بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه کسری با استفاده از روشهای هموتوپی

استاد راهنما :

دکتر محمد تقی خداداد

استاد مشاور:

دکتر امین رفیعی

نگارش :

حمید عباسی

تابستان۹۲

سوگند نامه دانش آموختگان دانشگاه تربیت معلم سبزوار

به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه بر نگذرد

اینک که به خواست آفریدگار پاک ، کوشش خویش و بهره گیری از دانش استادان و سرمایه های مادی و معنوی این مرز و بوم، توشه ای از دانش و خرد گردآورده ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می کنم که در به کارگیری دانش خویش، همواره بر راه راست ودرست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان و دیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می گیرم که ازهمه دانش و توان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر برای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می بندم که همواره کرامت انسانی را در نظر داشته باشم و همنوعان خود را در هر زمان و مکان تا سر حد امکان یاری دهم. سوگند می خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که با راه و رسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت و اصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مباینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز ، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

نام و نام خانوادگی وامضای دانشجو

تاییدیه ی صحت و اصالت نتایج

بسمه تعالی

اینجانب حمید عباسی به شماره دانشجویی ۹۰۱۳۱۳۲۰۵٤ رشته آنالیز عددی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می نمایم که کلیه نتایج این پایان نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف و موارد نسخه برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده ام در صورت اثبات خلاف مندرجات فوق به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مولفان و مصنفان . قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی ضوابط و مقررات آموزشی پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد . و حق هر گونه اعتراض در خصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می نمایم . در ضمن مسئولیت هر گونه پاسخگویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ گونه مسئولیتی در این خصوص نخواهد داشت .

نام و نام خانوادگی :

تاریخ و امضاء:

مجوز بهره برداری از پایان نامه

بهره برداری از این پایان نامه در چهار چوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می شود بلامانع است :

- بهره برداری از این پایان نامه برای همگان بلامانع است

استاد راهنما : دکتر محمد تقی خداداد

تاریخ :

امضاء:

تقدیم به :

((پدر و مادر عزیزم

همسرمهربان و فداکارم

که همواره در طول زندگی مشوق من بوده اند.))

تقدیر و تشکر

خداوند بزرگ را شاکرم که همواره مرا مورد لطف بی دریغ خود قرار داده است.

با سپاس از پروردگار منان در این جا لازم می دانم مراتب سپاس و قدردانی خود را از استاد راهنمای ارجمند و بزرگوارم جناب آقای دکتر محمدتقی خداداد که همواره با اطلاعات خوب و راهنمایی های خود در به ثمر رسیدن این پایان نامه از هیچ کوششی دریغ نکرده اند ابراز کنم.

و از مشاور گرانقدرم جناب آقای دکتر امین رفیعی که در این راه همچون چراغی، راهنمای راهم بودند نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

حمید عباسی

تابستان۹۲

فرم چکیده‌ی پایان‌نامه‌ی دوره‌ی تحصیلات تکمیلی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

دانشگاه حکیم سبزواری

نام خانوادگی دانشجو: عباسی	نام: حمید	ش دانشجویی: ۹۰۱۳۱۳۲۰۵۴
استاد راهنما: دکتر محمد تقی خداداد	استاد مشاور: دکتر امین رفیعی	
دانشکده:علوم ریاضی و کامپیوتر	رشته:ریاضی کاربردی	گرایش:آنالیز عددی
مقطع: کارشناسی ارشد	تاریخ دفاع:۹۲/۶/۱۷	تعداد صفحات:۸۶

عنوان پایان‌نامه: حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه کسری با استفاده از روشهای هموتوپی

کلیدواژه‌ها: معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه کسری، انتگرال کسری ریمان–لیوویل، مشتق کسری کپوتو ، روش آنالیز هموتوپی ، روش آشفتگی هموتوپی .

چکیده: بسیاری از مسائل در علوم و مهندسی به معادلات دیفرانسیل جزئی کسری منجر می شوند. ولی در عمل تعداد کمی از این معادلات را می توان به روش های تحلیلی حل کرد و جواب دقیق آن ها را به دست آورد. بنابراین از روش های عددی برای محاسبه جواب تقریبی آن ها استفاده می کنیم.در این پایان نامه از دو روش آنالیز هموتوپی(HAM) و روش آشفتگی هموتوپی(HPM) برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری استفاده می کنیم.
فصل اول به ارائه تعاریف مقدماتی و مفاهیم و قضایای اساسی اختصاص دارد.
در فصل دوم به معرفی روش آنالیز هموتوپی و کاربرد آن برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری و حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی کسری پرداخته شده است.
در فصل سوم از روش آشفتگی هموتوپی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری و حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی کسری استفاده شده و چند مثال برای بیان مؤثر بودن این روش آورده شده است.

امضای استاد راهنما

فهرست مطالب

لیست علایم و نشانه ها

J^{α} عملگر انتگرال کسری ریمان - لیوویل از مرتبه $\alpha > ۰$

D^{α} مشتق کسری ریمان - لیوویل از مرتبه $\alpha > ۰$

D_{*}^{α} مشتق کسری کپوتو از مرتبه α

D_{*x}^{α} عملگر کسری- مکان کپوتو از مرتبه $\alpha > ۰$

D_{*t}^{α} عملگر کسری- زمان کپوتو از مرتبه $\alpha > ۰$

$E_{\alpha,\beta}(t)$ تابع میتاگ - لفلر دو متغیره

لیست جداول

لیست اشکال

فصل۱

مقدمات

۱-۱ مقدمه

اکثر پدیده های مهندسی در زمینه های ترمودینامیک، دینامیک سیالات، الکتریسیته، مغناطیس، مکانیک، انتقال حرارت و ... با معادلات دیفرانسیل جزئی کسری توصیف می شوند، لذا به دلیل کاربرد زیاد و مهم این گونه معادلات دیفرانسیل در علوم و مهندسی توجه بسیاری از پژوهشگران به آن ها جلب شده است. بنابراین روش های حل این معادلات از اهمیت زیادی برخوردارند. اگرچه بسیاری از این معادلات دیفرانسیل توسط روش های تحلیلی قابل حل هستند، لیکن تعداد بیشتری از آنها روش حل تحلیلی ندارند یا روش های دقیق و مؤثر برای حل معادلات دیفرانسیل کسری به سادگی به دست نمی آیند. بنابراین از روش های عددی برای حل آن ها استفاده می شود. در این پایان نامه روش آنالیز هموتوپی و روش آشفتگی هموتوپی مورد استفاده قرار گرفته است.

۱-۲ تاریخچه

تلاش های زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری خطی انجام گرفته است.[۱] ,[۲]

ولی کار زیادی برای مسائل غیر خطی انجام نگرفته است و تعداد کمی برنامه عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری وجود دارد.

در سال های اخیر انواعی از معادلات دیفرانسیل جزئی کسری به کار برده شده است و انگیزه را برای به کار بردن و توسعه دادن برنامه های عددی برای این گونه مسائل افزایش داده است. [۳] ,[۴]

چندین روش عددی برای حل معادلات کسری از قبیل روش تجزیه آدمیان[۱] (ADM) [۵],[۶] ، روش تکرار وردشی (VIM)[۷] ، روش تبدیل لاپلاس[۲]، روش تبدیل فوریه، روش آشفتگی هموتوپی HPM [۸] ، [۹] ، [۱۰] و روش تجزیه هموتوپی HAM [۱۱] ,[۱۲] تا به حال مورد استفاده قرار گرفته اند.

۱-۳ تعاریف اولیه

به منظور درک بهتر مطالب این پایان نامه تعاریف و قضایای مورد نیاز در این فصل آورده می شود. همچنین به معرفی عملگر ریمان- لیوویل[۳]، مشتق کسری ریمان- لیوویل، مشتق کسری کپوتو[۴] و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (از مرتبه معمولی و کسری) خواهیم پرداخت. ضمناً هموتوپی را معرفی و روش هموتوپی را برای معادله جبری غیرخطی $f(x) = ۰$ بیان خواهیم کرد.

۱-۳-۱ دسته بندی معادلات دیفرانسیل

یک معادله دیفرانسیل عبارت است از یک معادله شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن تا مرتبه خاصی. اگر تابع مجهول فقط تابعی از یک متغیر مستقل باشد، معادله را یک معادله دیفرانسیل معمولی نامند و اگر تابع مجهول تابعی از بیش از یک متغیر مستقل باشد، معادله یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا پاره ای نامیده می شود.

۱-۳-۲ معادله دیفرانسیل جزئی

همان گونه که گفته شد، معادله دیفرانسیل را با مشتقات جزئی گویند هرگاه تابع مجهول یک تابع چند متغیره باشد و معمولاً معادله دیفرانسیل جزئی را با علامت اختصاری PDE نشان می دهیم.

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل جزئی برای n متغیر مستقل $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ و متغیر وابسته u عبارت است از :

---

[۱] Adomian
[۲] Laplas
[۳] Lioveil
[۴] Copoto

$$F\left(x_۱, x_۲, \ldots, x_n, u_{x_۱}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_۱x_۲}, u_{x_۱x_۳}, \ldots\right) = ۰ \quad . \qquad (۱.۱)$$

۱-۳-۳ مرتبه معادله دیفرانسیل جزئی

مرتبه یک معادله دیفرانسیل جزئی برابر است با مرتبه بالاترین مشتق موجود در آن.

۱-۳-۴ معادله خطی و غیرخطی

یک معادله دیفرانسیل جزئی را خطی گوییم اگر متغیر وابسته و مشتقات آن در معادله دیفرانسیل به صورت خطی ظاهر شوند در غیر این صورت آن را غیر خطی می گوییم.

برای مثال معادلات زیر، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی هستند:

معادله انتقال حرارت $\dfrac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$

معادله موج $\dfrac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = \dfrac{\partial^۲ \mathrm{u}}{\partial t^۲}$

معادله دوهمساز $\dfrac{\partial^۴ \mathrm{u}}{\partial x^۴} + ۲\dfrac{\partial^۴ \mathrm{u}}{\partial x^۲ \partial y^۲} + \dfrac{\partial^۴ \mathrm{u}}{\partial y^۴} = f(x, y)$

و اما معادلات زیر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی هستند :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} \quad , \quad (x, t) \in R \times [۰,۱)$$

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} + \left(\frac{y+z}{۲\cos(x)} - ۱\right)\frac{\partial^۴ \mathrm{u}}{\partial x^۴} + \left(\frac{x+z}{۲\cos(y)} - ۱\right)\frac{\partial^۴ \mathrm{u}}{\partial y^۴} + \left(\frac{x+y}{۲\cos(z)} - ۱\right)\frac{\partial^۴ \mathrm{u}}{\partial z^۴} = ۰ \ , ۰ < x, y, z < \frac{\pi}{۳} \ , \ ۰ \le t \le ۱$$

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{۱}{۲}\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} - |u|^۲ u \quad , (x, t) \in R \times [۰,۲)$$

۱-۳-۵ جواب های معادلات دیفرانسیل

منظور از یک جواب معادله دیفرانسیل، تابعی است که وقتی خود و مشتقات آن در معادله به جای تابع مجهول و مشتقات آن قرار گیرند معادله برقرار باشد. دسته بندی مختلفی برای جواب های معادلات دیفرانسیل وجود دارد که از آن جمله: جواب بدیهی، جواب ویژه(جواب خصوصی)، جواب عمومی، جواب کامل، جواب حذف شده و جواب غیرعادی را می توان نام برد.

۱-۳-۶ قاعده لایب نیتز

قاعده لایب نیتز برای محاسبه مشتق n ام حاصلضرب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت :

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(f(x)g(x)\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \tag{۲.۱}$$

می باشد.

۱-۳-۷ فرمول محاسبه مشتق n ام تابع مرکب

مشتق n ام تابع مرکب $f(g(x))$ از رابطه

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(f(g(x))) \\ = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} \frac{n!}{(1!)^{k_1}(2!)^{k_2}\ldots(n!)^{k_n}k_1!\,k_2!\ldots k_n!} \\ \times f^{(k_1+k_2+\cdots k^n)}[g(x)][g'(x)]^{k_1}[g''(x)]^{k_2}\ldots\left[g^{(n)}(x)\right]^{k_n}\end{aligned} \tag{۳.۱}$$

به دست می آید.

۱-۳-۸ تعریف

تابع حقیقی $f(t)$، $t>0$ ، در فضای c_α، $\alpha \in R$ ، است هرگاه عدد حقیقی ($p(>\alpha$) وجود داشته باشد به طوری که :

$$f(t) = t^p f_1(t)\ ,\ \ f_1(t) \in [0,1]. \qquad (4.1)$$

واضح است که اگر $\alpha \geq \beta$ ، آن گاه $c_\alpha \subset c_\beta$.

۱-۳-۹ تعریف

تابع حقیقی $f(t)$ ، $t > 0$ ، در فضای c_α^m ، $m \in N \cup \{0\}$ ، است هرگاه $f^m \in \mathrm{c}_\alpha$.

۱- ۴ عملگر ریمان - لیوویل

۱-۴-۱ عملگر انتگرال کسری ریمان - لیوویل از مرتبه $\alpha>0$ برای $f \in c_\alpha$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\mathrm{J}^\alpha f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t \dfrac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, & \alpha > 0\ ,\ \ t > 0\ , \\ f(t), & \alpha = 0\ . \end{cases} \qquad (5.1)$$

در تعریف فوق تابع گاما $\Gamma(\alpha)$ از دستور زیر به دست می آید.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} d(x)\ . \qquad (6.1)$$

مشتق کسری ریمان - لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ برای تابع $f \in c_{-1}^m$ به صورت :

$$D^\alpha f(t) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} J^{m-\alpha} f(t), \qquad m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in N \qquad (7.1)$$

تعریف می شود.

۱-۴-۲ قضیه

اگر $\alpha,\beta > ۰$ ، $\mu > -۱$ و $f \in c_\mu$ ، آن گاه :

$$J^\alpha J^\beta f = J^\beta J^\alpha f = J^{\alpha+\beta} f. \quad (۸.۱)$$

اثبات:

بنا به تعریف داریم :

$$J^\alpha J^\beta \mathrm{f}_{(x)} = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)} \int_{۰}^{x} (x-t)^{\alpha-۱} J^\beta f(t) dt$$

$$= \frac{۱}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{۰}^{x} (x-t)^{\alpha-۱} \int_{۰}^{t} (t-\tau)^{\beta-۱} f(\tau) d\tau dt$$

$$= \frac{۱}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{۰}^{x} \int_{\tau}^{x} (x-t)^{\alpha-۱} (t-\tau)^{\beta-۱} f(\tau) dt d\tau$$

$$= \frac{۱}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{۰}^{x} f(\tau) \int_{\tau}^{x} (x-\mathrm{t})^{\alpha-۱} (\mathrm{t}-\tau)^{\beta-۱} dt d\tau.$$

با تغییر متغیر $t = \tau + s(x-\tau)$ بدست می آوریم :

$$J^\alpha J^\beta f_{(x)} = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{۰}^{x} f(\tau) \int_{۰}^{۱} [(x-\tau)(۱-s)]^{\alpha-۱} [s(x-\tau)]^{\beta-۱} (x-\tau) ds dt$$

$$= \frac{۱}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{۰}^{x} f(\tau) (x-\tau)^{\alpha+\beta-۱} \int_{۰}^{۱} (۱-\mathrm{s})^{\alpha-۱} s^{\beta-۱} ds d\tau . \quad (۹.۱)$$

از طرفی داریم :

$$\int_{۰}^{۱} (۱-s)^{\alpha-۱} \mathrm{s}^{\beta-۱} ds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (۱۰.۱)$$

سپس با جایگزین کردن (۱۰.۱) در(۹.۱) خواهیم داشت:

$$J^\alpha J^\beta f_{(x)} = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{۰}^{x} f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-۱} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} d\tau$$

$$= \frac{۱}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{۰}^{x} f(\tau)\,(x-\tau)^{\alpha+\beta-۱} d\tau = \mathrm{J}^{\alpha+\beta} f(x).$$

۱-۴-۳ قضیه

اگر $\alpha, x > ۰$ ، $\gamma > -۱$، آن گاه

$$\mathrm{J}^{\alpha} x^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+۱)}{\Gamma(\alpha+\gamma+۱)} x^{\alpha+\gamma}\ . \qquad (۱۱.۱)$$

اثبات : با توجه به تعریف عملگر ریمان - لیوویل بدیهی است.

۱-۵ عملگر دیفرانسیل کپوتو

۱-۵-۱ تعریف

فرض کنید $f \in c_{-۱}^{m}$ به طوری که $m \in N \cup \{۰\}$. آن گاه مشتق کسری کپوتو از مرتبه α را با نماد D_{*}^{α} نشان داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\mathrm{D}_{*}^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \mathrm{J}^{m-\alpha} f^{(m)}(x), & m-۱ < \alpha < m, \quad m \epsilon N, \\ \frac{\partial^{m}}{\partial x^{m}} f(x), & \alpha = m. \end{cases}$$

۱-۵-۲ تعریف

فرض می کنیم $u(x,t)$ یک تابع دو متغیره باشد. در این صورت عملگر کسری- زمان کپوتو از مرتبه $\alpha > ۰$ را به صورت

$$D_{*t}^{\alpha} u(x,t) = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} u(x,t)$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial^{m}}{\partial t^{m}} u(x,t)\,, & if\ \ \alpha = m \epsilon N, \\ \frac{۱}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{۰}^{\mathrm{t}} (t-\theta)^{m-\alpha-۱}\ \frac{\partial^{m}}{\partial \theta^{m}} u(x,\theta)\, d\theta\,, & \mathrm{if}\, m-۱ < \alpha < m \end{cases}$$

و عملگر کسری- مکان کپوتو از مرتبه $\alpha > ۰$ را به صورت