به نام خدا

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایه‌های رایس و قاب های دوگان مدولی آنها در C^*−مدولهای هیلبرت

نگارش

آزیتا بارانی

استاد راهنما

دکتر علی ثامری پور

استاد مشاور

دکتر محمود شکوری

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

دررشته ریاضی محض

آبان ماه ۱۳۸۹

چکیده

نام خانوادگی : بارانی **نام :** آزیتا	
عنوان پایان‌نامه : پایه‌های رایس و قاب های دوگان مدولی آنها در C^*–مدولهای هیلبرت	
استاد راهنما: دکتر علی ثامری پور **استاد مشاور :** دکتر محمود شکوری	
درجه تحصیلی : کارشناسی ارشد **رشتهٔ :** ریاضی محض گرایش آنالیز **محل تحصیل :** دانشگاه لرستان **دانشکده :** علوم پایه **تاریخ فارغ التحصیلی :** آبان ماه ۱۳۸۹ **تعداد صفحه:** ۱۲۰	
کلید واژه ها: فضای هیلبرت ، C^*–مدول هیلبرت ، C^*–مدول هیلبرت متناهی یا شمارا تولیدشده ، پایه متعامد یکه ، پایه هیلبرت ، قاب مدولی ، دنباله دوگان ، قاب دوگان و پایه رایس	

چکیده: در این رساله، ابتدا اطلاعات پایه‌ای و مفیدی درباره‌ی C^*–جبرها، C^*–مدول‌های هیلبرت ، عملگرهای الحاق پذیر ، پایه متعامد یکه ، پایه هیلبرت ، قاب ها و دوگان مدولی آنها گردآوری و تألیف شده است. سپس با تجزیه و تحلیل دقیق مقاله‌ی

Riesz bases and their dual modular frames in Hilbert C^*-modules ,

J. Math. Anal.Appl.343 (2008): 246-256.

قاب های دوگان برای قاب های مدولی وپایه های رایس در C^*–مدولهای هیلبرت رامورد بررسی قرارداده‌ایم . درC^*–مدولهای هیلبرت یک پایه رایس ممکن است قاب های دوگان مختلف داشته باشد و حتی ممکن است دو قاب با دوگان مختلف هر دو دارای یک پایه رایس باشند.

ماپایه های رایسی راکه دوگان منحصربفردی دارند مشخص کرده‌ایم و در پایان یک شرط لازم وکافی برای اینکه دوگان یک پایه رایس دوباره یک پایه رایس باشد را بدست آورده و برخی روابط نتیجه شده را اثبات کرده ایم .

فهرست مندرجات

۰—۱ مقدمه

قاب های فضای هیلبرت اساساً توسط **دافین**[۱] و **اسکافر**[۲] [۴] در سال **۱۹۵۲** مطرح شدند که‌منجربه‌بررسی ومطالعه‌برخی مسایل درآنالیزفوریه غیرهارمونیک شد.قاب هانمایش پایه های تکراری که تعمیم پایه های رایس می باشند ، هستند .نظریه‌ی قاب هاکاربردهای زیادی درآنالیز هارمونیک ، پردازش تصویر، نظریه‌ی نمونه‌گیری ، نظریه‌ی عملگر ، اندازه‌های کوانتومی ، کدگذاری و ارتباطات وانتقال داده‌ها و ... دارند.

C^*–مدولهای هیلبرت تعمیم فضای هیلبرت بوسیله یک ضرب داخلی روی یک C^*–جبردرمیدان اعدادمختلط می باشند ولی کاملاً با فضاهای هیلبرت متفاوت هستند . برای مثال می دانیم که زیرفضای خطی بسته در یک فضای هیلبرت مکمل متعامد داردامااین مطلب درc^*–مدولهای هیلبرت درست نیست . همچنین قضیه نمایش رایس برای توابع پیوسته روی فضای هیلبرت درc^*–مدولهای هیلبرت برقرارنیست .بنابراین انتظارمی رود مسایل موجود درمورد قاب هادرc^*–مدولهای هیلبرت دارای پیچیدگی بیشتری نسبت به فضای هیلبرت باشند.

پایه های رایس نقش مهمی درمطالعه نظریه قاب هادرفضای هیلبرت رابازی می کنند.[۹]امادراین موردموانع بسیاری موجوداست ازجمله ناهمانندی بافضای هیلبرت ،برای مثال هرc^*–مدول هیلبرت یک پایه‌رایس ندارد(مثال ۳.۴ در[۷]).اگرچه‌طبق قضیه مشهورتثبیت کاسپارو[۱۳] هرc^*–مدول هیلبرت متناهی یاشماراتولیدشده دارای یک قاب است .همچنین یک پایه رایس دریک c^*–مدول هیلبرت می تواند تعداد زیادی قاب های دوگان مختلف داشته باشد که لزوماًپایه رایس نیستند واین مطلب درفضای هیلبرت کاملاًمتفاوت است چون درفضای هیلبرت یک پایه رایس دوگان منحصربفرددارداین دوگان خودش یک

[۱] Duffin
[۲] Schaeffer

پایه رایس است .

هدف اصلی این مقاله این است که‌برخی ویژگی های اساسی درمورد پایه های رایس و دوگان آنهارابیان کند،این ویژگی هابرای تحقیق بیشترازنظریه قاب های مدولی مورد نیازهستند.

دراین مقاله ، در فصل اول ، تعاریف و قضایای مقدماتی و مورد نیاز برای فصل‌های بعد آورده شده است .

در فصل دوم وسوم ،مفاهیم مربوط به c^*−جبرها، c^*−مدولهای هیلبرت وبرخی خواص آنهاآورده شده است .

درفصل چهارم ، با تجزیه و تحلیل مقاله‌ی

Frank, M., D. R. Larson, *Frames in Hilbert C^*-modules and C^*-algebras,*

J. Operator Theory 48(2002) 273-314.

تعریف c^*−مدولهای هیلبرت متناهی یاشماراتولیدشده ، قاب و انواع آن ، معرفی عملگرهای روی قاب و اثبات گزاره‌هایی در این زمینه،پایه های متعامدیکه ، پایه هیلبرت وپایه رایس آورده شده است . ودرفصل پنجم ، با بررسی دقیق مقاله‌ی

Riesz bases and their dual modular frames in Hilbert C^*-modules ,

J. Math. Anal.Appl.343 (2008): 246-256.

باارایه چندین گزاره ، قضیه و مثال نشان می دهیم که یک پایه رایس همیشه یک دوگان کانونی داردکه حتماًیک پایه رایس است .اگرچه می تواننددودوگان متفاوت که هردوپایه رایس باشندداشته باشد. وهمچنین یک شرط لازم وکافی برای اینکه‌دوگان یک پایه رایس دوباره‌پایه رایس باشدرابدست می آوریم . بویژه ، پایه های رایس مدولی که دوگان منحصربفردداراندرامشخص می کنیم وبه عنوان یک نتیجه ، نشان می دهیم وقتی که C^*−جبر جابجایی باشدهرپایه رایس مدولی یک دوگان منحصربفرددارداگرچه ممکن است این پایه رایس دوگانهای دیگری هم داشته باشدکه پایه رایس نباشند.(مثال (۴.۵))

درپایان باارایه‌چندین مثال مختلف تفاوت بین پایه های رایس ودوگان آنهادرc^*−مدولهای هیلبرت وفضاهای هیلبرت رانشان می دهیم .

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۵–۱ فضای ضرب داخلی و فضای هیلبرت

۵–۲ جبر

۵–۳ مدول ها

۵–۴ عملگرهای الحاقی و بررسی ویژگیهای آنها

۵–۵ عملگرهای فشرده بر روی فضاهای هیلبرت

۵–٦ فرم یک و نیم خطی

در این فصل تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های دیگر معرفی می شوند ودر صورت نیاز برخی قضایا و لم های مفید آورده می شود.

۱—۱ فضای ضرب داخلی و فضای هیلبرت

تعریف ۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. یک **نیم‌نرم**[۱] یا **شبه نرم** روی X نگاشت ρ از X به $\mathbb{R}$ است به‌طوری‌که برای تمام $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$، شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $\rho(x) \geq 0$؛

۲) $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$؛

۳) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$؛

نیم‌نرمی که واجد شرط زیر باشد را یک **نرم**[۲] می گوییم

۴) $x = 0$ اگر و تنها اگر $\rho(x) = 0$.

نرم را با $\|\cdot\|$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱ فضای نرم‌دار X، فضایی برداری می‌باشد که یک نرم روی آن تعریف شده است.

[۱] simenorm
[۲] norm

قضیه ۱.۱ درهرفضای نرم دار شده $(X, \|\cdot\|)$ تابع $d : X \times X \to I\!R$ که با رابطه $d(x,y) = \|x-y\|$ تعریف می شود ، یک مترپایانسبت به انتقال است .

تعریف ۳.۱ فرض که (X,d) یک فضای متری باشد . دنباله (x_n) در X ،دنباله‌ی کوشی است ، هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ ، عددصحیح مثبت k وجودداشته باشدبه طوریکه اگر $m,n > k$ آنگاه $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

تعریف ۴.۱ فضای نرم‌دار کامل یا **باناخ**[۳]، فضایی است که هر دنباله کشی در آن (نسبت به متر ایجادشده به وسیله‌ی نرم خود) همگرا باشد .

تعریف ۵.۱ برای فضاهای برداری و نرم‌دار Y,X، یک یکریختی خطی و **طولپا**[۴] از X به روی Y، نگاشت خطی و دوسویی T از X به Y است به‌طوری‌که برای هر $x \in X$، $\|Tx\| = \|x\|$.

نمادگذاری ۱.۱ فرض کنید Y,X فضاهایی برداری و نرم‌دار روی میدان اسکالر یکسان $I\!F$ باشند . $L(X,Y)$ رافضای همه نگاشتهای خطی از X به Y در نظر می‌گیریم . زیر فضای خطی $L(X,Y)$ که شامل همه نگاشتهای خطی کراندار(پیوسته) از X به Y است رابا

[۳] Banach
[۴] Isometric

$B(X,Y)$ نمایش می دهیم ، به طور معمول $B(X,Y)$ به عنوان یک فضای برداری نرم‌دار با نرم زیر معرفی می‌شود:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

$B(X,X)$ را با $B(X)$ نمایش می دهیم . $B(X,F)$ با X^* نشان داده می‌شود و به آن فضای دوگان X گفته می‌شود. عناصر فضای دوگان، تابعک‌های خطی و پیوسته می‌باشند. $B(X,Y)$ کامل است، هرگاه Y کامل باشد.بنابراین فضای دوگان X^* همواره کامل است.

تعریف ۶.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد. یک **ضرب داخلی**[۵] روی X، تابعی است مانند $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to C$ به‌طوری‌که برای هر $a, b \in C$ و $x, y, z \in X$ داشته باشیم:

۱) $\langle ax+by, z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$؛

۲) $\langle x, ay+bz\rangle = \overline{a}\langle x,y\rangle + \overline{b}\langle x,z\rangle$؛

۳) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$؛

۴) $\langle x,x\rangle \geq 0$؛

۵) $\langle x,x\rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

ویژگی‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهند که ضرب داخلی نسبت به مؤلفه اول، خطی و نسبت به مؤلفه دوم، مزدوج خطی است.

[۵] Inner product

تعریف ۷.۱ فضای برداری X به همراه یک ضرب داخلی تعریف شده روی آن یک **فضای ضرب داخلی**[۶] یا **فضای پیش هیلبرت**[۷] نامیده می‌شود.
با استفاده از ضرب داخلی، نرمی به صورت زیر روی فضا تعریف می‌شود:

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

تعریف ۸.۱ یک فضای ضرب داخلی X را یک **فضای هیلبرت**[۸] می‌نامیم هرگاه X نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی، کامل باشد.
یک فضای هیلبرت را به طور معمول با H نشان می‌دهیم.

مثال ۱.۱ C^n با ضرب داخلی

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

که در آن $x = (x_1, \cdots, x_n)\ ,\ y = (y_1, \cdots, y_n) \in C^n$ یک فضای ضرب داخلی است.
هم‌چنین با نرم

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

که به وسیله ضرب داخلی تولید می‌شود، یک فضای نرم‌دار کامل و در نتیجه هیلبرت می‌باشد.

[۶] Inner product space
[۷] Pre-Hilbert space
[۸] Hilbert space

مثال ۲.۱ $l^{۲}(N)$ یابطور ساده‌تر $l^{۲}$ فضای دنباله های مختلط $X = (x_n)_{n=۱}^{\infty}$ روی C است که‌مجموع مربع متناهی دارند یعنی هر $x = (x_n)_{n=۱}^{\infty} \in l^{۲}$ در رابطه‌ی $\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^{۲} < \infty$ صدق می کند. دراین فضاجمع به صورت موٌلفه به موٌلفه و ضرب داخلی ونرم برای هر $x = (x_n)_{n=۱}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=۱}^{\infty}$ در $l^{۲}$ به صورت $\langle x, y\rangle = \sum_{n=۱}^{\infty} x_n \overline{y}_n$ و $\|x\| = (\sum_{i=۱}^{\infty} |x_i|^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می‌شود. $l^{۲}$ باضرب داخلی و نرم تعریف شده یک فضای باناخ ودر نتیجه فضای هیلبرت است. $l^{۲}$ رافضای دنباله‌ای هیلبرت گوییم .

قضیه ۲.۱ (**نامساوی کشی شوارتز**[۹])
در فضای ضرب داخلی X، نامساوی زیر برای هر x و y در X همواره برقرار است .

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

قضیه ۳.۱ (**نامساوی مثلثی**) در فضای ضرب داخلی X،برای هر x و y در X داریم :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

قضیه ۴.۱ (**قانون متوازی الاضلاع**) در فضای ضرب داخلی X، نامساوی زیر برای هر x و y در X همواره برقرار است .

$$\|x + y\|^{۲} + \|x - y\|^{۲} = ۲\|x\|^{۲} + ۲\|y\|^{۲}$$

[۹] Cauchy-Schwarz inequality

هرفضای هیلبرت یک فضای باناخ است ،ولی بسیاری از فضاهای باناخ هستندکه فضای هیلبرت نیستند،مانندفضای l^p یعنی فضای $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ که درآن $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ و نرم‌درآن به صورت $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ می باشد، به ازای $p \neq 2$ یک فضای هیلبرت نیست چون اگر $x = (1, 1, 0, 0, ...)$, $y = (1, -1, 0, 0, ...)$ آنگاه $\|x\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$, $\|y\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$, $\|x+y\|_p = 2$, $\|x-y\|_p = 2$ واضح است که برای $p \neq 2$ قانون متوازی الاضلاع برای آن برقرار نیست پس یک فضای هیلبرت نیست .

قانون متوازی الاضلاع عملاً فضاهای هیلبرت را در رده‌ی فضاهای باناخ ،مشخص می سازد.اگردرفضای باناخ X ، قانون متوازی الاضلاع برقرار باشد،فرمول

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^n \|x + i^n y\|^2$$

یک ضرب داخلی روی X تعریف می کند.

قضیه ۵.۱ (**اتحادقطبی**) در فضای ضرب داخلی X،برای هر x و y درX داریم :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^n \|x + i^n y\|^2$$

قضیه ۶.۱ نرم القا شده توسط ضرب داخلی، تمام شرایط نرم را دارا می‌باشد. لذا عبارت $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ واقعاً یک نرم تعریف می کند.

تعریف ۹.۱ (۱) درفضای هیلبرت بردارهای x, y رامتعامد گویند هرگاه ، $\langle x, y\rangle = 0$ و می نویسیم ، $x \perp y$.

(۲) مجموعه $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک دستگاه متعامد نامیده می شود اگر به ازای هر $\alpha \neq \beta$ ، $e_\alpha \perp e_\beta$.
اگرافزون براین برای هر $\alpha \in A$ ، $\|e_\alpha\| = 1$ ،مجموعه $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک دستگاه متعامدیکه نامیده می شود.

(۳) می گوییم بردار x برمجموعه ناتهی S عمود است اگر برای هر $y \in S$ ، $x \perp y$ به عبارت دیگر ، $S^\perp = \{y : y \perp x; \forall x \in S\}$.
$S^\perp$ یک زیرفضای بسته H است .

قضیه ۷.۱ اگر M یک زیر فضای بسته فضای هیلبرت H باشد آنگاه ، $H = M \oplus M^\perp$.

قضیه ۸.۱ فرض که $\{e_n\}_{n\in J}$ یک مجموعه متعامد یکه درفضای هیلبرت H باشد ، آنگاه گزاره های زیر معادلند.(J یک مجموعه‌ی صحیح و شماراست)

(الف) $\{e_n\}_{n\in J}$ بیشین [۱۰]است .

(ب) $\{e_n\}_{n\in J}$ کامل است یعنی هر $x \in H$ را می توان به صورت $x = \sum_{n\in J} c_n e_n$ نوشت .

(ج) (اولین اتحاد پارسوال) برای هر $x \in H$ ، $\|x\|^2 = \sum_{n\in J} |\langle e_n, x\rangle|^2$.

(د) (دومین اتحاد پارسوال) برای هر $x, y \in H$ ، $\langle x, y\rangle = \sum_{n\in J} \langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle$.

(ه) اگر برای هر $n \in J$ ، $\langle e_n, x\rangle = 0$ آنگاه $x = 0$.

(و) مجموعه‌ی تولیدشده توسط$\{e_n\}_{n\in J}$ در H چگال است .

[۱۰] maximal

اثبات.

(الف)$\Leftarrow$ (هـ): اگر(هـ) درست نباشد پس $x \neq ۰$ چنان وجود دارد به طوریکه ، $\langle e_n, x\rangle = ۰$ وبرای هر$e_n \in \{e_n\}_{n\in J}$ تساوی $e = \frac{x}{\|x\|}$ برقراراست . می توان نشان داد که $\{e_n, e\}_{n\in J}$ یک مجموعه متعامد یکه‌است زیرا $\|e\| = ۱$ وداریم

$$\langle e_n, e\rangle = \langle e_n, \frac{x}{\|x\|}\rangle = \frac{۱}{\|x\|}\langle e_n, e\rangle = ۰$$

و همچنین$\{e_n, e\}_{n\in J}$ شامل $\{e_n\}_{n\in J}$ می باشد که با ماکزیمال بودن $\{e_n\}_{n\in J}$ در تناقض است .

(هـ)$\Leftarrow$(ب): اولاً می دانیم بنا به قضیه کتاب سیمونز(قضیه B صفحه۲۵۳)اگر $\{e_i\}_{i\in J}$ یک مجموعه متعامد یکه‌در فضای هیلبرت H باشد و x یک بردار دلخواه آنگاه مجموعه $S = \{e_i \quad | \quad \langle x, e_i\rangle \neq ۰\}$ یا تهی است یا شمارش پذیر پس $\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle\ e_i$ با معنی است .
همچنین بنا به قضیه کتاب سیمونز(قضیه D صفحه ۲۵۴) داریم ، اگر $\{e_i\}_{i\in J}$ متعامد یکه باشد و $x \in H$ دلخواه باشد آنگاه $(x - \sum_{n\in J}\langle x, e_i\rangle\ e_i) \perp e_j$ پس اگر (هـ) برقرار باشد آنگاه ، $((x - \sum_{n\in J}\langle x, e_n\rangle\ e_n) \perp e_m)$ برقراراست ودرنتیجه $x - \sum_{n\in J}\langle x, e_n\rangle\ e_n = ۰$ پس خواهیم داشت : $x = \sum_{n\in J}\langle x, e_n\rangle\ e_n$ بنابراین تساوی $x = \sum_{n\in J} c_n\ e_n$ بدست می آید که دراین تساوی $\langle x, e_n\rangle = c_n$ در نظر گرفته شده است .

(ب)$\Leftarrow$ (ج): هرگاه $x = \sum_{n\in J}\langle x, e_n\rangle\ e_n$ آنگاه

$$\|x\|^۲ = \langle x, x\rangle = \langle \sum_{n\in J}\langle x, e_n\rangle\ e_n, \sum_{n\in J}\langle x, e_n\rangle\ e_n\rangle$$

باتوجه به پیوستگی ضرب داخلی وخواص خطی ضرب ، وچون $\sum_{n\in J}\langle x, e_n\rangle\ e_n$ روی تعدادشمارش پذیری $\langle x, e_n\rangle$ مخالف صفردر نظرگرفته می شود پس از تساوی فوق نتیجه می

گیریم که

$$\langle\sum_{n\in J}\langle x,e_n\rangle\ e_n,\sum_{n\in J}\langle x,e_n\rangle\ e_n\rangle=\langle\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle\ e_n,\lim_{k\to}\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle\ e_n\rangle$$

$$=\lim_{k\to\infty}\langle\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle\ e_n,\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle\ e_n\rangle=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle\ \langle e_n,x\rangle=\lim_{k\to}\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle\ \overline{\langle x,e_n\rangle}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\|\langle x,e_n\rangle\|^2=\sum_{n\in J}|\langle x,e_n\rangle|^2$$

ودرنتیجه $\|x\|^2=\sum_{n\in J}|\langle x,e_n\rangle|^2$.

(ج)⇐(الف):اگر $\|x\|^2=\sum_{n\in J}|\langle e_n,x\rangle|^2$ باشد،می خواهیم ثابت کنیم $\{e_n\}_{n\in J}$هاماکزیمال هستند،اگر ماکزیمال نباشندپس دستگاه متعامدیکه $\{e_n,e\}_{n\in J}$ موجوداست بطوریکه $\{e_n\}_{n\in J}$ زیرمجموعه محض آن بودهوچون $\{e_n,e\}_{n\in J}$ متعامدیکه است پس $\|e\|=1$ اماطبق قسمت (ج) $0=\sum_{n\in J}|\langle e_n,e\rangle|^2=\|e\|^2$ که این باماکزیمال بودن $\{e_n,e\}_{n\in J}$ درتناقض است پس $\{e_n\}_{n\in J}$هاماکزیمال هستند.

(ب)⇐(د): x,y رابه صورت $x=\sum_{n\in J}\langle x,e_n\rangle\ e_n$ و $y=\sum_{n\in J}\langle y,e_n\rangle\ e_n$ درنظرمی گیریم ،

$$\langle x,y\rangle=\langle\sum_{n\in J}\langle x,e_n\rangle\ e_n,\sum_{n\in J}\langle y,e_n\rangle\ e_n\rangle=\langle\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle\ e_n,\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle\ e_n\rangle$$

$$=\lim_{k\to\infty}\langle\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle\ e_n,\sum_{n=1}^{k}\langle y,e_n\rangle\ e_n\rangle$$

اگر $n\neq m$ آنگاه $\langle e_n,e_m\rangle=0$ و $\langle e_n,e_n\rangle=\|e_n\|^2=1$ وبنابه خاصیت ضرب داخلی ،

$$\lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle\ \overline{\langle y,e_n\rangle}\langle e_n,e_n\rangle)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle\ \langle e_n,y\rangle=\sum_{n\in J}\langle x,e_n\rangle\ \langle e_n,y\rangle.$$

(د)⇐(ج): فرض که برای هر $x, y \in H$ ، $\langle x, y\rangle = \sum_{n\in J}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle$ برقرارباشددراین صورت

$$\|x\|^{۲} = \langle x, x\rangle = \sum_{n\in J}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, x\rangle = \sum_{n\in J}\langle x, e_n\rangle\overline{\langle x, e_n\rangle} = \sum_{n\in J}|\langle x, e_n\rangle|^{۲} = \sum_{n\in J}|\langle e_n, x\rangle|^{۲}$$

درنتیجه $\|x\|^{۲} = \sum_{n\in J}|\langle e_n, x\rangle|^{۲}$.

(الف)⇐(و): فرض که $\{e_n\}_{n\in J}$ ماکزیمال باشد ، می خواهیم ثابت کنیم که اگر $W = Span(\{e_n\})$ باشد آنگاه $\overline{W} = H$ و $\overline{W} = W \cup W'$ ،

$$W \subset H \Rightarrow \overline{W} \subset \overline{H} = H \Rightarrow \overline{W} \subset H$$

حال اگر $\overline{W} \neq H$ پس چون $\overline{W}$ زیرفضای بسته H است بنابه قضیه کتاب سیمونز یک $x_۰ \neq ۰$ وجود دارد بطوریکه $x_۰ \perp \overline{W}$ درنتیجه $x_۰ \perp \{e_i\}$ بنابراین $x_۰ = ۰$ چون اگر $x_۰ \neq ۰$ باشد آنگاه اگر $\frac{x_۰}{\|x_۰\|}$ را به مجموعه $\{e_i\}$هااضافه کنیم یک مجموعه متعامد یکه بدست می آید که متناقض باماکزیمال بودن $\{e_i\}$ دارد پس $\overline{W} = H$.

(و)⇐(الف): فرض کنیم $W = Span\{e_i\}$ و $\overline{W} = H$.ثابت می کنیم که $\{e_n\}$ ماکزیمال است ، اگر $\{e_n\}$ ماکزیمال نباشد پس $e \in H$ موجوداست به قسمی که $\|e\| = ۱$ و $e \perp \{e_i\}$ اگر $x = \sum_{k=۱}^{n} c_k e_k$ آنگاه $\langle e, x\rangle = \langle e, \sum_{k=۱}^{n} c_k e_k\rangle = ۰$ پس x برهرعنصر W عموداست و اگر $z \in \overline{W} = H$ آنگاه $z_n \in W$ موجوداست بطوریکه $z_n \to z$ و

$$\langle e, z\rangle = \langle e, \lim_{n\to\infty} z_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle e, z_n\rangle = \lim_{n\to\infty} ۰ = ۰$$

پس $\langle e, z\rangle = ۰$ درنتیجه e برهرعنصر z از H عموداست پس $\langle e, e\rangle = ۰$ درنتیجه $|e\|^{۲} = ۰$ بنابراین $e = ۰$ واین تناقض است پس $\{e_n\}$ ماکزیمال است .

□