دانشگاه تبریز

دانشکده علـوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشتهی

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

خانوادهی ایدهآلهای اوکا و آکو درحلقههای جابجایی

استادان راهنما

دکتر حسن مهتدیفر و دکتر رضا نقیپور

استاد مشاور

دکتر نعمت اله شیر محمدی

پژوهشگر

حسین رحمانی قارنا

۱۳۹۱

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینیم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینیم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

روح پدر و مادرم،

بهترین همراهم: همسرم

و

فرزندان عزیزم: بهنام، مهدی و سارا

بنام خدا

و مَنْ لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای اول خود، جناب آقای دکتر حسن مهتدی‌فر، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم،که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
تشکر فراوان از آقای دکتر رضا نقی‌پور از قبول زحمت ایشان به عنوان استاد راهنمای دوم بنده، زحمات فراوان، راهنمایی‌های گرانقدر و تلاش‌های بی‌دریغ‌شان در طی دوران تحصیلم که همواره امید بخش بوده و خواهد بود.
از استاد مشاورخود، آقای دکتر نعمت‌اله شیرمحمدی، که در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. تقدیر و تشکر خالصانه‌ام را به پاس همه تشویق‌های ارزنده آن استاد رئوف، تقدیم می‌کنم.
از آقای دکتر پرویز سهندی که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

نام خانوادگی دانشجو: رحمانی قارنا نام: حسین

عنوان: خانواده‌ی ایده‌آل‌های اوکا و آکو درحلقه‌های جابجایی

استادان راهنما : دکتر حسن مهتدی‌فر و دکتر رضا نقی‌پور

استاد مشاور : دکتر نعمت اله شیر محمدی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۵۰

کلید واژه‌ها: خانواده‌ی Ako, Oka و اصل P.I.P.

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. اصل ایده‌آل اول بیان می‌کند که اگر $\mathcal{F}$ یک خانواده‌ی آکو یا اوکا از ایده‌آل‌های R باشد، آنگاه $\mathrm{Max}(\mathcal{F}') \subseteq \mathrm{Spec}(R)$، که در آن $\mathcal{F}'$ مکمل $\mathcal{F}$ است.

فرض کنیم $\mathcal{F}$ یک خانواده‌ی نیم‌فیلتراز ایده‌آل‌های R باشد و هر زنجیر غیرخالی در $\mathcal{F}'$ (با رابطه‌ی شمول) دارای کران بالایی در $\mathcal{F}'$ باشد، در این‌صورت همه‌ی خواص مذکور در دیاگرام استنباطی زیر معادل هستند:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(P_1) & \Longrightarrow & (P_2) & \Longrightarrow & (P_3) & \Longrightarrow & Str.Ako & \Longrightarrow & Ako \\
 & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & & & Str.Oka & \Longrightarrow & Oka & \Longrightarrow & \mathrm{P.I.P}
\end{array}$$

فرض کنیم $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌ها در یک حلقه‌ی منظم فون‌نیومن R باشد، بطوری‌که $R \in \mathcal{F}$. دراین‌صورت هر یک از شرایط (P_2) و (P_3) معادل با منوئیدال بودن $\mathcal{F}$ است.

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان نامه که شرح و بسط [۵] می‌باشد، به مطالعه‌ی مفاهیم خانواده‌های اوکا و آکو از ایده‌آل‌های حلقه‌ی R پرداخته، و با اثبات روابط بین این دو خانواده در یک کلاس مشخص از حلقه‌ها، به تقویت و ارتقا این روابط می‌پردازیم. همچنین با ارائه مثال‌های ملموس از خانواده‌ی ایده‌آل‌ها، نشان می‌دهیم که چنین روابطی نمی‌توانند همواره برگشت پذیر باشند. در ادامه حلقه‌ی منظم فون‌نیومن را مطالعه می‌کنیم.

مفاهیم اوکا و آکو برای خانواده‌ی ایده‌آل‌ها در حلقه‌های جابجایی، اولین بار توسط لم[۱] و ریز[۲] در سال ۲۰۰۸ معرفی شدند. آنان خواص زیاد و جالبی را در مورد این خانواده‌ها، بررسی نمودند. به منبع [۴] مراجعه فرمایید.

در فصل **۱** تعاریف و اصول و مفاهیم اولیه‌ی $(I:_R J),(I,J)$، آکو و آکوی قوی، اوکا و اوکای قوی، نیم‌فیلتر، فیلتر، منوئیدال، نیم-منوئیدال، خاصیت‌های $\mathcal{F}_{pr}(R)$، $\mathcal{F}_{f.g}(R)$، $(Sq)_n$، $(Sq)_n^*$، (P_1)، (P_2)، (P_3)، اصل ایده‌آل اول، قضیه‌ی وابستگی منطقی و چند مثال از این مفاهیم، آورده شده است.

در فصل **۲** خانواده‌ی ایده‌آل‌های اصلی و با تولید متناهی را، در این رابطه مورد مطالعه قرارمی‌دهیم، و قضیه‌ی مهم زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه‌ی وابستگی منطقی: فرض کنید $\mathcal{F}$خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R که شامل خود R است،

---

[۱] lam

[۲] Reyes

باشد. در این‌صورت دیاگرام زیر را داریم:

$$\begin{array}{ccccccccc} (P_1) & \Longrightarrow & (P_2) & \Longrightarrow & (P_3) & \Longrightarrow & Str.Ako & \Longrightarrow & Ako \\ & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & & & Str.Oka & \Longrightarrow & Oka & \Longrightarrow & \text{P.I.P} \end{array}$$

در فصل **۳** خانواده‌ی ایده‌آل‌های دو عضوی و نیم‌فیلتر را مطالعه می‌کنیم. در فصل **۴** حلقه‌های منظم فون‌نیومن را مطالعه، و به خانواده‌های بیش از دو عضو نیز توجه می‌کنیم. با توجه به اینکه در این نوع حلقه‌ها، ایده‌آل‌ها خودتوان هستند، روابطی بین خانواده‌ی ایده‌آل‌ها موجود است که مشابه آنها برای حلقه‌های دیگر برقرار نیست، و مثال‌هایی آورده شده است که اوکا باشد ولی اوکای قوی نباشد. همچنین مثالی آورده شده است که اوکای قوی بوده ولی آکوی قوی نباشد، و قضیه‌ی مهم زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم $\mathcal{F}$ یک خانواده از ایده‌آل‌ها، در یک حلقه منظم فون‌نیومن R باشد با $R \in \mathcal{F}$.
شرایط زیر معادل هستند:

۱) $\mathcal{F}$ یک خانواده‌ی آکو است.

۲) برای عضوهای خودتوان $e, e' \in R$ و $I \trianglelefteq R$، اگر $(I,e),(I,e') \in \mathcal{F}$ آنگاه $(I, ee') \in \mathcal{F}$.

۳) برای عضوهای خود توان و متعامد $e, e' \in R$ و $I \trianglelefteq R$، اگر $(I,e),(I,e') \in \mathcal{F}$ آنگاه $I \in \mathcal{F}$.

۴) اگر $A, B \trianglelefteq R$ چنان باشند که $(A+B)/AB$ دوری است، اگر $A, B \in \mathcal{F}$ آنگاه $AB \in \mathcal{F}$.

در سراسر این پایان‌نامه $\mathbf{R}$ یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار می‌باشد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

فرض کنیم I و J زیرمجموعه‌هایی دلخواه از R باشند. ایده‌آل تولید شده توسط اجتماع I و J را با نماد (I,J) نمایش می دهیم. به‌ویژه، اگر $I,J \trianglelefteq R$ و $a \in R$، آنگاه $(I,J) = I + J$ و $(I,a) = I + < a >$.

تعریف ۱.۱.۱. برای هر $I \trianglelefteq R$ و $A \subseteq R$ تعریف می کنیم:

$$(I :_R A) = \{r \in R : rA \subseteq I\}.$$

تعریف ۲.۱.۱. خانواده $\mathcal{F}$ از ایده‌آل‌های R را که $R \in \mathcal{F}$، یک خانواده آکو می‌نامیم هرگاه برای هر $a,b \in R$ و هر $I \trianglelefteq R$، اگر $(I,a),(I,b) \in \mathcal{F}$ آنگاه $(I,ab) \in \mathcal{F}$.

تعریف ۳.۱.۱. خانواده‌ی $\mathcal{F}$ از ایده‌آل‌های R را که $R \in \mathcal{F}$ یک خانواده‌ی آکوی قوی می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in R$ وهر $I,B \trianglelefteq R$، اگر $(I,a),(I,B) \in \mathcal{F}$ آنگاه $(I,aB) \in \mathcal{F}$.

تعریف ۴.۱.۱. خانواده‌ی $\mathcal{F}$از ایده‌آل‌های R را که $R \in \mathcal{F}$ یک خانواده‌ی اوکا می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in R$ وهر $I \trianglelefteq R$، اگر $(I,a),(I :_R a) \in \mathcal{F}$ آنگاه $I \in \mathcal{F}$.

تعریف ۵.۱.۱. خانواده‌ی $\mathcal{F}$از ایده‌آل‌های R را که $R \in \mathcal{F}$ یک خانواده‌ی اوکای قوی می‌نامیم هرگاه برای هر $I, A \trianglelefteq R$، اگر $(I, A), (I :_R A) \in \mathcal{F}$ آنگاه $I \in \mathcal{F}$.

تعریف ۶.۱.۱. خانواده‌ی $\mathcal{F}$ را نیم‌فیلتر می‌نامیم هرگاه برای $I, J \trianglelefteq R$، اگر $J \subseteq I$ و $J \in \mathcal{F}$ آنگاه $I \in \mathcal{F}$.

تعریف ۷.۱.۱. خانواده‌ی F را فیلتر می‌نامیم هرگاه نیم‌فیلتر بوده و از $A, B \in F$ نتیجه شود $A \cap B \in \mathcal{F}$.

تعریف ۸.۱.۱. خانواده‌ی $\mathcal{F}$را منوئیدال نامیم هرگاه از $A, B \in \mathcal{F}$ نتیجه شود $AB \in \mathcal{F}$.

تعریف ۹.۱.۱. خانواده‌ی $\mathcal{F}$ را نیم- منوئیدال گوئیم اگر $< a >\in \mathcal{F}$ و $B \in \mathcal{F}$ آنگاه $aB \in \mathcal{F}$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم n یک عدد طبیعی باشد. گوئیم خانواده‌ی $\mathcal{F}$ دارای خاصیت $(Sq)_n$ است هرگاه برای هر $I, J \trianglelefteq R$، اگر $J^n \subseteq I \subseteq J$ و $J \in \mathcal{F}$ آنگاه $I \in \mathcal{F}$.

تعریف ۱۱.۱.۱. گوئیم خانواده‌ی $\mathcal{F}$ دارای خاصیت $(Sq)_n^*$ است هرگاه برای هر $I, J \trianglelefteq R$، اگر $J^n \subseteq I \subseteq J$ و $I \in \mathcal{F}$ آنگاه $J \in \mathcal{F}$.

تذکر ۱۲.۱.۱. با توجه به تعاریف فوق، خواص $(Sq)_n$ (بترتیب $(Sq)_n^*$) را با علامت (Sq) (بترتیب $(Sq)^*$) نشان می‌دهیم.
فرض کنیم $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R باشد. خواص P_{i} به ازای $\text{i} = ۱, ۲, ۳$ بشرح زیر معرفی می‌شوند:
۱) گوئیم $\mathcal{F}$ در خاصیت $(P_۱)$ صدق می‌کند هرگاه $\mathcal{F}$ فیلتر منوئیدال باشد.
۲) گوئیم $\mathcal{F}$ در خاصیت $(P_۲)$ صدق می‌کند هرگاه $\mathcal{F}$ تحت حاصل ضرب دوبه‌دو بسته باشد و در شرط $(Sq)^*$ صدق کند.
۳) گوئیم $\mathcal{F}$ در خاصیت $(P_۳)$ صدق می‌کند هرگاه $\mathcal{F}$ تحت اشتراک دوبه‌دو بسته باشد و در شرط (Sq) صدق کند.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید A یک حوزه صحیح با میدان کسرهای K باشد. یک A- زیر مدول I از K را یک ایده‌آل کسری A می‌نامیم هرگاه $I \neq ۰$ و $\alpha(\neq ۰) \in K$ موجود باشد بطوری‌که $\alpha I \subseteq A$.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید R یک حوزه صحیح باشد. در این صورت یک ایده‌آل J از R را معکوس پذیر[1] می‌نامیم، هرگاه یک ایده‌آل کسری از R مانند I موجود باشد که $IJ = R$. چون معکوس یک ایده‌آل وارون‌پذیر منحصر به فرد است، از این به بعد معکوس ایده‌آل J را در صورت وجود با J^{-1} نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. یک ایده‌آل J از R را یک ایده‌آل ضربی گوئیم، هرگاه به‌ازای هر ایده‌آل $I \subseteq J$، یک ایده‌آل مانند K از R موجود باشد بطوری‌که $I = JK$. در این صورت $I = J(I :_R J)$.

قضیه ۱۶.۱.۱. *(قضیه‌ی فاکتورگیری) فرض کنید R یک حوزه صحیح و I, J ایده‌آل‌هایی از R باشند بطوری‌که $I \subseteq J$. تحت هر یک از شرایط زیر رابطه $I = J(I :_R J)$ برقرار است.*

۱) *J یک ایده‌آل معکوس پذیر باشد؛*

۲) *J یک ایده‌آل اصلی باشد؛*

۳) *$J = R$ یا $J = I$ یا $I = 0$؛*

برهان. ۱) طبق شرط (۱) ایده‌آل کسری مانند J^{-1} از R موجود است به‌طوری‌که $J^{-1}J = R$، بنابراین $J^{-1}IJ = J^{-1}JI \subseteq I$ و لذا طبق تعریف $J^{-1}I \subseteq (I :_R J)$. با ضرب طرفین در J، داریم

$$I \subseteq J(I :_R J) \subseteq I.$$

لذا $I = J(I :_R J)$.

۲) چون هر ایده‌آل اصلی غیر صفر معکوس‌پذیر است، پس (۲) از (۱) به دست می‌آید. در حالتی که ایده‌آل اصلی صفر باشد، حکم واضح است.

۳) اگر $J = R$ باشد، آنگاه $(I :_R J) = I$، زیرا بدیهی است که $I \subseteq (I :_R J)$. بر عکس اگر $x \in (I :_R R)$ آنگاه $xR \subseteq I$ لذا $x \in I$ $x = x \times 1 =$ یعنی $(I :_R J) \subseteq I$. بنابراین $J(I :_R J) = RI = I$. اگر $J = I$ باشد، آنگاه $(I :_R J) = R$. پس $J(I :_R J) = JR = I$. اگر $I = 0$ باشد، آنگاه $(0 :_R J) = 0$، و لذا $J(0 :_R J) = 0 = I$. □

[1] Invertible

تعریف ۱۷.۱.۱. مکمل خانواده‌ی $\mathcal{F}$ را که با $\mathcal{F}'$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم
$$\mathcal{F}' = \{I \trianglelefteq R : I \notin \mathcal{F}\}.$$

تبصره ۱۸.۱.۱. *فرض کنید $\mathcal{F}$ یک خانواده از ایده‌آل‌های R باشد. مجموعه‌ی تمام اعضای ماکسیمال $\mathcal{F}'$ نسبت به رابطه شمول را با $\mathrm{Max}(\mathcal{F}')$ نشان می‌دهیم.*

گوئیم $\mathcal{F}'$ یک خانواده‌ی $M - P$ [۲] است هرگاه
$$\mathrm{Max}(\mathcal{F}') \subseteq Spec(R).$$

با این بیان اصل ایده‌آل اول $(\mathrm{P.I.P})$. بیان می‌کند که هر خانواده‌ی آکو و اوکا از ایده‌آل‌ها مانند $\mathcal{F}$، $\mathcal{F}'$ یک خانواده $M - P$ است.

قضیه ۱۹.۱.۱. *(اصل ایده‌آل اول)*
اگر $\mathcal{F}$ یک خانواده اوکا یا آکو از ایده‌آل‌ها باشد، آنگاه $\mathcal{F}'$ یک خانواده $M - P$ است.

برهان. اثبات از طریق برهان خلف است. فرض کنید $I \in \mathrm{Max}(\mathcal{F}')$ موجود باشد که ایده‌آل اول نباشد. پس $a, b \in R$ موجودند بطوری‌که $ab \in I$ ولی $a \notin I$ و $b \notin I$.
چون $a \in (I, a) - I$ پس $I \subsetneqq (I, a)$ و از ماکسیمال بودن I نتیجه می‌شود $(I, a) \in \mathcal{F}$.
همچنین از اینکه $b \in (I :_R a) - I$ نتیجه می‌شود $I \subsetneqq (I :_R a)$ و لذا از ماکسیمال بودن I $(I :_R a) \in \mathcal{F}$. حال اگر $\mathcal{F}$ خانواده اوکا باشد، آنگاه $I \in \mathcal{F}$ که تناقض است. پس $\mathcal{F}$، اوکا نیست. و لذا طبق فرض $\mathcal{F}$ بایستی آکو باشد. حال از اینکه $b \in (I, b) - I$ نتیجه می‌شود $I \subsetneqq (I, b)$ و لذا $(I, b) \in \mathcal{F}$. از طرفی دیدیم که $(I, a) \in \mathcal{F}$. چون $\mathcal{F}$ خانواده آکو است، نتیجه می‌شود که $I \in \mathcal{F}$ که تناقض است. $\square$

[۲] Maximal implies prime

فصل ۲

خانواده‌ی ایده‌آل‌های اصلی و با تولید متناهی

۱.۲ خانواده‌ی ایده‌آل‌های اصلی و با تولید متناهی

گزاره ۱.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار و $\mathcal{F}$ یک خانواده از ایده‌آل‌های R باشد.*

۱) *به‌ازای هر $n \geq ۲$، $(Sq)_n$ها دو بدو با هم معادل هستند.*

۲) *به‌ازای هر $n \geq ۲$، $(Sq)^*_n$ها دو بدو با هم معادل هستند.*

برهان. ۱) کافی است از درستی $(Sq)_۲$، درستی $(Sq)_n$ را به‌ازای $n \geq ۲$ را نتیجه بگیریم. (زیرا به‌ازای $n \geq ۲$، خاصیت $(Sq)_n$ بوضوح خاصیت $(Sq)_۲$ را نتیجه می‌دهد). بدین‌منظور، فرض کنیم $J^n \subseteq I \subseteq J$ و $J \in \mathcal{F}$ ولی $I \notin \mathcal{F}$ چون $I + J = J \in \mathcal{F}$، و $J^n \subseteq I \notin \mathcal{F}$، فرض می کنیم k بزرگترین مقدار ممکن باشد بطوری که $I+J^k \in \mathcal{F}$. در این حالت با توجه به فرض $(Sq)_۲$ چون داریم

$$(I + J^k)^۲ = I^۲ + IJ^k + J^{۲k} \subseteq I + J^{k+۱} \subseteq I + J^k.$$

لذا $(I + J^{k+۱}) \in \mathcal{F}$ که یک تناقض است.

۲)کافی است ازدرستی $(Sq)^*_۲$، درستی $(Sq)^*_n$ برای $n \geq ۲$ را نتیجه بگیریم (چون به‌ازای $n \geq ۲$ خاصیت $(Sq)^*_n$ بوضوح خاصیت $(Sq)^*_۲$ را نتیجه می‌دهد). بدین منظور، فرض می‌کنیم

$J^n \subseteq I \subseteq J$ و $I \in \mathcal{F}$ اما $J \notin \mathcal{F}$. لذا

$$I + J = J \notin \mathcal{F}$$

و

$$J^n + I = I \in \mathcal{F}.$$

پس فرض می کنیم k بزرگترین مقدار ممکن باشد بطوری که $I + J^k \notin \mathcal{F}$، در این حالت با توجه به فرض $(Sq)_۲^*$ چون داریم:

$$(I + J^k)^۲ \subseteq I + J^{k+۱} \subseteq I + J^k.$$

و $I + J^{k+۱} \in \mathcal{F}$. بنابراین $I + J^k \in \mathcal{F}$ که یک تناقض است. □

گزاره ۲.۱.۲. *خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R مانند $\mathcal{F}$ در شرط $(P_۳)$ صدق می‌کند، اگر وتنها اگر به‌ازای ایده‌آل‌های دلخواه I, A, B، از R بتوان از $(I, A), (I, B) \in \mathcal{F}$ نتیجه بگیریم:*

$$(I, AB) \in \mathcal{F}.$$

برهان. $(\Longleftarrow)$. قرار می‌دهیم

$$A' = (I, A) \in \mathcal{F}$$

و

$$.B' = (I, B) \in \mathcal{F}$$

بنا به شرط $(P_۳)$، $A' \cap B' \in \mathcal{F}$، و چون

$$(A' \cap B')^۲ \subseteq A'B' = (I, A)(I, B) \subseteq (I, AB) \subseteq A' \cap B'.$$

از فرض $(Sq)_۲$ نتیجه می‌گیریم: $(I, AB) \in \mathcal{F}$.

$(\Longrightarrow)$. نشان می دهیم $(Sq)_۲$ برقرار و $\mathcal{F}$ نسبت به اشتراک بسته است. فرض می‌کنیم $A^۲ \subseteq I \subseteq A$، که در آن $A \in \mathcal{F}$. در این‌صورت بنا به فرض با در نظر گرفتن $(A = B)$ چون

$$(I, A) = A \in \mathcal{F},$$

پس $I = (I, A^{2}) \in \mathcal{F}$. در نهایت نشان می دهیم $\mathcal{F}$ تحت اشتراک دوبه‌دو بسته است. بدین‌منظور، فرض می‌کنیم $A, B \in \mathcal{F}$. در این صورت

$$(A \cap B, A) = A \in \mathcal{F}$$

و

$$(A \cap B, B) = B \in \mathcal{F},$$

طبق فرض داریم

$$A \cap B = (A \cap B, AB) \in \mathcal{F}.$$

□

تذکر ۳.۱.۲. اگر به‌ازای ایده‌آل‌های دلخواه I, A, B از R از $(I, A), (I, B) \in \mathcal{F}$ نتیجه شود، $(I, AB) \in \mathcal{F}$، آنگاه $\mathcal{F}$ منوئیدال است. زیرا کافی است در گزاره فوق $I = 0$ قرار دهیم.

قضیه ۴.۱.۲. (*قضیه‌ی وابستگی منطقی*) *فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R که شامل خود R است، باشد. در این‌صورت دیاگرام زیر را داریم:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
(P_1) & \Longrightarrow & (P_2) & \Longrightarrow & (P_3) & \Longrightarrow & Str.Ako & \Longrightarrow & Ako \\
 & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & & & Str.Oka & \Longrightarrow & Oka & \Longrightarrow & \text{P.I.P}
\end{array}$$

برهان. $(P_1) \Longleftarrow (P_2)$. فرض کنیم $\mathcal{F}$ در شرط (P_1) صدق کند. نشان می‌دهیم $\mathcal{F}$ در شرط (P_2) نیز صدق می‌کند. چون $\mathcal{F}$ منوئیدال است، لذا نسبت به ضرب بسته است. حال نشان می‌دهیم $\mathcal{F}$ در $(Sq)^{*}$ صدق می‌کند. فرض می‌کنیم $J^{n} \subseteq I \subseteq J$، و $I \in \mathcal{F}$. نشان می‌دهیم $J \in \mathcal{F}$. چون $\mathcal{F}$ نیم‌فیلتر است وداریم $I \subseteq J$ و $I \in \mathcal{F}$ پس $J \in \mathcal{F}$.

$(P_2) \Longleftarrow (P_3)$. فرض کنیم $\mathcal{F}$ در گزاره (P_2) صدق کند.کافی است نشان دهیم به‌ازای هر $I, A, B \trianglelefteq R$ از $(I, A), (I, B) \in \mathcal{F}$ نتیجه می‌شود $(I, AB) \in \mathcal{F}$. بدین منظور، داریم:

$$(I, AB)^2 \subseteq (I, A)(I, B) \subseteq (I, AB).$$

از فرض $(Sq)^*_2$ واینکه $(I, A), (I, B) \in \mathcal{F}$ (چون $\mathcal{F}$ نسبت به ضرب بسته است)، نتیجه می‌شود $(I, AB) \in \mathcal{F}$. حال نشان می دهیم $\mathcal{F}$ نسبت به اشتراک دوبه‌دو بسته است.

فرض کنیم $A, B \in \mathcal{F}$ داریم،

$$(A \cap B)^2 \subseteq AB \subseteq A \cap B$$

چون $AB \in \mathcal{F}$ (طبق فرض $\mathcal{F}$ منوئیدال است)، پس $A \cap B \in \mathcal{F}$.

$(P_3) \Longleftarrow Str.Aka$. طبق گزاره‌ی ۲.۱.۲ واضح است .

$Str.Ako \Longleftarrow Ako$. واضح است .

$(P_3) \Longleftarrow Str.Oka$. فرض کنیم $(I, A), (I :_R A) \in \mathcal{F}$، نشان می‌دهیم $I \in \mathcal{F}$. قرار می‌دهیم $B = (I :_R A)$. چون $(I, B) = B$ از گزاره‌ی ۲.۱.۲ نتیجه می شود $(I, AB) \in \mathcal{F}$. اما داریم $AB \subseteq I$ پس $(I, AB) = I \in \mathcal{F}$.

$Str.OKa \Longleftarrow Oka$. واضح است .

$Str.Ako \Longleftarrow OKa$. فرض کنیم $\mathcal{F}$ یک خانواده‌ی آکو قوی باشد. نشان می‌دهیم $\mathcal{F}$، اوکا است. فرض کنیم $(I, a), (I :_R a) \in \mathcal{F}$، که در آن $a \in R$. نشان می دهیم $I \in \mathcal{F}$. قرار می دهیم $B = (I :_R a)$ و لذا $(I, B) = B$. چون $\mathcal{F}$ یک خانواده‌ی آکوی قوی است، $(I, aB) \in \mathcal{F}$ و چون $B = (I :_R a)$، پس $aB \subseteq I$. بنابراین $(I, aB) = I \in \mathcal{F}$.

$Ako \Longleftarrow$ P.I.P. فرض کنیم، I یک عضو ماکسیمال $\mathcal{F}'$ باشد، ولی اول نباشد در این صورت $a, b \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $ab \in I$ ولی $a \notin I$ و $b \notin I$. حال چون

$$b \in (I, b) - I$$

نتیجه می‌شود $I \subset (I, b)$ و لذا $(I, b) \in \mathcal{F}$ (چون I در $\mathcal{F}'$ ماکسیمال است). همچنین

$$a \in (I, a) - I$$

پس $I \subset (I, a)$ و از ماکسیمال بودن I نتیحه می شود که $(I, a) \in \mathcal{F}$. چون $\mathcal{F}$ خانواده‌ی آکو است،

$(I, ab) = I \in \mathcal{F}$، که یک تناقض است .

$Oka \Longleftarrow$ P.I.P. فرض کنیم، I یک عضو ماکسیمال $\mathcal{F}'$ باشد، ولی اول نباشد در این صورت $a, b \in R$ وجود دارند به‌طوری که $ab \in I$ ولی $a \notin I$ و $b \notin I$. حال چون

$$a \in (I, a) - I,$$

نتیجه می‌شود $I \subsetneqq (I, a)$ و لذا $(I, a) \in \mathcal{F}$ (چون I ماکسیمال $\mathcal{F}'$ است). همچنین

$$a \in (I :_R a) - I,$$

پس $I \subsetneqq (I :_R a)$ و از ماکسیمال بودن I نتیجه می شود که $(I :_R a) \in \mathcal{F}$. چون $\mathcal{F}$ خانواده‌ی اوکا است، $I \in \mathcal{F}$، که تناقض است . □

مثال ۵.۱.۲. فرض کنید $\{P_{\mathrm{i}} : \mathrm{i} \in I\}$ یک زیر مجموعه از $\mathrm{Spec}(R)$ باشد. در این‌صورت خانواده $\mathcal{F} = \{J \lhd R : J \nsubseteq P_{\mathrm{i}}, \forall \mathrm{i} \in I\}$ خاصیت $(P_۱)$ را دارد، از این رو $\mathcal{F}$، آکوی قوی است. زیرا خانواده $\mathcal{F}$ به وضوح فیلتر است. کافی است ثابت کنیم $\mathcal{F}$ مونوئیدال است. پس فرض می‌کنیم $A, B \in \mathcal{F}$. اگر $AB \notin \mathcal{F}$ آنگاه $\mathrm{i} \in I$ موجود است که $AB \subseteq P_{\mathrm{i}}$ و چون P_{i} ایده‌آل اول است پس بایستی $A \subseteq P_{\mathrm{i}}$ یا $B \subseteq P_{\mathrm{i}}$ که تناقض است.

مثال ۶.۱.۲. هر خانواده مونوئیدال $\mathcal{F}$ از ایده‌آل‌های معکوس‌پذیر در یک حلقه‌ی غیر صفر حوزه صحیح R، خانواده اوکا است. زیرا فرض کنیم $I \subseteq J$ ایده‌آل‌هایی باشند که $(I, J), (I :_R J) \in \mathcal{F}$. بنابر فرض منوئیدال بودن داریم $(I, J)(I :_R J) \in \mathcal{F}$ در نتیجه $J(I :_R J) \in \mathcal{F}$، و چون J ایده‌آل معکوس‌پذیر است از قضیه فاکتور گیری نتیجه می‌شود $I \in \mathcal{F}$.

مثال ۷.۱.۲. فرض کنیم $S \subseteq R$ یک مجموعه بسته ضربی ناتهی باشد. خانواده $\mathcal{F} = \{I \lhd R : I \cap S \neq \phi\}$ خاصیت $(P_۱)$ را دارد. لذا $\mathcal{F}$ خانواده آکو و اوکا است و در نتیجه $\mathrm{Max}(\mathcal{F}') \subseteq \mathrm{Spec}(R)$.

مثال ۸.۱.۲. خانواده‌ی $\mathcal{F} = \{< ۰ >, \mathbb{Z}_۶\}$ خاصیت $(P_۲)$ را دارد. لذا یک خانواده‌ی آکو است. منوئیدال بودن $\mathcal{F}$ واضح است، ثابت می‌کنیم که در $(Sq)^*_۲$ نیز صدق می‌کند. فرض کنیم، $J^۲ \subseteq I \subseteq J$ و $I \in \mathcal{F}$. می‌دانیم ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}_۶$ عبارتنداز $\mathbb{Z}_۶, ۳\mathbb{Z}_۶, ۲\mathbb{Z}_۶$ و $< ۰ >$، لذا توان دوم

آنها به ترتیب $\mathbb{Z}_6, 3\mathbb{Z}_6, 2\mathbb{Z}_6$ و $<0>$، خواهد بود اگر $I = (0)$ آنگاه رابطه $J \subseteq (0) \subseteq J^2$ ایجاب می‌کند $J^2 = (0)$ و لذا $(0) \in \mathcal{F}$ $J = (0)$. اگر $I = \mathbb{Z}_6$ باشد آنگاه رابطه $J \subseteq \mathbb{Z}_6 \subseteq J^2$ ایجاب می‌کند $J = \mathbb{Z}_6 \in \mathcal{F}$.

تبصره ۹.۱.۲. *در مطالب زیر $\mathcal{F}_{f.g}(R)$ خانواده‌ی تمام ایده‌آل‌های با تولید متناهی R می‌باشد.*

گزاره ۱۰.۱.۲. *(۱) اگر $\mathcal{F}$ یک خانواده‌ی منوئیدال ازایده‌آل‌های ضربی در حلقه‌ی R باشد، آنگاه $\mathcal{F}$ یک خانواده اوکای قوی است. بویژه همه خانواده‌ی ایده‌آل‌های ضربی با تولید متناهی خانواده‌ی اوکای قوی است.*

(۲) اگر R یک حلقه‌ی ضربی باشد آنگاه $\mathcal{F}_{f.g}(R)$ خانواده‌ی اوکای قوی است

برهان. ۱) فرض کنیم $J \subseteq I$ و $\mathcal{F} \ni (I, J), (I :_R J)$. لذا $J = (I, J)$. بنابراین $J, (I :_R J) \in \mathcal{F}$. چون $\mathcal{F}$ منوئیدال است، پس $J(I :_R J) \in \mathcal{F}$. چون $\mathcal{F}$ یک خانواده از ایده‌آل ضربی است، پس $I = J(I :_R J)$، یعنی $I \in \mathcal{F}$. بنابراین $\mathcal{F}$ خانواده‌ی اوکای قوی است. برای اثبات قسمت دوم بند (۱) طبق قضیه‌ی اندرسون [۱] ، به صفحه‌ی ۴۶۶ مرجع [۱] مراجعه شود. همه خانواده‌ی ایده‌آل‌های ضربی با تولید متناهی ویژگی اوکای قوی را دارند.

۲) بااستفاده از بند (۱) واضح است. □

گزاره ۱۱.۱.۲. *برای هر حلقه‌ی S شرایط زیر معادل هستند.*

۱) *حلقه‌ی S نوتری است.*

۲) *برای هر $S-$جبر با تولید متناهی مانند R، $\mathcal{F}_{f.g}(R)$، خانواده‌ی اوکای قوی است.*

۳) *برای هر $S-$جبر مانند R که بعنوان $S-$مدول با تولید متناهی است $\mathcal{F}_{f.g}(R)$ خانواده‌ی اوکای قوی است.*

---

[۱] Anderson

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲). بنا به قضیه پایه هلبرت هر ایده‌آل حلقه‌ی نوتری R با تولید متناهی است. $\mathcal{F}_{f.g}(R)$ با خانواده‌ی تمام ایده‌آل‌های R برابر است و بدیهی است که خانواده‌ی همه ایده‌آل‌های R، اوکای قوی است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۳). واضح است، زیرا هر $S-$مدول با تولید متناهی، یک $S-$جبر با تولید متناهی است.

(۳) $\Longleftarrow$ (۱). فرض کنیم S نوتری نباشد، یعنی S ایده‌آلی مانند K دارد که با تولید متناهی نیست. تعریف می‌کنیم $J := S \oplus S$. بدیهی است که J یک $S-$مدول متناهی مولد است و دارای یک زیرمدول غیر متناهی مولد مانند $I := \circ \oplus K$ است که K، متناهی مولد نیست. J/I باوفا است (زیرا اگر $x \in \mathrm{Ann}_R(J/I)$ و چون $J/I \cong S \oplus S/K$ نتیجه می‌گیریم $x(۱, ۱ + K) = \circ$ بنابراین $x = \circ$ یعنی $\mathrm{Ann}_R(J/I) = \circ$). تعریف می‌کنیم $R := S \oplus J$، R با ضرب زیر یک حلقه است. بازای هر $s, s' \in S$ و به‌ازای هر $j, j' \in J$ تعریف می‌کنیم:

$$(s, j)(s', j') = (ss', sj' + s'j).$$

این حلقه یک $S-$جبر مدول با تولید متناهی است. زیرا

$$R = S \oplus J = S \oplus (S \oplus S) =< (۱, ۱, ۱) >,$$

و

$$I_\circ = (\circ, I) \subseteq J_\circ = (\circ, J)$$

ایده‌آل‌های از R می‌باشند. اما $J_\circ$ با تولید متناهی است. و $I_\circ$ با تولید متناهی نیست، زیرا $I := \circ \oplus K$، K با تولید متناهی نیست و $J = S \oplus S$ با تولید متناهی است. داریم:

$$(I_\circ :_R J_\circ) = \{x \in R : xJ_\circ \subseteq I_\circ\}$$

$$= J_\circ = (\circ, I)$$

زیرا اگر $x = (s, j) \in R = S \oplus J$، و

$$xJ_\circ = \{(s, j).(\circ, J), j \in J\} \subseteq I_\circ = (\circ, I).$$

حال به‌ازای هر $t \in J$ داریم $(s, j).(\circ, t) = (\circ, st) \subseteq (\circ, I)$. پس $sJ \subseteq I$. لذا $s \in \mathrm{Ann}_R(J/I) = \circ$. یعنی $s = \circ$ و بنابراین $(I_\circ :_R J_\circ) = J_\circ$، با تولید متناهی است. اما