دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

معادلات دیفرانسل جزئی کسری مربوط به مکانیک کوانتوم

استاد راهنما

دکتر فریبا بهرامی

استاد مشاور

دکتر کریم ایواز

پژوهشگر

عادل خداویردی زندآبادی

مرداد ۱۳۹۲

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این مجموعه را به پدر، مادر و همسر عزیزم تقدیم می کنم.

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُرُ الْمَخلوق لَمْ یَشْکُرُ الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، خانم دکتر **فریبا بهرامی**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر **کریم ایواز** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
از جناب آقای دکتر **صداقت شهمراد** که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.
از تمام دوستان دوران تحصیلم کمال تشکر و قدردانی را دارم.
از کلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده و همسرم که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

عادل خداویردی زندآبادی
مرداد ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: خداویردی زندآبادی نام: عادل

عنوان: معادلات دیفرانسل جزئی کسری مربوط به مکانیک کوانتوم

استاد راهنما : دکتر فریبا بهرامی

استاد مشاور : دکتر کریم ایواز

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: مرداد ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۷۴

کلید واژه‌ها: انتگرال و مشتق مرتبه کسری، انتگرال ریمان-لیوویل، مشتق ریمان-لیوویل، مشتق کاپوتو، معادلات شرودینگر، مکانیک کوانتوم.

چکیده

محاسبات کسری بیش از ۳۰۰ سال است که یکی از موضوعات ریاضی است، اما کاربردهایش در زمینه فیزیک و مهندسی در سال‌های اخیر گزارش شده است. در ۱۰ سال گذشته، تحلیل رفتار نوسانی توجه فزاینده‌ای را میان ریاضیدانان، فیزیکدانان و مهندسان جذب کرده است.

ما در این پایان‌نامه، حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی کسری را که شامل مشتقات کاپوتو نسبت به زمان و ریمان-لیوویل نسبت به مکان هستند، بررسی خواهیم کرد.

ما در حل این معادلات از تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم، چند مورد خاص از حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری یک بعدی غیر همگن مربوط به مکانیک کوانتوم ارائه شده است.

فهرست مطالب

مقدمه و پیشینه پژوهش

حساب دیفرانسیل مرتبه کسری تنها به معنای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری مرتبه کسری نیست، بلکه نظریه‌ای برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه دلخواه است، که در واقع تعمیم یافته مفهوم مشتق و انتگرال مرتبه صحیح می‌باشد.
محاسبات کسری یکی از موضوعات ریاضی است که حدود ۳۰۰ سال پیش مطرح شد. در آن زمان آبل، اویلر، کاپوتو، فوریه و ... تلاش‌هائی در این زمینه داشتند، ولی به علت عدم برقراری ارتباط بین ریاضی و علوم دیگر، به نتیجه خاصی نرسیدند، اما کاربردهای محاسبات کسری در فیزیک و مهندسی‌ها اخیراً گزارش شده است.
در ۳۰ سال گذشته دانشمندان به این موضوع پی برده‌اند که جواب‌های بدست آمده از توصیف پدیده‌ها با مدل مشتق مرتبه‌ی کسری، بسیار دقیق‌تر از مدل توصیف شده آنها با مشتق مرتبه‌ی صحیح است.
در سال ۱۹۹۴ توسط اکستام[۱] و وسترلند[۲] معادلات دیفرانسیل کسری برای مدل‌سازی خازن‌های الکتریکی، به کار گرفته شده است.
دبناس[۳][۳] در سال ۲۰۰۳ دسته‌ای از معادلات کسری جزئی مربوط به مکانیک سیالات را، ارائه و بررسی کرده است.
در ادامه نیکولا[۴] و بویاند[۵] با به کار بستن تبدیلات کلاسیک لاپلاس و تبدیلات فوریه، راه حلی برای حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی کسری پیدا کرده‌اند.
سازنا و هوبلد [۹] در تعدادی از مقالات خودشان، راه حل‌هایی برای دسته‌ای از معادلات جزئی کسری پیدا کردند.

---

۱ Ekstam

۲ Westerland

۳ Debnath

۴ Nikola

۵ Boyand

نابر [۶] و سازنا[۷] معادلات شرودینگر را از جنبه‌های مختلف در شرایط مشتقات کسری مطالعه نموده‌اند. در ادامه در این پایان‌نامه که بر اساس مقاله [۱۷] می‌باشد، قصد داریم دسته دیگری از معادلات حاکم بر مکانیک کوانتوم را، که مشتقات درگیر در آن‌ها از نوع کاپوتو و ریمان-لیوویل است، بررسی کنیم.

[۶] Naber

[۷] Saxena

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و دیدگاه‌هایی برای تعمیم نظریه دیفرانسیل و انتگرال، که در فصول بعد مورد نیاز خواهد بود، پرداخته می‌شود. همچنین تبدیلات انتگرالی را بیان کرده و به معرفی خصوصیات آنها می‌پردازیم و در ادامه معادله شرودینگر را معرفی می‌کنیم.

۱.۱ تاریخچه

حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری تقریبا دارای قدمتی به اندازه محاسبات کلاسیک، یعنی مشتق و انتگرال مرتبه صحیح می‌باشد. اما اهمیت و توجه به آن در دهه‌های اخیر بیشتر شده است. مطالعات اولیه در این زمینه به اواخر قرن هفده (۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵) باز می‌گردد، یعنی به زمانی که یکی از ریاضیدانان به نام هوپیتال[۱] در نامه‌ای به لایبنیتز[۲] در مورد نمادی که برای مشتق مرتبه‌ی n ام تابع f،

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n},$$

به کار برده بود سوال کرد که اگر $n = \frac{1}{2}$ باشد چه نتیجه‌ای بدست خواهد آمد؟ و لایبنیتز در پاسخ گفت: روزی نتایج خوبی از آن بدست خواهد آمد.

اولین مطالعات کم وبیش هدف‌مند در این زمینه، در آغاز و نیمه قرن نوزدهم توسط لیوویل[۳]، ریمان[۴]

[۱] Hopital

[۲] Leibniz

[۳] Liouville

[۴] Riemann

و هولم‌گرن[۵] انجام شد. اگرچه قبل از آن دانشمندان زیادی همچون اویلر[۶]، آبل[۷]، لاگرانژ[۸]، لاپلاس[۹] و فوریه[۱۰] تلاش‌های زیادی را برای توسعه این علم انجام داده بودند.

۲.۱ توابع خاص در محاسبات کسری

در این قسمت تعدادی از توابع ضروری که در تعریف انتگرال و مشتق کسری استفاده خواهد شد را معرفی می‌کنیم.

۱.۲.۱ تابع گاما

یکی از توابع اصلی در محاسبات کسری تابع گاما است که با انتگرال

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad Re(z) > 0.$$

تعریف می‌شود.

برخی از خواص تابع گاما به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1!, \end{aligned}$$

[۵] Holmgren

[۶] Euler

[۷] Abel

[۸] Lagrange

[۹] Laplace

[۱۰] Fourier

$$\vdots$$

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1) = (z-1)!, \quad z \in \mathbb{Z}^+.$$

تابع گاما نیز می‌تواند به صورت حدی از رابطه‌ی

$$\Gamma(z) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)...(z+n)},$$

بدست آید در صورتی که $Re(z) > 0$.

۲.۲.۱ تابع گامای ناقص

تابع گاما را می‌توان به صورت دو پارامتری به صورت زیر تعریف کرد:

$$\Gamma(z) = \gamma(z,x) + \Gamma(z,x),$$

که

$$\gamma(z,x) = \int_0^x e^{-t}t^{z-1}dt, \qquad x > 0,$$

را تابع گامای ناقص می‌نامند و $\Gamma(z,x)$ برابر است با

$$\Gamma(z,x) = \int_x^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \qquad x > 0.$$

۳.۲.۱ تابع بتا

در بسیاری از موارد به جای تابع گاما از نزدیکترین تعریف به آن یعنی تابع بتا استفاده می‌شود.
تابع بتا به صورت

$$\beta(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \qquad Re(z) > 0, Re(w) > 0,$$

تعریف می‌شود.

روابط زیر بین تابع بتا و گاما برقرار است.

$$\beta(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},$$
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\beta(z,1-z)=\frac{\pi}{sin(\pi z)},$$
$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n+1)}.$$

۴.۲.۱ تابع بتای ناقص

تابع بتای ناقص به صورت

$$\beta_x(y,z)=\int_0^x t^{y-1}(1-t)^{z-1}dt, \qquad 0\leq x\leq 1,$$

تعریف می‌شود و نرمال شده تابع بتا ناقص با نماد زیر تعریف می‌شود:

$$I_x(y,z)=\frac{\beta_x(y,z)}{\beta(y,z)}.$$

۵.۲.۱ تابع میتاق لفلر

تابع میتاق لفلر[۱۱] در محاسبات کسری نقش عمده‌ای دارد. این تابع برای اولین بار توسط میتاق و لفلر معرفی شد و به همین دلیل آن را تابع میتاق لفلر می‌گویند. به همان نسبت که تابع نمایی در معادلات مرتبه‌ی صحیح نقش مهمی را ایفا می کند، در محاسبات مرتبه کسری نیز تابع میتاق لفلر نقش مهمی را بر عهده دارد که در حالت های تک پارامتری و دو پارامتری تعریف می‌شود.

[۱۱] Mittag-Leffler

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $\alpha > 0$ باشد، در این صورت تابع $E_\alpha(z)$ را که به صورت
$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$
تعریف می‌شود، زمانی که سری همگراست تابع میتاق لفلر از مرتبه α می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $\alpha, \beta > 0$ باشد، در این صورت تابع $E_{\alpha,\beta}(z)$ را که به صورت
$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$
تعریف می‌شود، زمانی که سری همگراست تابع میتاق لفلر دو پارامتری از مرتبه α و β می‌نامند.

تذکر ۳.۲.۱. ملاحظه می‌کنیم که تابع میتاق لفلر دو پارامتری وقتی $\beta = 1$ باشد تبدیل به یک پارامتری می‌شود، یعنی به ازای $\beta = 1$ داریم
$$E_{\alpha,\beta}(z) = E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z).$$

قضیه ۴.۲.۱. *تابع میتاق لفلر دو پارامتری $E_{\alpha,\beta}(z)$ را که $\alpha, \beta > 0$، در نظر بگیرید، در این صورت سری توانی $E_{\alpha,\beta}(z)$ به ازای تمامی $z \in \mathbb{C}$ همگرا است یا به عبارت دیگر تابع تام است.*

برهان. با استفاده از تعریف تابع میتاق لفلر دو پارامتری ملاحظه می‌کنیم که در سری
$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j,$$
اگر $a_j = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha j + \beta)}$، آنگاه همان تابع میتاق لفلر تولید می‌شود. حال با استفاده از فرمول معروف استرلینگ یعنی
$$\Gamma(x+1) = (\frac{x}{e})^x \sqrt{2\pi x}(1 + o(1)),$$
و با استفاده از آزمون ریشه خواهیم داشت:
$$a_j^{\frac{1}{j}} = (\frac{e}{\alpha j + \beta})^{(\alpha + \frac{\beta}{j})}(2\pi(\alpha j + \beta))^{(\frac{-1}{2j})}(1 + o(1)),$$

وقتی $j \longrightarrow \infty$ چون $\alpha, \beta > 0$، مقدار $(\frac{e}{\alpha j + \beta})^{(\alpha + \frac{\beta}{j})}$ به صفر میل می‌کند و در نتیجه کل عبارت به صفر میل می‌کند، بنابراین بنا به آزمون ریشه شعاع همگرایی سری فوق بی‌نهایت می‌شود، یا سری به ازای تمام $x \in \mathbb{C}$ همگرا می‌باشد. برای مطالعه بیشتر به [۴] مراجعه شود. $\square$

برای تابع میتاق لفلر خصوصیات و شرایط ذیل برقرار می‌باشد که برای نمونه یکی را ثابت می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
E_0(z) &= E_{0,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1, \\
E_1(z) &= E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \\
E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \\
E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{sinh(z)}{z}, \\
E_2(-z^2) &= E_{2,1}(-z^2) = cos(z), \quad z \in \mathbb{C}, \\
E_2(z^2) &= E_{2,1}(z^2) = cosh(z), \quad z \in \mathbb{C}, \\
E_{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}}) &= E_{\frac{1}{2},1}(z^{\frac{1}{2}}) = (1 + erf(z))e^z, \quad z > 0, \\
E_{1,r}(z) &= \frac{1}{z^{r-1}}(e^z - \sum_{k=0}^{r-2} \frac{z^k}{k!}), \quad z \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{N}, \\
\frac{d^m}{dz^m} E_m(z^m) &= E_m(z^m).
\end{aligned}$$

که $erf(z)$ تابع خطا نام دارد و بصورت

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt,$$

تعریف می‌شود.

برای نمونه نشان می‌دهیم رابطه زیر برقرار است،

$$\frac{d^m}{dz^m}E_m(z^m) = E_m(z^m).$$

چون سری به طور یکنواخت همگراست می‌توان مشتق را به داخل سری آورد و لذا داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dz^m}E_m(z^m) &= \frac{d^m}{dz^m}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{(mj)}}{\Gamma(mj+1)}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{d^m}{dz^m}\frac{z^{(mj)}}{\Gamma(mj+1)}\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{mj(mj-1)...(mj-m+1)z^{mj-m}}{\Gamma(mj+1)}\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^{m(j-1)}}{\Gamma(m(j-1)+1)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{mj}}{\Gamma(mj+1)} = E_m(z^m).
\end{aligned}$$

۳.۱ تبدیلات انتگرالی

تبدیلات انتگرالی نقش مهمی در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دارند که اساس آنها تبدیل معادلات با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی است.

در این بخش ما دو تبدیل انتگرالی فوریه و لاپلاس را که در حل معادلات دیفرانسیل جزئی نقش موثری دارند، معرفی کرده و به بیان خاصیت‌های مهم این تبدیلات می‌پردازیم.

۱.۳.۱ تبدیل فوریه

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته، هموار قطعه‌ای و به طور مطلق انتگرال‌پذیر روی $\mathbb{R}$ باشد. اگر

$$F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}f(x)dx, \qquad (-\infty < k < \infty),$$

آنگاه برای هر x داریم:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}F(k)dk,$$

که تابع $F(k)$ تبدیل فوریه $f(x)$ نامیده می‌شود و همچنین $f(x)$ را تبدیل معکوس فوریه $F(k)$ می‌نامند.

خواص تبدیلات فوریه

۱) (خطی بودن)

تبدیل فوریه یک تبدیل انتگرالی خطی است یعنی:

$$\mathcal{F}\{af + bg\} = a\mathcal{F}\{f\} + b\mathcal{F}\{g\},$$

که a و b ثابت‌های دلخواه و f و g توابع پیوسته و هموار قطعه‌ای هستند.

۲) (انتقال)

اگر $\mathcal{F}\{f(x)\}$ تبدیل فوریه تابع $f(x)$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{F}\{f(x-c)\} = e^{ikc}\mathcal{F}\{f(x)\}.$$

۳) (تغییر مقیاس)

اگر $\mathcal{F}\{f(x)\}$ تبدیل فوریه تابع $f(x)$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{F}\{f(xc)\} = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}\{(\frac{k}{c})\},$$

که c ثابت حقیقی و غیر صفر است.

۴) (مشتق گیری)

فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته و هموار قطعه‌ای در بازه $(-\infty, \infty)$ باشد. همچنین فرض کنید اگر

$|x| \to \infty$ آنگاه $f(x) \longrightarrow 0$. اگر f و f' به طور مطلق انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه

$$\mathcal{F}\{f'\} = (-ik)^1 \mathcal{F}\{f\}.$$

این نتیجه را براحتی می‌توان تعمیم داد، اگر f و $n-1$ مشتق اول آن پیوسته و همچنین مشتق nام آن قطعه‌ای پیوسته باشد، آنگاه

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}\} = (-ik)^n \mathcal{F}\{f\}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

در صورتی که f و مشتقات آن به طور مطلق انتگرال‌پذیر باشند و بعلاوه فرض می‌کنیم که f و $n-1$ مشتق اول آن برای $|x| \to \infty$ به صفر همگرا هستند.

۵) (قضیه پیچش در تبدیل فوریه) تابع

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi.$$

پیچش تابع‌های f و g روی بازه $(-\infty, \infty)$ نامیده می‌شود، البته برای ناحیه‌ای که انتگرال خوش‌تعریف باشد.

قضیه ۲.۳.۱. *اگر $F(k)$ و $G(k)$ به ترتیب تبدیلات فوریه $f(x)$ و $g(x)$ باشند، آنگاه تبدیل فوریه پیچش $(f * g)(x)$ در صورت وجود برابر است با حاصل‌ضرب $F(k)G(k)$، به عبارت دیگر*

$$\mathcal{F}[f * g] = F(k)G(k).$$

برهان. بنا به تعریف

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ik\xi}d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)e^{ik(x-\xi)}dx, \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $\eta = x - \xi$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{F}[f * g] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ik\xi}d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)e^{ik\eta}d\eta = F(k)G(k).$$

□

کانولولشن دارای خاصیت‌های زیر است:

۱) (جابجایی)

$$(f * g) = (g * f).$$

۲) (شرکت پذیری)

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

۳) (توزیع پذیری)

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h).$$

۲.۳.۱ تبدیل لاپلاس

تبدیلات لاپلاس به خاطر سادگی برای تعیین جواب‌های دسته وسیعی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مورد استفاده واقع می‌شود. تبدیل لاپلاس ارتباط نزدیکی با تبدیل فوریه دارد. در واقع می‌توان گفت تبدیل لاپلاس نتیجه‌ای از تبدیل فوریه می‌باشد. برای مطالعه بیشتر در مورد تبدیلات انتگرالی می‌توان به [۱۲] مراجعه کرد.

تعریف ۳.۳.۱. اگر $f(x)$ برای تمام مقادیر $x > 0$ تعریف شده باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس $f(x)$ که با $F(s)$ یا $\mathcal{L}\{f(x)\}$ نشان داده می‌شود با انتگرال زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx,$$

که در آن s یک عدد حقیقی مثبت یا عدد مختلط با قسمت حقیقی مثبت در نظر گرفته می‌شود طوری که انتگرال مذکور همگرا باشد.