دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه فردوسی مشهد

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش هندسه
توپولوژی جبری

عنوان :

ساختار فضاهای طوقه کوچک و ارتباط با خواص کوچک و نزدیک بودن هموتوپیکی

استاد راهنما :
دکتر بهروز مشایخی فرد

استاد مشاور :
دکتر فاطمه هلن قانع

نگارنده :
فاطمه ابراهیم‌زاده

فهرست مندرجات

پیشگفتار

محوریت اصلی این پایان نامه بر معرفی فضاهای جدیدی تحت عنوان فضاهای طوقه کوچک [۱] می‌باشد که نقطه‌ی مقابل مفاهیمی از قبیل هاسدروف هموتوپیکی [۲] و همبند ساده نیم‌موضعی [۳] می‌باشد. این فضاها نقش مهمی در نظریه‌ی فضاهای پوششی [۴] که توسط برودسکی، دیداک، لبوز و میترا [۴] در سال ۲۰۰۸ بیان شده است، ایفا می‌کنند. این مفهوم اولین بار توسط ویرک [۱۹] در سال ۲۰۰۹ مطرح شد. منظور از طوقه‌ی کوچک، طوقه‌ای مانند α است اگر به ازای هر همسایگی باز U شامل $x_\circ$ طوقه ای مانند β حول $x_\circ$ درون U موجود باشد به‌طوری که با طوقه‌ی α در X هموتوپ باشد و فضای طوقه کوچک، فضایی توپولوژیکی است که هر طوقه‌ی آن طوقه‌ی کوچک می‌باشد.

بعد از معرفی فضاهای طوقه کوچک به سراغ مثال‌هایی می‌رویم که هر کدام خود بسیار جای بحث دارند. در اولین مثال به فضای جزایر همساز HA [۵] که توسط بگلی، سیرداسکی [۲] و فابل [۹] بررسی شده است، اشاره می‌کنیم. برای ساخت این فضا از فضای دیگری به‌نام فضای گوشواره‌ی هاوایی HE [۶] استفاده شده است. ویرک در ادامه از فضای جزایر همساز HA برای ساخت فضای طوقه کوچک بهره گرفت و به‌عنوان مثالی از فضاهای طوقه کوچک، فضای

[۱] small loop spaces
[۲] homotopically Hausdorff
[۳] semi-locally simply connected
[۴] covering space theory
[۵] Harmonic Archipelago
[۶] Hawaiian Earring

$m-$ چین‌خورده [۷] را معرفی کرد. وی در ادامه‌ی کار، گروه طوقه کوچک را معرفی کرد و سپس تاثیر این گروه را بر فضاهای پوششی [۸] بررسی نمود. وی در انتهای این قسمت دو حدس در مورد فضاهای طوقه کوچک و گروه بنیادین این فضاها مطرح کرد که به کمک مثال‌هایی که در این پایان‌نامه آورده شده است، می‌توان درستی این حدس‌ها را دید ولی برای اثبات جای بحث دارد.

همچنین ویرک به ساخت فضای پوشش جهانی‌ای [۹] پرداخت که با مفهوم فضای پوشش جهانی کلاسیک تفاوت دارد. وی چون بعضی از خواص ثابت شده برای فضای پوشش جهانی کلاسیک را برای این فضا نیز مورد بررسی قرار داد به همین دلیل از نامگذاری مشابه استفاده نمود. هدف اساسی از ساخت این نوع فضای پوششی جهانی بررسی این موضوع می‌باشد که در حالتی که فضا دارای طوقه‌کوچک است، یعنی همبند ساده نیم‌موضعی نیست، آیا قضیه‌های حالت کلاسیک برقرارند؟ آیا فضای پوشش جهانی دیگری می‌توان ساخت یا خیر؟

وی برای پاسخ به این سوالات شروع به ساخت فضای پوشش جهانی‌ای می‌کند که از جهاتی، ساختاری شبیه به فضای پوشش جهانی تعمیم‌یافته‌ای [۱۰] که در سال ۲۰۰۷ توسط زاسترو و دیگر همکارانش [۱۱] ارائه شد، دارد.

بعلاوه در این پایان‌نامه در مورد انواع فضاهای هاسدروف هموتوپیکی و ارتباط آن‌ها با فضاهای طوقه کوچک بحث می‌شود. در انتهای این پایان‌نامه به برقراری ارتباط بین سایر مفاهیم ارائه شده می‌پردازیم.

همچنین ویرک مفاهیم جدیدی تحت عنوان کوچک بودن هموتوپیکی [۱۱] و نزدیک بودن هموتوپیکی [۱۲] را برای اولین بار در سال ۲۰۱۰ در مقاله [۲۰] بیان کرده است. هدف از ارائه‌ی این مفاهیم توسط وی ایجاد ارتباط بین انواع فضاهای هاسدروف هموتوپیکی و فضاهای پوشش جهانی در حالتی‌که فضا همبند ساده نیم‌موضعی نیست، می‌باشد. در ادامه نشان داده

[۷] m-stratified
[۸] covering spaces
[۹] universal covering space
[۱۰] generalized universal covering space
[۱۱] homotopical smallness
[۱۲] homotopical closeness

شده است که این دو مفهوم از یکدیگر مستقل نمی‌باشند و یکی حالت خاصی از دیگری است.
این پایان‌نامه مشتمل بر ۵ فصل است. هدف از فصل اول یادآوری مفاهیم از پیش دانسته‌ی مورد نیاز در پایان‌نامه می‌باشد که کمک زیادی به خوانندگان می‌تواند بکند.
در این فصل کلیه‌ی مفاهیم و قضایای مورد نیاز در این پایان‌نامه جهت یادآوری به اختصاربیان می‌شوند. ابتدا به اختصار به بیان مفاهیمی از توپولوژی می‌پردازیم و در انتهای این بخش مفاهیمی چون حد مستقیم را در رسته‌ی فضاهای توپولوژیک که در قسمت کاربردهای فصول مختلف مطرح گردیده است، بیان می‌کنیم.
سپس به معرفی فضاهای پوششی و قضایای مهم در رابطه‌ی با آن‌ها می‌پردازیم و در انتهای این بخش چند قضیه که به‌خوبی بین گروه‌های بنیادین و فضاهای پوششی ارتباط برقرار می‌کند را ارائه می‌کنیم. سپس به معرفی فضاهایی تحت عنوان $CW-$ همبافت و جزئیات آن می‌پردازیم.

موضوع اصلی فصل دوم آشنایی با فضاهای طوقه کوچک و ساخت فضاهای طوقه کوچک به کمک فضاهایی که در یک نقطه دارای طوقه‌ی کوچک می‌باشند، است.
در این فصل به معرفی فضاهای طوقه کوچک، هاسدروف هموتوپیکی و همبند ساده نیم‌موضعی می‌پردازیم. بین فضاهای طوقه کوچک، هاسدروف هموتوپیکی و همبند ساده نیم‌موضعی ارتباط بسیار جالبی وجود دارد:
اگر فضا دارای طوقه‌ی کوچک باشد، آنگاه فضا همبند ساده نیم‌موضعی و هاسدروف هموتوپیکی نیست. بنابراین چون فضای طوقه کوچک همبند ساده نیم‌موضعی نیست، فضای پوشش جهانی کلاسیک برای آن موجود نمی‌باشد و همین زمینه‌ی ساخت فضایی تحت عنوان فضای پوشش جهانی $\widehat{X}$ را فراهم می‌کند که موضوع اساسی فصل چهارم می‌باشد و زمینه‌ی مقایسه‌ی عمیقی را بین فضاهای پوشش جهانی کلاسیک و غیرکلاسیک فراهم می‌کند. در ابتدای این فصل فضاهای طوقه کوچک را معرفی می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که فضاهای طوقه کوچک با عمل ضرب مسیرها تشکیل گروهی به نام گروه طوقه کوچک را می‌دهند که نرمال نیست. در ادامه مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم که تنها در یک نقطه دارای طوقه‌ی کوچک می‌باشند. سپس به معرفی فضاهای جدیدی تحت عنوان فضاهای $m-$چین خورده می‌پردازیم،

که بر خلاف مثال‌هایی که قبلا بحث شده است، در هر نقطه دارای طوقه کوچک می‌باشند. در ادامه فضاهای $S(Z,\gamma)$ که به نوعی فضای $m-$چین خورده است؛ را معرفی می‌کنیم و سپس به کمک ساختار تشریح شده برای این فضا و فضای جزایر همساز HA، به ساخت فضای $S(HA,l_\circ)$ می‌پردازیم، برای روشن شدن این واقعیت که فضا، فضای طوقه کوچک است به تعدادی از قضیه‌ها نیاز داریم که به کمک آن‌ها نتیجه می‌گیریم که فضای $S(HA,l_\circ)$ در هر نقطه دارای طوقه کوچک است. در ادامه زیرگروه تولید شده‌ی کوچک را معرفی می‌نماییم که بر فضاهای پوششی و محاسبه‌ی گروه‌های بنیادین تاثیر دارد. در انتهای این فصل دو حدس ویرک را بیان می‌کنیم که فقط توانستیم به کمک مثال‌هایی که در پایان‌نامه مطرح کردیم درستی این حدس‌ها را دید ولی برای اثبات جای بحث دارد.

هدف از ارائه‌ی فصل سوم، گامی جهت ارتباط بین فصل‌های دیگر می‌باشد به همین دلیل از آوردن اثبات بعضی از قضیه‌ها صرف‌نظر نموده‌ایم.
در این فصل به معرفی انواع فضاهای هاسدروف هموتوپیکی و مثال‌هایی در این مورد می‌پردازیم. سپس برای درک راحت‌تر مثال‌ها تعدادی تعاریف جدید از قبیل همبند ساده نیم‌موضعی پایه‌دار[۱۳] و غیرپایه‌دار [۱۴] و گروه‌های اسپنیر پایه‌دار [۱۵] و غیرپایه‌دار [۱۶] را نسبت به پوشش‌های فضا و سپس نسبت به کل فضا مطرح می‌کنیم. همچنین در ادامه به بیان ارتباط بین هر کدام از این تعاریف در صورت امکان می‌پردازیم. در این فصل برای معرفی راحت‌تر مثال‌ها، برخی قضایای کاربردی را بدون برهان بیان می‌کنیم.

موضوع اصلی فصل چهارم حذف اساسی‌ترین شرط از قضایای فضاهای پوششی کلاسیک جهت ساخت فضاهای پوششی جهانی جدید می‌باشد. پس از ساخت می‌خواهیم ببینیم آیا تمام قضایای حالت کلاسیک تحت شرایط جدید (حذف همبند ساده نیم‌موضعی) برقرارند؟ در این

[۱۳] based semi-locally simply connected
[۱۴] unbased semi-locally simply connected
[۱۵] based Spanier group
[۱۶] unbased Spanier group

فصل فرض کنیم X فضایی توپولوژیک باشد. یک فضای پوششی X، عبارت است از فضای $\widetilde{X}$ به همراه نگاشت پیوسته p از $\widetilde{X}$ به X که باید در شرایط خاصی صدق کند که در جایگاه خود به‌طور مفصل به شرح آن‌ها خواهیم پرداخت. نظریه‌ی فضاهای پوششی به تنهایی نقش مهمی را در توپولوژی جبری ایفا می‌کنند. علاوه براین نقش بسیار مهمی در سایر شاخه‌های هندسه از قبیل نظریه‌ی گروه‌های لی و سطوح ریمانی دارند. نظریه‌ی فضاهای پوششی با مطالعه‌ی گروه‌های بنیادین ارتباط تنگاتنگ دارد. بسیاری از مسائل اساسی توپولوژیکی درباره‌ی فضاهای پوششی می‌توانند به مسائل مجرد جبری در زمینه‌ی گروه‌های بنیادین فضاهای مختلف تبدیل شوند و از طریق این ارتباط می‌توان راحت‌تر خواص توپولوژیکی فضای پوششی را بررسی کرد. در این فصل به ساخت فضایی تحت عنوان فضای پوشش جهانی می‌پردازیم. البته این مفهوم با مفهوم فضای پوشش جهانی کلاسیک متفاوت است. علت نامگذاری این فضا به فضای پوشش جهانی الهام گرفته از فضای پوشش جهانی کلاسیک است. در این فصل چون فضاها دارای طوقه‌ی کوچک می‌باشند لذا همبند ساده نیم‌موضعی نمی‌باشند و این زمینه‌ی تفاوت بین فضای پوشش جهانی ساخته شده در این حالت با حالت کلاسیک را فراهم می‌نماید. در ابتدای این فصل به نحوه‌ی ساخت این نوع از فضاهای پوششی تحت عنوان فضای پوشش جهانی $\widehat{X}$ می‌پردازیم که نیازمند معرفی فضای خارج قسمتی $\Omega X/\sim$ می‌باشد که در آن

$$\Omega X = \{\alpha \mid \alpha : I \longrightarrow X\ ,\ \alpha(\circ) = x\}.$$

سپس برخی قضایای حالت کلاسیک را با حذف شرط همبند ساده نیم‌موضعی و اضافه کردن شرط طوقه‌ی کوچک ثابت می‌کنیم.

در بخش دوم این فصل به معرفی فضای پوشش جهانی جدیدی متفاوت با فضای پوشش جهانی کلاسیک و فضای پوشش جهانی $\widehat{X}$، تحت عنوان فضای پوشش جهانی تعمیم‌یافته می‌پردازیم. سپس این فضای معرفی شده را با فضای پوشش جهانی کلاسیک و فضای پوشش جهانی معرفی شده $\widehat{X}$ مقایسه می‌کنیم. و به این نتیجه خواهیم رسید که هر فضای پوشش جهانی کلاسیک فضای پوشش جهانی تعمیم‌یافته است و همچنین فضای پوشش جهانی $\widehat{X}$ نمونه‌ای از فضای پوشش جهانی تعمیم‌یافته می‌باشد. در انتهای این فصل ارتباط بین مفاهیم ارائه شده با فصل‌های قبل را بیان می‌کنیم که نتایجی در خور توجه می‌باشد.

هدف اصلی فصل پنجم معرفی دو مفهوم جدید تحت عنوان کوچک بودن هموتوپیکی و نزدیک بودن هموتوپیکی برای نگاشت‌هایی از رده‌های هموتوپی متفاوت می‌باشد. همچنین به نوعی به ارتباط آن‌ها با مفاهیم قبلی می‌پردازیم.
در این فصل به معرفی چند مفهوم جدید تحت عنوان کوچک‌بودن هموتوپیکی و نزدیک بودن هموتوپیکی و ارتباط بین آن‌ها می‌پردازیم. این دو مفهوم مستقل از یکدیگر نمی‌باشند و یکی دیگری را نتیجه می‌دهد. این مفاهیم با فضاهای پوشش جهانی ساخته شده در حالتی که فضا همبند ساده‌ی نیم‌موضعی نباشد، مرتبط است. در ابتدای این فصل مفاهیمی را که در این فصل به آن‌ها نیاز داریم و مفاهیم چندان آشنایی نیستند ارائه می‌کنیم. در این قسمت درباره‌ی مفاهیمی چون فضای پئانو، فضای پئانوی جهانی، نگاشت پئانو و نگاشت پئانوی جهانی مطالبی خواهیم دید. در ادامه چون مفهوم طوقه کوچک و فضای طوقه کوچک را می‌دانیم، مفهوم جدید کوچک بودن هموتوپیکی را در دو رسته‌ی فضاهای توپولوژیکی نقطه‌دار و بدون نقطه بیان می‌کنیم. تفاوت تعاریف در این دو رسته در این است که در اولی تمام هموتوپی‌ها و نگاشت‌ها حول نقطه‌ی پایه‌ای ثابت در نظر گرفته می‌شوند در حالی‌که در دومی تمام هموتوپی‌ها و نگاشت‌ها بدون نقطه در نظر گرفته می‌شوند. همچنین به عنوان مثال‌هایی از فضاهایی که دارای خاصیت کوچک‌بودن هموتوپیکی می‌باشند به ساخت فضاهای اپرای سیدنی (در رسته‌ی فضاهای توپولوژیکی بدون نقطه با $FSO_Y(S)$ و در رسته‌ی فضاهای توپولوژیکی نقطه‌دار با $SO_Y(S)$ نشان می‌دهیم.) می‌پردازیم. علت نامگذاری این فضاها به اپرای سیدنی به این دلیل است که پس از چسباندنی که در ساخت این فضاها توضیح داده می‌شود، فضاها ساختاری شبیه به نمای سقف اپرای سیدنی که در زیر نشان داده شده است، پیدا می‌کنند.

همچنین نشان می‌دهیم این فضاها با توجه به نحوه‌ی ساخت، فضاهایی $m-$ چین‌خورده می‌باشند. برای اثبات این واقعیت که فضاها دارای خاصیت کوچک‌بودن هموتوپیکی می‌باشند نیازمند اثبات تعدادی قضیه‌های مرتبط می‌باشد. سپس مفهوم نزدیک بودن هموتوپیکی را بیان می‌کنیم که لازم است در این حالت تمام فضاهای مورد نظر فضای متریک باشند. پس از بیان این مفهوم، مفهوم نزدیکی دو طوقه را می آوریم تا تعریف برای خوانندگان شفاف‌تر گردد. پس از این به اثبات قضایایی می‌پردازیم که بین این مفهوم و مفاهیم هاسدروف هموتوپیکی مسیری، فضای پئانو و مفاهیم آنالیزی از قبیل پیوستگی یکنواخت و شرط لیپ‌شیتز ارتباط برقرار می‌کند. همچنین در ادامه نشان می‌دهیم که اگر دو مسیر f و g در فضای X به هم نزدیک شوند، آنگاه در فضای پئانوی PX نیز به هم نزدیک می‌شوند اگر فضای X همبند مسیری موضعی باشد. سپس برای حالتی که فضای X همبند مسیری موضعی نباشد این حکم را رد می‌کنیم به همین منظور شروع به ساخت فضای جزایر همساز تعمیم‌یافته می‌کنیم. سپس ساختارهای متفاوتی از نزدیک بودن هموتوپیکی را بیان می‌کنیم. همچنین تعریف دیگری از نزدیک بودن هموتوپیکی را در فضای هاسدروف و فشرده ارائه می‌کنیم و بعد نشان می‌دهیم که تمام این تعاریف مطرح شده با یکدیگر معادل می‌باشند. در انتهای این فصل به بیان کاربردهایی از این تعاریف می‌پردازیم و سپس ساختار فضاهای Y، Y'، Z و Z که قبلا در فصل سوم شرح داده شد را مجددا با این تعاریف ارائه می‌دهیم.

مراجع اصلی این پایان‌نامه، سه مقاله‌ی زیر می‌باشند:

1. Z. Virk, Small loop spaces , *Topology Appl.* 157 (2010) 451-455.

2. Z. Virk, Homotopical smallness and closeness , *Topology Appl.* 158 (2011) 360-378.

3. H. Fischer, D. Repovs, A. Zastrow, Generalized universal coverings and the shape group , *Fund. Math.* 197 (2007), 167-196.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل کلیه‌ی مفاهیم اولیه و قضایای مورد نیاز در این پایان‌نامه بیان می‌شوند. البته فرض بر این است که خوانندگان محترم با مفاهیم اولیه‌ای از توپولوژی و نظریه‌ی گروه‌ها و توپولوژی جبری و هندسه منیفلد آشنا می‌باشند.

ابتدا به اختصار به بیان مفاهیمی از توپولوژی می‌پردازیم و در انتهای این بخش مفاهیمی چون حد مستقیم را در رسته‌ی فضاهای توپولوژیک که در قسمت کابردهای فصول مختلف مطرح گردیده است، بیان می‌کنیم. بیشتر مطالب این بخش از مراجع [۱۵] و [۱۸] استخراج شده است.

سپس به معرفی فضاهای پوششی و قضایای مهم در رابطه‌ی با آن‌ها می‌پردازیم و در انتهای این بخش چند قضیه که به‌خوبی بین گروه‌های بنیادین و فضاهای پوششی ارتباط برقرار می‌کند را ارائه می‌کنیم. در بخش انتهایی این فصل به معرفی فضاهایی تحت عنوان $CW-$ همبافت و جزئیات آن می‌پردازیم. لازم به ذکر است که مطالب این دو بخش از مرجع [۱۷] استخراج گردیده است.

۱.۱ مفاهیمی از توپولوژی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد که توسط زیرمجموعه‌های A_j که $j \in J$ پوشیده شده است، یعنی $X = \cup_{j\in J} A_j$. همچنین فرض کنیم شرایط زیر برقرار باشد:
۱) هر A_j فضایی توپولوژیک باشد.
۲) برای هر $j,k \in J$، توپولوژی‌های A_j, A_k روی $A_j \cap A_k$ برابر باشند.
۳) برای هر $j,k \in J$، مجموعه‌ی $A_j \cap A_k$ هم در A_j و هم در A_k بسته باشد.
در این‌صورت توپولوژی ضعیف [۱] روی X که توسط گردایه‌ی $\{A_j \ : \ j \in J\}$ تعیین می‌شود عبارت است از توپولوژی‌ای که مجموعه‌های بسته‌ی آن همه‌ی زیرمجموعه‌هایی از X مانند F هستند که $F \cap A_j$ برای هر j در A_j بسته است. به این توپولوژی، توپولوژی مجموع نیز می‌گویند. اگر A_j برای هر j، خاصیتی را داشته باشد از طریق این توپولوژی به X منتقل می‌شود.

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنیم $S \neq \phi$ و $\beta \subseteq ۲^S$. دراین‌صورت شرط لازم و کافی برای آنکه β پایه‌ای برای τ روی S باشد آن است که $S = \cup_{\beta \in \beta}\beta$ و به ازای هر $\beta_۱, \beta_۲ \in \beta$ و $x \in \beta_۱ \cap \beta_۲$ عضوی مانند $\beta_۳ \in \beta$ موجود باشد به‌طوری‌که $x \in \beta_۳ \subseteq \beta_۱ \cap \beta_۲$

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $f : X \longrightarrow Y$ تابعی پیوسته و پوشا باشد. در این‌صورت f را یک همسانی [۲] می‌گوییم اگر باز بودن $U \subseteq Y$ معادل با باز بودن $f^{-۱}(U) \subseteq X$ باشد.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم X, Z دو فضای توپولوژیک و $h : X \longrightarrow Z$ یک تابع باشد. در این‌صورت رابطه‌ی هم‌ارزی زیر را روی X به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:
برای هر $x_۱, x_۲ \in X$، $x_۱ \sim x_۲$ اگروفقط اگر $h(x_۱) = h(x_۲)$.
این رابطه‌ی هم‌ارزی را هسته‌ی h می‌نامیم و با نماد $kerh$ نمایش می‌دهیم.

[۱] weak topology
[۲] identification

قضیه ۵.۱.۱ فرض کنیم $h : X \longrightarrow Z$ یک همسانی باشد و هسته‌ی[۳] h ساختار یک رابطه‌ی هم‌ارزی داشته باشد، در این‌صورت تابع $\bar{h} : X/kerh \longrightarrow Z$ با ضابطه‌ی $[x] \mapsto h(x)$ برای هر $x \in X$ یک همسانریختی است.

قضیه ۶.۱.۱ اگر تابعی در شرط لیپ‌شیتز صدق کند، آنگاه پیوسته‌ی یکنواخت است.

قضیه ۷.۱.۱ فرض کنیم (S, τ) فضایی توپولوژیک باشد. در این‌صورت:
(i) (S, τ) فضای T_1 است اگر و فقط اگر τ شامل توپولوژی هم‌متناهی باشد.(توپولوژی هم‌متناهی گردایه‌ای از مجموعه‌های باز به‌صورت $\{G \mid S \setminus G \quad is \quad finite\} \cup \{\emptyset\}$ می‌باشد.)
(ii) اگر (S, τ) فضای T_1 و S مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه (S, τ) فضای گسسته است.
(iii) (S, τ) فضای T_1 است اگر و فقط اگر هر مجموعه‌ی تک عضوی(و در نتیجه متناهی) در S بسته باشد.
(iv) هر مولفه‌ی مسیری فضای شمارای T_1 تک‌عضوی است.

نکته ۸.۱.۱ اگر در فضای (S, τ) مجموعه‌ی S مجموعه‌ای بسته و نامتناهی و τ توپولوژی گسسته باشد، آنگاه S فشرده نیست.

تعریف ۹.۱.۱ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیکی X را موضعا متناهی [۴] می‌گوییم، هرگاه برای هر $x \in X$ همسایگی‌ای موجود باشد که تنها تعداد متناهی از مجموعه‌های این گردایه را قطع کند.

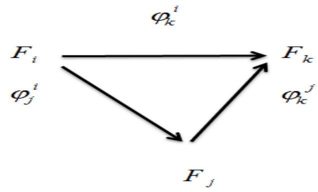
تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم I یک مجموعه‌ی شبه‌مرتب [۵](یعنی انعکاسی و متعدی باشد.) و C یک رسته‌ی دلخواه باشد. در این‌صورت یک دستگاه مستقیم [۶] در رسته‌ی C با مجموعه‌ی اندیس‌گذار I، خانواده‌ای از اشیای C به‌صورت $\{F_i\}_{i\in I}$ با این خاصیت می‌باشد که برای هر دو

---
[۳] kernel
[۴] locally finite
[۵] quasi-ordered
[۶] directed system

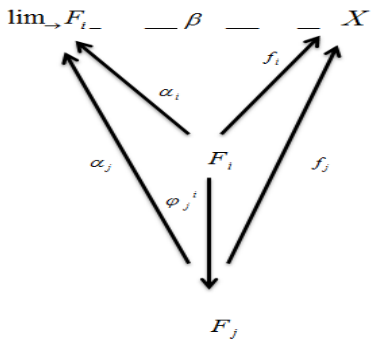
اندیس $i, j \in I$ که $i \leq j$، ریخت $\varphi^i_j : F_i \longrightarrow F_j$ موجود باشد به طوری که در دو شرط زیر صدق کند:

(i) برای هر i ریخت $\varphi^i_i : F_i \longrightarrow F_i$ ریخت همانی باشد.

(ii) اگر $i \leq j \leq k$، آنگاه نمودار جابه‌جایی زیر موجود باشد:



تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم $F = \{F_i, \varphi^i_j\}$ یک دستگاه مستقیم در رسته‌ی دلخواه C باشد. حد مستقیم[۷] این دستگاه را که با نماد $lim_{\longrightarrow} F_i$ نمایش می‌دهیم یک شی و خانواده‌ای از ریخت‌ها به‌صورت $\alpha_i : F_i \longrightarrow lim_{\longrightarrow} F_i$ می‌باشد طوری‌که نمودار زیر جابه‌جایی است.



برای هر شی X و هر خانواده‌ای از ریخت‌های $f_i : F_i \longrightarrow X$ ریخت منحصربه‌فردی مانند $\beta : lim_{\longrightarrow} F_i \longrightarrow X$ موجود است طوری‌که نمودار فوق جابه‌جا است.

مثال ۱۲.۱.۱ در رسته‌ی فضاهای توپولوژیک حد مستقیم F_i معادل با $\dot{\bigcup} F_i / \sim$ می‌باشد. رابطه‌ی هم‌ارزی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $f_i \in F_i$ و $f_j \in F_j$، $f_i \sim f_j$ اگروفقط اگر اندیس $k \geq i, j$ موجود باشد طوری‌که $\phi^i_k f_i = \phi^j_k f_j$. رده‌های هم‌ارزی f_i را با نماد $[f_i]$ نمایش می‌دهیم.

[۷] directed limit

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم I یک مجموعه‌ی شبه‌مرتب و C یک رسته‌ی دلخواه باشد. در این صورت یک دستگاه معکوس[۸] در رسته‌ی C با مجموعه‌ی اندیس‌گذار I، خانواده‌ای از اشیای C به‌صورت $\{F_i\}_{i\in I}$ با این خاصیت می‌باشد که برای هر دو اندیس $i, j \in I$ که $i \leq j$، ریخت $\psi_i^j : F_j \longrightarrow F_i$ موجود باشد به طوری که در دو شرط زیر صدق کند:

(i) برای هر i ریخت $\psi_i^i : F_i \longrightarrow F_i$ ریخت همانی باشد.

(ii) اگر $i \leq j \leq k$، آنگاه نمودار جابه‌جایی زیر موجود باشد:

$$\begin{tikzcd}
F_k \arrow[rr, "\psi_i^k"] \arrow[dr, "\psi_j^k"'] & & F_i \\
& F_j \arrow[ur, "\psi_i^j"'] &
\end{tikzcd}$$

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم $F = \{F_i, \psi_i^j\}$ یک دستگاه معکوس در رسته‌ی دلخواه C باشد. حد معکوس[۹] این دستگاه را که با نماد $lim_{\leftarrow}F_i$ نمایش می‌دهیم یک شی و خانواده‌ای از ریخت‌ها به‌صورت $\alpha_i : lim_{\leftarrow}F_i \longrightarrow F_i$ می‌باشد طوری‌که نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{tikzcd}
\lim_{\leftarrow} F_i \arrow[rr, dashed, dash, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & & X \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "f_j"] \\
& F_i \arrow[d, "\varphi_j^i"] & \\
& F_j &
\end{tikzcd}$$

برای هر شی X و هر خانواده‌ای از ریخت‌های $f_i : X \longrightarrow F_i$ ریخت منحصربه‌فردی مانند $\beta : X \longrightarrow lim_{\leftarrow}F_i$ موجود است به‌طوری‌که نمودار فوق جابه‌جا است.

در دستگاه معکوس فقط جهت نمودارها برعکس دستگاه حد مستقیم می‌باشد.

---

[۸] inverse system

[۹] inverse limit

۲.۱ مفاهیم مقدماتی از فضاهای پوششی

فرض کنیم X فضایی توپولوژیک باشد. فضای پوششی X، عبارت است از یک فضای $\tilde{X}$ به همراه نگاشت پیوسته‌ی p از $\tilde{X}$ به X که در شرایط خاصی صدق می‌کند و در ادامه به‌طور دقیق به تعریف آن خواهیم پرداخت. نظریه‌ی فضاهای پوششی نه تنها نقش بسیار مهمی در توپولوژی جبری ایفا می‌کند، بلکه در بسیاری از زمینه‌ها از قبیل هندسه‌ی دیفرانسیل، نظریه‌ی گروه‌های لی، سطوح ریمانی و ... کاربردهای فراوان دارد.
در این بخش فرض می‌کنیم کل فضاها همبند مسیری و همبند مسیری موضعی باشند.
قبل از بیان مفهوم فضای پوششی به بیان تعدادی مفاهیم و قضایای مقدماتی می‌پردازیم و بعد از آن وارد موضوع اصلی این بخش یعنی فضاهای پوششی می‌شویم.

تعریف ۱.۲.۱ فضای X را انقباض‌پذیر موضعی [۱۰] می‌گوییم، اگر برای هر $x \in X$ و هر همسایگی U شامل x، همسایگی بازی مانند $V \subseteq U$ شامل x موجود باشد به‌طوری‌که فضای V در U انقباض‌پذیر باشد. به عبارت دیگر تابع پیوسته‌ای مانند $F : V \times I \longrightarrow U$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $v \in V$ داشته باشیم:

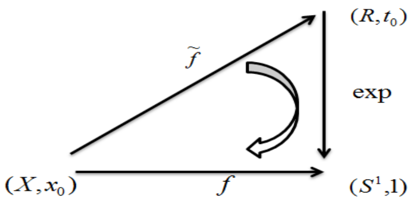
$$F(v, ۰) = v \quad , \quad F(v, ۱) = x.$$

قضیه ۲.۲.۱ فرض کنیم $f : S^n \longrightarrow Y$ پیوسته باشد. در این‌صورت عبارات زیر معادلند:
(i) f پوچ‌هموتوپیک است.
(ii) f قابل گسترش به g روی $D^{n+۱}$ است یعنی $g : D^{n+۱} \longrightarrow Y$ موجود است به‌طوری‌که g پیوسته است و $g |_{S^n}= f$.
(iii) برای هر $x_۰ \in S^n$، f با تابع ثابت در نقطه‌ی $x_۰$ هموتوپیک است.

لم ۳.۲.۱ (لم بالابر) فرض کنیم $X \subseteq R^n$ فضایی محدب و فشرده باشد و علاوه بر این $f : (X, x_۰) \longrightarrow (S^۱, ۱)$ یک تابع پیوسته باشد. در این‌صورت تابع پیوسته‌ای مانند

[۱۰] locally contractible

$\tilde{f} : (X, x_\circ) \longrightarrow (R, t_\circ)$ موجود است به‌طوری‌که در نمودار جابه‌جایی زیر صدق کند:



نتیجه ۴.۲.۱ فرض کنیم $f : I \longrightarrow S^۱$ یک مسیر بسته روی I باشد. در این‌صورت $\tilde{f} : I \longrightarrow (R, \circ)$ موجود است به‌طوری‌که $exp \circ \tilde{f} = f$ و $\tilde{f}(\circ) = \circ$.

مفهوم دیگری که در ادامه با آن آشنا می‌شویم، توکشیده‌ی[۱۱] یک فضای توپولوژیک است.

تعریف ۵.۲.۱ زیرفضای $A \subseteq X$، یک توکشیده از X نامیده می‌شود اگر نگاشت پیوسته‌ی $r : X \longrightarrow A$ موجود باشد به‌طوری‌که $r \circ i = ۱_A$ که در آن $i : A \hookrightarrow X$ و $۱_A : A \longrightarrow A$ به‌ترتیب نگاشت‌های شمولی و همانی می‌باشند.
همچنین در این حالت نگاشت پیوسته $r : X \longrightarrow A$ را یک توکشنده[۱۲] می‌نامیم.

مثال ۶.۲.۱ دایره‌ی مرکزی از نوار موبیوس را می‌توان مثالی از یک توکشیده لحاظ کرد.

در ادامه مفهومی تحت عنوان توکشیده‌ی دگردیسی که قوی‌تر از مفهوم توکشیده است را بیان می‌کنیم.

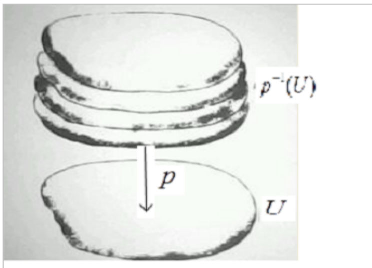
تعریف ۷.۲.۱ فرض کنیم $A \subseteq X$ و $i : A \hookrightarrow X$ نگاشت شمول باشد، در این‌صورت A توکشیده‌ی دگردیسی X است اگر نگاشت پیوسته‌ی $r : X \longrightarrow A$ موجود باشد به طوری‌که $r \circ i = ۱_A$ و $i \circ r \simeq ۱_X$.

مثال ۸.۲.۱ دایره‌ی $S^۱$ از $\mathbb{C} - \{\circ\}$ را می‌توان مثالی از توکشیده‌ی دگردیسی لحاظ کرد.

---
[۱۱] retract
[۱۲] retraction

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنیم $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ یک نگاشت پیوسته‌ی پوشا باشد. مجموعه باز U از X به‌وسیله‌ی p به‌طور هموار پوشانده می‌شود اگر تصویر معکوس مجموعه‌ی باز U توسط p یعنی $p^{-1}(U)$ را بتوان در $\tilde{X}$ به‌صورت اجتماعی از مجموعه‌های باز مجزای V_α نوشت به‌طوری‌که تحدید p به هر V_α همسانریختی از V_α به روی U باشد. هر یک از مجموعه‌های V_α را یک قاچ[۱۳] $p^{-1}(U)$ می‌گوییم.

وقتی که مجموعه‌ی باز U به‌وسیله‌ی p به‌طور هموار پوشانده می‌شود[۱۴]، اغلب مجموعه‌ی $p^{-1}(U)$ را به‌صورت « ردیفی از کلوچه‌ها» که در شکل ۱.۱ نشان داده شده است، می‌توان تجسم کرد.



شکل 1.1

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنیم $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ یک نگاشت پیوسته‌ی پوشا باشد. اگر هر نقطه‌ی $x \in X$ دارای یک همسایگی مانند U باشد که به وسیله‌ی p به‌طور هموار پوشانده شود، آنگاه p را نگاشت پوششی و $\tilde{X}$ را فضای پوششی[۱۵] X می‌نامیم. هر یک از همسایگی‌های دارای این شرایط را همسایگی اولیه[۱۶] می‌گوییم. گاهی زوج $(\tilde{X} , p)$ را فضای پوششی X می‌نامیم.

نکته ۱۱.۲.۱ اگر $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ یک نگاشت پوششی باشد، آنگاه به ازای هر نقطه‌ی $x \in X$ توپولوژی تار[۱۷] (یعنی اگر $f : X \longrightarrow Y$ و $y \in Y$، آنگاه $f^{-1}(y)$ را یک تار روی y می‌گوییم.) $p^{-1}(x)$ از $\tilde{X}$ گسسته است.

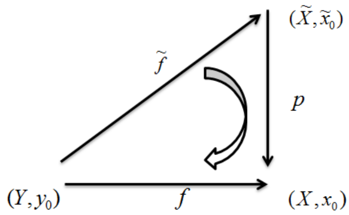
---

[۱۳] sheet
[۱۴] evenly covered
[۱۵] covering space
[۱۶] coordinate neighborhood
[۱۷] fiber

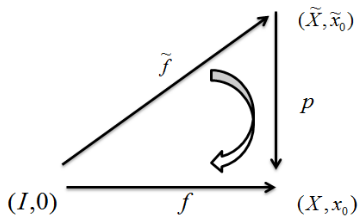
لم ۱۲.۲.۱ فرض کنیم $(\tilde{X}\ ,\ p)$ فضای پوششی X باشد. در این‌صورت p نگاشتی پیوسته، پوشا و باز است و همچنین نگاشتی خارج قسمتی است.

در ادامه در مورد نگاشت خارج قسمتی بیشتر توضیح خواهیم داد.

لم ۱۳.۲.۱ فرض کنیم $(\tilde{X}\ ,\ p)$ فضای پوششی X، Y همبند مسیری، نگاشت $f:(Y,y_\circ)\longrightarrow(X,x_\circ)$ پیوسته و $\tilde{x_\circ}\in\tilde{X}$ نقطه‌ای در تار روی $x_\circ$ باشد. در این‌صورت نگاشتی پیوسته مانند $\tilde{f}:(Y,y_\circ)\longrightarrow(\tilde{X},\tilde{x_\circ})$ موجود است به‌طوری‌که $p\circ\tilde{f}=f$.



لم ۱۴.۲.۱ فرض کنیم $(\tilde{X}\ ,\ p)$ فضای پوششی X، $f:(I,\circ)\longrightarrow(X,x_\circ)$ یک مسیر و $\tilde{x_\circ}\in\tilde{X}$ نقطه‌ای در تار روی $x_\circ$ باشد. در این‌صورت نگاشتی پیوسته مانند $\tilde{f}:(I,\circ)\longrightarrow(\tilde{X},\tilde{x_\circ})$ موجود است به‌طوری‌که $p\circ\tilde{f}=f$.



قضیه ۱۵.۲.۱ فرض کنیم فضای Y همبند مسیری و همبند مسیری موضعی و $f:(Y,y)\longrightarrow(X,x)$ نگاشتی پیوسته و $(\tilde{X}\ ,\ p)$ فضای پوششی X باشد. در این‌صورت بالابر منحصربه‌فرد f مانند $\tilde{f}:(Y,y)\longrightarrow(\tilde{X},\tilde{x})$ $(\tilde{x}\in p^{-1}(x))$ وجود دارد اگروفقط اگر $f_*(\pi_1(Y,y))\subseteq p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})$.