اگر و فقط اگر A نیم باز باشد.

قضیه ۱.۱ (قضیه نگاشت باز)[۶۹] فرض کنید X و Y فضاهای فرشه و $T : X \to Y$ خطی پیوسته و پوشا باشد. آنگاه T بازاست.

با استفاده از قضیه نگاشت باز نتیجه مفید و جالب زیر را داریم:

نتیجه ۲.۱ [۶۹] فرض کنید X و Y فضاهای فرشه، $A \subset X$ و $T : X \to Y$ عملگر خطی پیوسته باشد. همچنین $\mathrm{Im}(T)$ بسته باشد. آنگاه $T(A)$ بسته است اگر و تنها اگر $A + \ker(T)$ بسته باشد.

تعریف ۳.۱ فرض کنید $A : X \to Y$ یک عملگر خطی پیوسته باشد. **الحاق** A عملگر $A^* : Y^* \to X^*$ می‌باشد که به‌صورت $\langle A^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle$ برای هر $x \in X$ و $y^* \in Y^*$ تعریف می گردد.

فرض کنیم X یک فضای برداری خطی حقیقی و A زیرمجموعه ناتهی آن باشد. در این صورت مجموعه A

- **محدب** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $t \in [0, 1]$ و هر $x, y \in X$ داشته باشیم $tx + (1 - t)y \in A$ و **غلاف محدب** A به صورت

$$convA := \bigcap\{V \subset X : \ A \subset V \ and \ V \ convex\}$$

تعریف می‌گردد؛

• **مخروط** نامیده می‌شود هرگاه $\mathbb{R}_+.A \subset A$ و **غلاف مخروطی** A به صورت

$$coneA := \{\lambda x \mid \lambda \geq ۰,\ x \in A\} = \mathbb{R}_+.A$$

تعریف می‌گردد؛

• **آفین** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $t \in \mathbb{R}$ و هر $x, y \in X$ داشته باشیم $tx + (۱ - t)y \in A$ و **غلاف آفینی** A به صورت

$$affA := \bigcap\{V \subset X :\ A \subset V\ and\ V\ affine\}$$

تعریف می‌گردد.

تعریف ۴.۱ فرض کنیم $M \subset X$ زیرفضای خطی و $A \subset X$ ناتهی باشند. **درون جبری** A نسبت به M به‌صورت

$$aint_M A := \{a \in X |\ \forall x \in M,\ \exists \delta > ۰, \forall \lambda \in [۰, \delta] : a + \lambda x \in A\}$$

تعریف می‌گردد. بدیهی است که $aint_M A \subset A$. در حالت خاصی که $M = aff(A - A)$ باشد $aint_M A$ را با نماد ${}^iA$ نشان می‌دهند و آن را **درون جبری نسبی** A می‌نامند. همچنین مجموعه ${}^{ic}A$ را به‌صورت

$${}^{ic}A := \begin{cases} {}^iA & if\ aff(A)\ is\ a\ closed\ set, \\ \emptyset & otherwise. \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم.

قضیه ۵.۱ [۶۹] گزاره‌های زیر برای زیرمجموعه غیرتهی و محدب A از X معادل می‌باشند.

الف— $a \in {}^iA$.

ب— $\forall x \in A,\ \exists \lambda > ۰, (۱ + \lambda)a - \lambda x \in A$

ج— $cone(A - a) = cone(A - A)$

د— $cone(A - a)$ زیرفضای خطی از X است.

ه— $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} n(A - a)$ زیرفضای خطی از X است.

قضیه ۶.۱ [۶۹] گزاره‌های زیر برای زیرمجموعه غیرتهی و محدب A از X معادل می‌باشند.

الف— $x \in^{ic} A$.

ب— $cone(A-x)$ زیرفضای خطی بسته‌ای از X است.

ج— $\bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda(A-x)$ زیرفضای خطی بسته‌ای از X است.

تعریف ۷.۱ فرض کنیم E و F دو مجموعه ناتهی باشند. اگر به هر $x \in E$ یک زیر مجموعه $T(x)$ از F نسبت دهیم، تناظر $x \mapsto T(x)$ را یک **نگاشت مجموعه مقدار** از E به F گوییم و با نماد $T : E \multimap F$ نشان می‌دهیم. برای یک نگاشت مجموعه مقدار $T : E \multimap F$، **دامنه** T به صورت $\mathrm{Dom}(T) = \{x \in E : T(x) \neq \emptyset\}$، **برد** T به صورت $\mathrm{Range}(T) = \{y \in F : \exists x \in E,\ y \in T(x)\}$، **وارون** T به صورت $T^{-1}(y) = \{x \in E : y \in T(x)\}$ و **نمودار** T را با $\mathrm{Gph}(T)$ نشان داده و به صورت $\mathrm{Gph}(T) = \{(x,y) \in E \times F : y \in T(x)\}$ تعریف می‌کنیم. با استفاده از تعریف نمودار به راحتی می‌توان نشان داد بین زیر مجموعه‌های $E \times F$ و نگاشت‌های مجموعه مقدار از E به F یک تناظر یک به یک موجود است. از این رو نگاشت مجموعه مقدار $T : E \multimap F$ را به صورت $T \subseteq E \times F$ نیز می‌توان نشان داد. به ازای $c \in \mathbb{R}$، قرار می‌دهیم $cT = \{(x, cy) : (x,y) \in T\}$. همچنین اگر $S, T : E \multimap F$ دو نگاشت مجموعه مقدار باشند، جمع آن‌ها به صورت

$$S + T = \{(x, y+z) : (x,y) \in S, (x,z) \in T\}$$

تعریف می‌گردد.

تعریف ۸.۱ نگاشت $T : X \to X^*$ در $x \in X$ مشتق‌پذیر گتو گوییم، اگر برای هر $h \in X$ حد

$$\delta T(x)h = \lim_{t \to 0} \frac{T(x+th) - T(x)}{t}$$

موجود بوده و همچنین تابعی خطی و پیوسته از h باشد.

تعریف ۹.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. تابع $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را **محدب** نامیم هرگاه برای هر $t \in [0,1]$ و هر $x, y \in X$ داشته باشیم $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. **دامنه** f را با $\mathrm{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ و **ابر نمودار** f را با $\mathrm{Epi}(f) := \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$ تعریف می‌نماییم. گوییم f سره است هرگاه $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$.

تعریف ۱۰.۱ تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را در نقطه $x \in X$ **زیر دیفرانسیل پذیر** نامیم هرگاه یک $x^* \in X^*$ موجود باشد به طوری که برای هر $y \in X$ داشته باشیم $f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle$. مجموعه تمام $x^* \in X^*$ که در نامساوی فوق صدق می‌کنند را **زیر دیفرانسیل** f در x نامیده و با $\partial f(x)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۱ [۶۹] اگر تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ سره، محدب و نیم پیوسته پایینی باشد آنگاه در نقاط درونی دامنه خود زیر دیفرانسیل پذیر است ($\partial f(x) \neq \emptyset$).

تعریف ۱۲.۱ تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ در $x \in X$ مشتق‌پذیر گتو گوییم، اگر برای هر $h \in X$ حد

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

موجود بوده و همچنین تابعی خطی و پیوسته از h باشد. در این حالت $f'(x)$ را مشتق گتو می‌نامیم.

لم ۱۳.۱ [۶۹] فرض کنید که $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع محدب سره روی X باشد که در هر نقطه $x \in X$ مشتق‌پذیر گتو است، آنگاه زیر دیفرانسیل f در این نقطه تک عضوی است و $\partial f(x) = f'(x)$.

تعریف ۱۴.۱ مزدوج فنچل[۱] تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ تابع $f^* : X^* \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ می‌باشد که برای هر $x^* \in X^*$ به‌صورت

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in X} \{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}$$

تعریف می‌گردد. تابع f^* محدب است و اگر دامنه f غیر تهی باشد هیچگاه f^* مقدار $-\infty$ را نخواهد گرفت. مزدوج تابع $h : X^* \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ مشابهاً به‌صورت

$$h^* : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad h^*(x) := \sup_{x^* \in X^*} \{\langle x^*, x\rangle - h(x^*)\} \tag{۱.۱}$$

تعریف می‌گردد.

[۱] Fenchel conjugate

قضیه زیر یک نتیجه ساده ولی بسیار مهم در ارتباط با توابع مزدوج می‌باشد.

قضیه ۱.۱۵ [۶۹] فرض کنید $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$، $x \in X$ و $x^* \in X^*$. آنگاه:

الف— $f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x^* \in \partial f(x)$.

ب— اگر $f \leq g$ آنگاه $g^* \leq f^*$.

ج— f^* محدب و به‌طور ضعیف ستاره نیم پیوسته پایینی است و از این رو $\mathrm{Epi}(f^*)$ به‌طور ضعیف ستاره بسته است.

قضیه ۱.۱۶ [۶۹] فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ و $g : Y \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ دو تابع سره و $\phi : X\times Y \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ به صورت $\phi(x, y) := f(x) + g(y)$ تعریف شده باشد، آنگاه برای هر $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ داریم $\phi^*(x^*, y^*) = f^*(x^*) + g^*(y^*)$.

قضیه ۱.۱۷ [۶۹] فرض کنید $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ تابعی سره و محدب باشد. اگر f در نقطه $x \in \mathrm{dom}(f)$ نیم پیوسته پایینی باشد آنگاه $f^{**}(x) = f(x)$.

نگاشت دوگانگی $\mathcal{J} : X \multimap X^*$ به ازای هر $x \in X$ به صورت

$$\mathcal{J}(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x\|^۲ = \|x^*\|^۲\}$$

تعریف می‌شود. نگاشت دوگانگی همان زیر مشتق تابع محدب نیم پیوسته پایینی $\frac{\|\cdot\|^۲}{۲}$ است. به راحتی می‌توان نشان داد که $\mathcal{J}$ در فضای هیلبرت همان نگاشت همانی است. به ازای یک مجموعه محدب $C \subseteq X$ و $x \in C$، **مخروط نرمال** از C در x با نماد $N_C(x)$ نشان داده می‌شود و به صورت

$$N_C(x) = \{x^* \in X^* : \forall y \in C, \langle x^*, y - x\rangle \leq ۰\}$$

تعریف می‌گردد. همچنین به ازای یک مجموعه محدب $C \subseteq X$ و $w \in X$، **تصویر** w **روی** C مجموعه

$$P_C(w) = \{z \in C : \|w - z\| \leq \|w - x\|, \forall x \in C\}$$

است. اگر $z \in P_C(w)$، آنگاه

$$\exists w^* \in \mathcal{J}(w - z) : \forall y \in C, \quad \langle w^*, y - z\rangle \leq ۰. \qquad (۱.۲)$$

زمانی که C بسته و محدب و X یک فضای باناخ انعکاسی است، آنگاه $P_C(w)$ ناتهی است.

فصل ۲

عملگرهای یکنوا

عملگرهای یکنوا کاربردها و تأثیرات فراوانی در رده‌های بسیار وسیعی از علوم از جمله در مکانیک، فیزیک، بهینه سازی، کنترل، برنامه ریزی غیر خطی، اقتصاد و علوم مهندسی فراهم می‌سازند. از این رو این فصل را به معرفی و مرور خواص اساسی این نوع عملگرها می‌پردازیم.

۲—۱ عملگرهای یکنوا

مفهوم عملگرهای یکنوا برای اولین بار توسط مینتی[۱] [۴۴] و زارانتونلو[۲] [۷۰] به طور کاملاً جداگانه معرفی شده‌اند. این معرفی به دو روش انجام گرفت. روش اول به عنوان تعمیم چند بعدی از توابع غیر نزولی توسط مینتی و روش دوم که توسط زارنتونلو ارائه شد، به عنوان تعمیمی از درون ریختی خطی با ماتریس‌های نیم ـمعین مثبت می‌باشد. به عنوان مثال مشتق فرشه[۳] یک تابع محدب هموار و از نگاه مجموعه مقدار، زیر مشتق یک تابع محدب نیم پیوسته پایینی عملگر یکنوا می‌باشند. عملگرهای یکنوا کلید بسیار ارزشمندی برای یافتن جواب‌های نامساوی‌های تغییراتی یکنوا، شمولیت‌های تغییراتی یکنوا و همچنین حل مسأله مینیمم سازی محدب مقید می‌باشند[۱۹، ۷۱].

تعریف ۱.۲ فرض کنید که X یک فضای باناخ و $T : X \multimap X^*$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد. T را **یکنوا** گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$، $x^* \in T(x)$ و $y^* \in T(y)$ داشته باشیم $\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq \circ$. T را **اکیداً یکنوا** گوییم اگر برای هر $x \neq y \in X$، $x^* \in T(x)$ و $y^* \in T(y)$ داشته باشیم $\langle x^* - y^*, x - y \rangle > \circ$. همچنین T را **یکنوای ماکسیمال** گوییم هرگاه T یکنوا بوده و نمودار T به طور صریح مشمول در نمودار یک عملگر یکنوای T' نباشد. مجموعه $M \subseteq X \times X^*$ **یکنواست** هرگاه برای هر $(x, x^*), (y, y^*) \in M$ داشته باشیم $\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq \circ$. همچنین M **یکنوای ماکسیمال** است هرگاه M به طور صریح مشمول در یک مجموعه یکنوای M' نباشد. پس عملگر T یکنوا(ی ماکسیمال) است اگر و فقط اگر نمودار آن یک مجموعه یکنوا(ی ماکسیمال) باشد.

به عنوان چند مثال از عملگرهای یکنوا می‌توان به موارد ذیل اشاره نمود.

- تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یکنوا به معنی بالاست اگر و فقط اگر f یک تابع صعودی باشد، یعنی $x \leq y$ ایجاب کند $f(x) \leq f(y)$ یا به طور معادل $(x - y)\big(f(x) - f(y)\big) \geq \circ$ به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ برقرار باشد.

---
[۱] Minty
[۲] Zarantonello
[۳] Frechet

- اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد و $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^* \equiv \mathcal{H}$ تابعی خطی باشد. در این صورت T یکنواست اگر و فقط اگر T یک عملگر مثبت باشد، یعنی به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $\langle Tx, x\rangle \geq ۰$. به طور کلی فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد، تابع خطی $T : X \to X^*$ یکنواست اگر و فقط اگر $x \in X$ داشته باشیم $\langle Tx, x\rangle \geq ۰$، چنین توابعی را **نیم معین مثبت** می‌نامند.

- فرض کنیم $۰ < r \in \mathbb{R}$ و $A \subseteq [-r, r]$. نگاشت مجموعه مقدار $T : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}$ تعریف شده با

$$T(x) := \begin{cases} x - r & x < ۰ \\ A & x = ۰ \\ x + r & x > ۰ \end{cases} \tag{۱.۲}$$

یک نگاشت یکنواست. همچنین در حالت $A = [-r, r]$ عملگر T یکنوای ماکسیمال است.

- گیریم $f : X \to (-\infty, +\infty]$ یک تابع سره محدب نیم پیوسته پایینی باشد. در این صورت ∂f یک عملگر یکنواست، حتی یکنوای ماکسیمال نیز هست. لذا نگاشت دوگانگی به عنوان زیر مشتق تابع محدب نیم پیوسته پایینی $\frac{\|\cdot\|^۲}{۲}$ یکنوای ماکسیمال است.

- فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و C یک زیر مجموعه ناتهی محدب بسته از آن باشد. نگاشت تصویر روی C یک عملگر یکنواست.

تعریف ۲.۲ عملگر $T : X \multimap X^*$ را در نظر می‌گیریم. گوییم زوج $(x, x^*) \in X \times X^*$ در **ارتباط یکنوایی با** T است اگر برای هر $(y, y^*) \in \mathrm{Gph}(T)$ داشته باشیم $\langle x - y, x^* - y^*\rangle \geq ۰$.

گزاره ۳.۲ عملگر یکنوای $T : X \multimap X^*$ ماکسیمال است اگر و فقط اگر برای هر $(x_۰, x_۰^*) \in X \times X^*$ به طوری که $(x_۰, x_۰^*)$ وابسته یکنوایی با تمام اعضای $(y, y^*) \in \mathrm{Gph}(T)$ باشد، داشته باشیم $(x_۰, x_۰^*) \in \mathrm{Gph}(T)$.

قضیه ۴.۲ فرض کنیم X یک فضای باناخ و عملگر یکنوای $T : X \to X^*$ در همه نقاط X تعریف شده باشد($\mathrm{Dom}(T) = X$). اگر T قوی به ضعیف ستاره پیوسته باشد، آنگاه T ماکسیمال است.

تذکر ۵.۲ اگر $\mathrm{Dom}(T) \subsetneq X$ باشد، آنگاه قضیه فوق درست نخواهد بود. برای مثال اگر $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف گردد، آنگاه T به وضوح یکنواست. همچنین تابع فوق در هر نقطه از $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ پیوسته است، ولی ماکسیمال نیست.

$$T(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ \emptyset & x = 0 \end{cases}$$

نتیجه ۶.۲ اگر $T : X \multimap X^*$ یکنوای ماکسیمال باشد، آنگاه $T(x)$ محدب و ضعیف ستاره بسته است.

قضیه ۷.۲ اگر X یک فضای باناخ انعکاسی و $T : X \multimap X^*$ یکنوای ماکسیمال باشد، آنگاه T^{-1} نیز یکنوای ماکسیمال است.

قضیه ۸.۲ [۱۹] فرض کنیم C یک زیر مجموعه محدب فشرده ضیف ستاره از X^* و تابع $\varphi : C \to X$ ضعیف ستاره به نرم پیوسته است. اگر $M \subseteq E \times C$ یک مجموعه یکنوا باشد، آنگاه یک $x_0^* \in C$ موجود است که $M \cup \{(\varphi(x_0^*), x_0^*)\}$ همچنان یکنوا باشد.

قضیه ۹.۲ [۱۹] فرض کنید X یک فضای باناخ انعکاسی و $M \subseteq X \times X^*$ یک مجموعه یکنوا باشد. آنگاه M یکنوای ماکسیمال است اگر و فقط اگر برای هر $(x, x^*) \in X \times X^*$ عضوی مانند (y, y^*) از M موجود باشد به طوری که $||y - x||^2 + ||y^* - x^*||^2 + 2\langle y - x, y^* - x^* \rangle = 0$.

قضیه ۱۰.۲ فرض کنیم X یک فضای باناخ انعکاسی و $M \subseteq X \times X^*$ یک مجموعه یکنوا باشد. در این صورت M یکنوای ماکسیمال است اگر و تنها اگر $X \times X^* = M + \mathrm{Gph}(-\mathcal{J})$ اگر و تنها اگر $X \times X^* = M + \mathrm{Gph}(-\lambda\mathcal{J})$ برای هر $\lambda > 0$.

قضیه ۱۱.۲ [۱۹] فرض کنید X فضای انعکاسی و $T : X \multimap X^*$ یکنوای ماکسیمال باشد آنگاه $\text{Range}(T + \mathcal{J}) = X^*$. برعکس اگر T یکنوا، $\text{Range}(T + \mathcal{J}) = X^*$، $\mathcal{J}$ و $\mathcal{J}^{-1}$ تک مقداری باشند آنگاه T یکنوای ماکسیمال است.

۲–۲ شرایط کافی برای یکنوایی مجموع و ترکیب عملگرهای یکنوای ماکسیمال

عملگرهای یکنوای ماکسیمال تعریف شده روی فضاهای باناخ در دهه ۱۹۶۰ معرفی گردیده و مورد مطالعه قرار گرفتند. در این ارتباط می‌توان مقالات [۱۷، ۵٦، ۵۷] را ذکر نمود که گامهای مهم اولیه را در این زمینه برداشتند. به‌ویژه در سالهای اخیر به خاطر اینکه ارتباط عملگرهای یکنوای ماکسیمال با آنالیز محدب به کمک بعضی از توابع از قبیل تابع فیتزپاتریک و یا تعمیم‌هایی از این نوع مورد تاکید قرار گرفت، این نوع عملگرها بیشتر مورد مطالعه قرار گرفته و کاربردهای فراوان آنها پدیدار گشته‌اند. یکی از مسئله‌های مهم و شناخته شده که شامل هر دوی عملگرهای یکنوای ماکسیمال و آنالیز محدب می‌باشد پیدا کردن شرایط کافی برای یکنوای ماکسیمال بودن عملگرهای A^*TA و $S + A^*TA$ است که در اینجا $A : X \to Y$ نگاشت خطی کراندار بین دو فضاهای باناخ انعکاسی X و Y و $S : X \multimap X^*$ و $T : Y \multimap Y^*$ عملگرهای یکنوای ماکسیمال می‌باشند. در ارتباط با این مسئله می‌توان به مقالات [۱۰، ۴۷، ۴۸، ٦۸] اشاره نمود. همچنین پیدا کردن یک شرط کافی ضعیف‌تر برای اینکه مجموع دو عملگر یکنوای ماکسیمال روی فضاهای باناخ انعکاسی باز هم یک عملگر یکنوای ماکسیمال باشد یک چالش قدیمی برای بسیاری از ریاضی‌دانان می‌باشد. بیشتر از چهار دهه است که این مسئله بوجود آمده است. از برائر [۱۷] و راکافلار [۵۷] در دهه ۱۹٦۰ تا مقالات اخیر بوروین [۱۰]، زالینسکو[٦۸] و بوت و همکارانش[۱٦]. در این بخش به بررسی برخی از مهمترین شرایطی می‌پردازیم که مجموع ، ترکیب و یا هر دوی عملگرهای یکنوای ماکسیمال باز هم عملگر یکنوای ماکسیمال باشد.

تعریف ۱۲.۲ فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای از فضای باناخ X باشد. گوییم x در هسته S قرار دارد و با $x \in core(S)$ نشان می‌دهیم هرگاه $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(S - x) = X$. بدیهی است که $Int(S) \subset core(S)$.