دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

# قضایای نقطه ثابت برای انقباض‌ها و نگاشت‌های انقباضی نقطه‌وار مجانبی

نگارش:

**سیمین رمضی ملایر**

استاد راهنما: **دکتر هادی خطیب‌زاده**

**مهرماه ۱۳۸۹**

# چکیده

این پایان نامه مروری بر برخی نتایج نظریه نقطه ثابت متریک است که همگی آنها تعمیم‌هایی از اصل انقباض باناخ می‌باشند. بویژه، در این پایان نامه به کارهای اخیر انجام شده توسط کرک و ... در زمینه نقطه ثابت انقباض‌های نقطه‌وار، انقباض‌های نقطه‌وار مجانبی و نگاشت‌های مجانباً انقباضی نقطه‌وار در فضاهای باناخ توجه خاص شده است.


واژگان کلیدی: نقطه ثابت، مرکز مجانبی، انقباض نقطه‌وار، نگاشت مجانباً انقباضی، انقباض نقطه‌وار مجانبی، نگاشت مجانباً انقباضی نقطه‌وار.

# فهرست مندرجات

# پیش گفتار

نظریه نقطه ثابت یکی از شاخه‌های معروف و فعال آنالیز تابعی غیر خطی می‌باشد که کاربردهای متعددی بویژه در قضایای وجودی در آنالیز تابعی و هارمونیک، معادلات دیفرانسیل، سیستم‌های دینامیکی و حتی ریاضیات گسسته و نظریه گراف دارد. این نظریه به بررسی وجود نقطه ثابت برای توابع غیر خطی در فضاهای مختلف می‌پردازد. نظریه نقطه ثابت به شاخه‌های متعددی تقسیم می‌شود که از آن جمله می‌توان به نظریه متریک، نظریه توپولوژیک و نظریه ترتیبی اشاره کرد.

نظریه نقطه ثابت متریک که موضوع اصلی این پایان نامه است، با کار معروف باناخ که به اصل انقباض باناخ شهرت یافته آغاز شد. پس از آن تعمیم‌های بسیاری از نگاشت‌های انقباض ارائه شد و قضایای نقطه ثابت بسیاری درباره آنها ثابت شد که این پایان نامه در باره برخی از این نتایج و تعمیم‌های آنها می‌باشد.

این پایان نامه از چهار فصل با عناوین زیر تشکیل شده است:

فصل اول با عنوان پیشنیازهایی از آنالیز تابعی است که در این فصل قضایای مورد نیاز از آنالیز تابعی و سپس تعاریف مورد نیاز فصول بعدی آورده شده است. در بعضی از قسمت‌ها برای روشن شدن بهتر و درک بیشتر تعاریف از مثال‌ها استفاده شده است. تعاریفی همچون تحدب یکنواخت، تحدب اکید، پیمانه تحدب نمونه‌هایی از مطالب مهم این فصل هستند. قضایا و تعاریف این فصل از مراجع [۱]، [۵]، [۷]، [۱۰]، [۱۶] و [۱۸] گرفته شده است.

فصل دوم اصل انقباض باناخ و تعمیم‌هایی از آن نام گرفته است، که از پنج بخش تشکیل شده است. در بخش اول به بیان قضیه کریستی می‌پردازیم، و سپس اصل انقباض باناخ را بیان می‌کنیم. در این قسمت کاربردی از اصل انقباض باناخ در معادلات دیفرانسیل را بیان می‌کنیم که می تواند نشان دهنده کاربرد این اصل مهم در شاخه های گوناگون ریاضیات باشد. در بخش دوم نگاشت های انقباضی اکید را بررسی می‌کنیم.

در بخش بعد نگاشت‌ها را از یک مجموعه به کل فضا در نظر می‌گیریم و وجود نقطه ثابت را با این شرط بررسی می‌کنیم. انقباض نقطه‌وار و مجانبی بخش‌های دیگر این فصل هستند. در این دو بخش پس از تعریف این نوع نگاشت‌ها با استفاده از مراجع [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۹] و [۱۶] به بیان قضایای وجودی نقطه ثابت برای آنها می‌پردازیم.

در فصل سوم که تحت عنوان نگاشت‌های انقباضی و مجانباً انقباضی معرفی شده است، نگاشت‌های ذکر شده را تعریف می‌کنیم و با استفاده از مراجع [۶]، [۸]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۵]، [۱۶] و [۱۷] قضایای وجودی نقطه ثابت را برای آنها بررسی می‌کنیم. قضایای نقطه ثابت براودر و کرک از قضایای مهم مطرح شده در این فصل هستند. موضوع دیگر بررسی شکل مجموعه نقاط ثابت برای این نوع نگاشت‌ها در فضای اکیداً محدب است. همچنین نگاشت‌های از نوع $\gamma$ را معرفی می‌کنیم. در ادامه نگاشت‌های نهایتاً انقباضی و نهایتاً مجانباً انقباضی را تعریف و قضایای نقطه ثابت در مورد آنها را بررسی می‌کنیم.

مطالب فصل چهارم بر دو بخش تقسیم می‌شود، انقباض نقطه‌وار مجانبی و نگاشت‌های مجانباً انقباضی نقطه‌وار، که همچون فصول قبلی پس از بررسی تعاریف با استفاده از مرجع [۱۶] به بیان قضایای نقطه ثابت برای آنها می‌پردازیم.

# فصل ۱

# پیشنیازهایی از آنالیز تابعی و هندسه فضای باناخ

در این فصل برخی از قضایای آنالیز تابعی که برای بیان و یا اثبات برخی از قضایا در فصول بعدی مورد نیاز است، را بیان می‌کنیم . در ادامه بعضی از خواص هندسی فضای باناخ از جمله خاصیت تحدب یکنواخت و اکید را به طور کامل تعریف می‌کنیم. همچنین مفاهیم مهمی مانند ساختار نرمال، پیمانه تحدب، دنباله قطری و ... را تعریف و بعضی مطالب وابسته به آنها که در بحث‌های آمده در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

## ۱.۱ قضایایی از آنالیز تابعی

**تعریف ۱.۱.۱** زیرمجموعه $K$ از فضای $X$ را محدب نامیم هرگاه

$$\forall x, y \in K,\ \forall t \in [۰, ۱], \quad tx + (۱ - t)y \in K$$

**تعریف ۲.۱.۱** فرض کنیم $X$ فضای برداری باشد، نگاشت $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ را محدب نامیم هرگاه

$$\forall x, y \in X, \quad \forall t \in [0, 1], \qquad f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

**تعریف ۳.۱.۱** فرض کنیم $C$ زیرمجموعه‌ای محدب از فضای برداری $X$ باشد، نگاشت $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ را شبه محدب نامیم هرگاه

$$\forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall z = tx + (1-t)y$$

داریم

$$f(z) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}$$

به طور معادل نگاشت $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را شبه محدب گوییم هرگاه مجموعه $\{x \in X, \quad f(x) \leqslant \lambda\}$ برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، محدب باشد.

**نکته ۴.۱.۱** به روشنی دیده می‌شود که هرنگاشت محدب، شبه محدب هم می‌باشد.

**تعریف ۵.۱.۱** نگاشت $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ را سره نامیم هرگاه $x \in X$ موجود باشد به طوری که $f(x) < +\infty$.

**تعریف ۶.۱.۱** فرض کنیم $X$ فضای توپولوژیک باشد نگاشت $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ را شبه پیوسته پایینی نامیم هرگاه برای $x \in X$ داشته باشیم

$$\liminf_{y \longrightarrow x} f(y) \geqslant f(x)$$

**تعریف ۷.۱.۱** فرض کنیم $X$ فضای باناخ[۱] باشد و $X'$ دوگان آن و $X''$ (دوگان دوم $X$ ) با نرم زیر باشد

$$\| \xi \| = \sup_{f \in X', \|f\| \leqslant 1} |< \xi, f >|, \qquad \xi \in X''$$

یک تداخل متعارف $J : X \longrightarrow X''$ چنین تعریف می‌شود: فرض کنیم $x \in X$ ثابت باشد، نگاشت $< f, x >$ ( یعنی اثر نگاشت $f$ روی $x$ ) از $X'$ به $R$ یک فرم خطی و پیوسته روی $X'$ است یعنی یک عضو $X''$ می‌باشد که با $Jx$ نشان می‌دهیم. بنابراین داریم

$$< Jx, f >_{X'', X'} = < f, x >_{X', X}$$

**تعریف ۸.۱.۱** فرض کنیم $X$ فضای باناخ باشد، $J$ تداخل متعارف از $X$ به $X''$ باشد اگر $J(X) = X''$، $X$ انعکاسی است.

**قضیه ۹.۱.۱** ( کاکوتانی[۲] ): فرض کنیم $X$ فضای باناخ باشد در این صورت $X$ انعکاسی است اگر وفقط اگر $B_X = \{x \in X : \| x \| \leqslant 1\}$، برای توپولوژی ضعیف فشرده باشد.

**برهان**

رجوع کنید به [۵].

□

**نتیجه ۱۰.۱.۱** فرض کنیم $X$ فضای باناخ و انعکاسی باشد و $K \subset X$ یک زیرمجموعه محدب، بسته و کراندار باشد. در این صورت $K$ برای توپولوژی ضعیف فشرده است.

**برهان**

---
[۱] *Banach*
[۲] *Kakutani*

رجوع کنید به [۵].

□

**قضیه ۱۱.۱.۱** فرض کنیم $X$ فضای باناخ انعکاسی و $K \subset X$ یک زیرمجموعهٔ محدب، بسته و ناتهی باشد. همچنین نگاشت $f : K \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ سره، شبه محدب و شبه پیوسته پایینی به طوری که برای هر $x \in K$ داریم

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

در این صورت $f$ مینیمم خود را روی $K$ اتخاذ می‌کند، یعنی $x_\circ \in K$ موجود است به طوری که

$$f(x_\circ) = \min_K f$$

**برهان**

رجوع کنید به [۵].

□

**نتیجه ۱۲.۱.۱** فرض کنیم $X$ فضای باناخ باشد به طوری که هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ دارای زیر دنباله $\{x_{n_k}\}$ همگرا برای توپولوژی ضعیف باشد، در این صورت $X$ انعکاسی است.

**برهان**

رجوع کنید به [۵].

□

## ۲.۱ مفاهیمی از هندسه فضای باناخ

**تعریف ۱.۲.۱** فضای باناخ $X$ را به طور یکنواخت محدب نامیم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که

$$x, y \in X, \quad \| x \| \leqslant 1, \quad \| y \| \leqslant 1 \ , \ \| x - y \| \geqslant \epsilon \Rightarrow \| \frac{x+y}{2} \| \leqslant 1 - \delta$$

این تعریف یک خاصیت هندسی گوی واحد که باید «خوب گرد» باشد را بیان می‌کند و توسط گرفتن یک نرم معادل پایدار نیست.

**مثال ۲.۲.۱** بگیرید $X = \mathbb{R}^2$. دو نرم زیر را روی این فضا در نظر می‌گیریم

$$\| x \|_1 = | x_1 | + | x_2 |$$

$$\| x \|_2 = (| x_1 |^2 + | x_2 |^2)^{\frac{1}{2}}$$

در این صورت $\mathbb{R}^2$ با اولی به طور یکنواخت محدب نیست اما با دومی به طور یکنواخت محدب می‌باشد.

**مثال ۳.۲.۱** فضاهای هیلبرت[3] به طور یکنواخت محدب هستند ولی $C(K)$ (مجموعه همه توابع حقیقی مقدار و پیوسته روی مجموعه فشرده $K$ ) به طور یکنواخت محدب نیست.

**قضیه ۴.۲.۱** فضای باناخ $X$ به طور یکنواخت محدب است اگر و فقط اگر برای هر عدد مثبت $r > 0$، تابع پیوسته $\phi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ موجود باشد که $\phi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$، به طوری که

[3] $Hilbert$

$$\| \lambda x + (1-\lambda) \|^2 \leqslant \lambda \| x \|^2 + (1-\lambda) \| y \|^2 - \lambda(1-\lambda)\phi(\| x-y \|)$$

برای همه $\lambda \in [0, 1]$ و همه $x, y \in X$، به طوری که $\| x \| \leqslant r, \| y \| \leqslant r$.

**برهان**

رجوع کنید به [۱۸].

$\square$

**قضیه ۵.۲.۱** فرض کنیم $X$ فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشد. نگاشت اکیداً صعودی، پیوسته و محدب $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ موجود می باشد که $f(0) = 0$، و همچنین

$$2t(1-t)f(\| x-y \|) \leqslant 1 - \| (1-t)x + ty \|, \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t \in [0, 1]$$

به طوری که $\| x \| \leqslant 1$، $\| y \| \leqslant 1$.

**برهان**

رجوع کنید به [۱].

$\square$

**تعریف ۶.۲.۱** فرض می‌کنیم $S_X = \{x \in X : \| x \| = 1\}$، فضای باناخ $X$ اکیداً محدب نامیده می شود هرگاه

$$x, y \in S_X, \quad x \neq y \quad \rightarrow \quad \| (1-\lambda)x + \lambda y \| < 1, \quad \forall \lambda \in (0, 1)$$

تعریف بالا این مطلب را بیان می کند که نقطه میانی پاره‌خط واصل دو نقطه $x, y \in S_X$، یعنی $\frac{x+y}{2}$ در $S_X$ قرار نمی‌گیرد، یا به عبارت دیگر اگر $x, y \in S_X$ و $\| \frac{x+y}{2} \| = \| y \| = \| x \|$ آنگاه $x = y$.

**مثال ۷.۲.۱** فرض کنیم $X = \mathbb{R}^n$ که $n \geqslant 2$. با نرم زیر

$$\| x \|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$X$ اکیداً محدب می‌باشد.

**مثال ۸.۲.۱** فرض کنیم $X = \mathbb{R}^n$ که $n \geqslant 2$. با نرم زیر

$$\| x \|_1 = | x_1 | + | x_2 | + ... + | x_n |, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$X$ اکیداً محدب نمی‌باشد. زیرا اگر $x = (1, 0, 0, ..., 0)$ و $y = (0, 1, 0, ..., 0)$ آنگاه $\| y \|_1 = 1 = \| x \|_1$، اما $\| x + y \|_1 = 2$.

**مثال ۹.۲.۱** فرض کنیم $X = \mathbb{R}^n$ که $n \geqslant 2$. با نرم زیر

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i |, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$X$ اکیداً محدب نمی‌باشد زیرا اگر $x = (1, 0, 0, ..., 0)$ و $y = (1, 1, 0, ..., 0)$ آنگاه $\| y \|_\infty = 1 = \| x \|_\infty$، اما $\| x + y \|_\infty = 2$.

**گزاره ۱۰.۲.۱** فرض کنیم $X$ فضای باناخ اکیداً محدب باشد. اگر

$$\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$$

برای $0 \neq x \in X$ و $y \in X$، آنگاه $t \geqslant 0$ موجود است به طوری که $y = tx$.

**برهان**

رجوع کنید به [۱].

□

**تعریف ۱۱.۲.۱** فرض کنیم $X$ فضای نرم دار با $dimX \geqslant ۲$. نگاشت $\delta_X : (۰, ۲] \longrightarrow [۰, ۱]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\delta_X(\epsilon) = \inf\{۱ - \tfrac{۱}{۲} \parallel x + y \parallel : \quad \parallel x \parallel = \parallel y \parallel = ۱, \quad \parallel x - y \parallel = \epsilon\}$$

$\delta_X$ را پیمانه تحدب می‌نامیم.

**تعریف ۱۲.۲.۱** مشخصه تحدب $X$ را با $\epsilon_{\circ}(X)$ نشان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\epsilon_{\circ}(X) = \sup\{\epsilon : \ \delta_X(\epsilon) = ۰\}$$

**قضیه ۱۳.۲.۱** فضای باناخ $X$ به طور یکنواخت محدب است اگر و فقط اگر $\delta_X(\epsilon) > ۰$ برای هر $\epsilon \in (۰, ۲]$.

**برهان**

فرض کنیم فضای باناخ $X$ به طور یکنواخت محدب باشد آنگاه برای $\epsilon > ۰$، $\delta(\epsilon) > ۰$ موجود است به طوری که

$$۰ < \delta(\epsilon) \leqslant ۱- \parallel \frac{x+y}{۲} \parallel, \quad \forall x, y \in X, \ \parallel x \parallel \leqslant ۱, \ \parallel y \parallel \leqslant ۱, \parallel x - y \parallel \geqslant \epsilon$$

بنابراین از تعریف پیمانه تحدب نتیجه می‌شود که $\delta_X(\epsilon) > ۰$.

برعکس، فرض کنیم $X$ فضای باناخ با پیمانه تحدب $\delta_X$ باشد، به طوری که برای $\epsilon \in (۰.۲]$ ، $\delta_X(\epsilon) > ۰$.

فرض کنیم $x, y \in X$ که $\parallel x \parallel = ۱$ و $\parallel y \parallel = ۱$ که $\parallel x - y \parallel \geqslant \epsilon$ برای ثابت $\epsilon \in (۰, ۲]$.

با توجه به تعریف پیمانه تحدب $\delta_X(\epsilon)$ داریم

$$۰ < \delta_X(\epsilon) \leqslant ۱- \parallel \frac{x+y}{۲} \parallel$$

که نتیجه می دهد

$$\parallel \frac{x+y}{۲} \parallel \leqslant ۱ - \delta(\epsilon)$$

که $\delta(\epsilon) = \delta_X(\epsilon)$، که مستقل از $x, y$ است. بنابراین $X$ به طور یکنواخت محدب است.

□

**قضیه ۱۴.۲.۱** فضای باناخ $X$ اکیداً محدب است اگر و فقط اگر $\delta_X(۲) = ۱$.

**برهان**

رجوع کنید به [۱].

□

**تعریف ۱۵.۲.۱** فرض کنیم $F$ زیرمجموعه‌ای از $X$ باشد، قطر $F$ را با نماد $\delta(F)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\delta(F) = \sup\{\| x - y \|: \quad x, y \in F\}$$

**تعریف ۱۶.۲.۱** نقطه $x$ از $F$ را نقطه قطری نامیم هرگاه

$$\delta(F) = \sup\{\| x - y \|: \quad y \in F\}$$

**تعریف ۱۷.۲.۱** فرض کنیم $F$ زیرمجموعه بسته، محدب، کراندار و ناتهی از فضای باناخ $X$ باشد، تعریف می‌کنیم

$$r_x(F) = \sup\{\| x - y \|: \quad y \in F\}$$

$$r(F) = \inf\{r_x(F): \quad x \in F\}$$

$$F_c = \{x \in F: \quad r_x(F) = r(F)\}$$

**تعریف ۱۸.۲.۱** مجموعه محدب $F \in X$ دارای ساختار نرمال است هرگاه برای هر زیرمجموعه محدب و کراندار $H$ از $F$ که شامل بیش از یک نقطه است نقطه $x$ موجود باشد که یک نقطه قطری از $H$ نباشد.

**تعریف ۱۹.۲.۱** ضریب ساختار نرمال از فضای باناخ $X$ را با $N(X)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$N(X) = \inf\{\frac{A(\{x_n\})}{r_a(\{x_n\})} : \quad \{x_n\} \subset X\}$$

که داریم

$$A(\{x_n\}) := \limsup_{n\longrightarrow\infty}\{\| x_i - x_j \|: \quad i, j \geqslant n\}$$

$$r_a(\{x_n\}) := \inf\{\limsup_{n\longrightarrow\infty} \| x_n - x \|: \quad x \in \overline{conv}(\{x_n\})\}$$

**تعریف ۲۰.۲.۱** $X$ دارای ساختار به طور یکنواخت نرمال است هرگاه $N(X) > ۱$ باشد. در این حالت می گوییم $X$، $UNS$ [۴] است.

**تعریف ۲۱.۲.۱** فرض کنیم $X$ فضای باناخ، $C$ یک زیرمجموعه محدب و بسته از $X$ و $\{x_n\}$ یک دنباله کراندار در $X$ باشد. نگاشت

$$f(x) := \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \| x_n - x \|, \quad \forall x \in X$$

تابع فوق را با نماد $r(x, \{x_n\})$ نیز نشان می‌دهیم و آن را شعاع مجانبی $\{x_n\}$ در $x$ می نامیم. همچنین اینفیمم $f(x)$ روی $C$ شعاع مجانبی $\{x_n\}$ نسبت به $C$ می‌نامیم و آن را با $r(C, \{x_n\})$ نشان می‌دهیم

$$r(C, \{x_n\}) = \inf\{r(x, \{x_n\}) : \quad x \in C\}$$

[۴] مخفف عبارت $Uniformly\ normal\ structure$ می‌باشد.

**تعریف ۲۲.۲.۱** نقطه $z$ در $C$ مرکز مجانبی $\{x_n\}$ نسبت به $C$ نامیده می‌شود هرگاه

$$f(z)=\min\{f(x):\quad x\in C\}$$

مجموعه همه مرکز های مجانبی را با $A(C,\{x_n\})$ نشان می‌دهیم

$$A(C,\{x_n\})=\{z\in C:\quad r(z,\{x_n\})=r(C,\{x_n\})\}$$

**لم ۲۳.۲.۱** فرض کنیم $C$ زیرمجموعه محدب و بسته از فضای باناخ $X$ و $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار در $X$ باشد، آنگاه داریم

$$A(C,\{x_n\})\leqslant \epsilon_\circ(X).r(C,\{x_n\})$$

که $\epsilon_\circ(X)$ مشخصه تحدب $X$ می‌باشد.

**قضیه ۲۴.۲.۱** هر دنباله کراندار در یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب نسبت به هر زیر مجموعهٔ بسته و محدب از $X$ یک مرکز مجانبی یکتا دارد.

**برهان**

فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله کراندار در $X$ و $C$ زیر مجموعه بسته ای از $X$ باشد و نگاشت $f:C\longrightarrow[\circ,+\infty)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$f(x):=\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\parallel x_n-x\parallel,\quad \forall x\in X$$

که پیوسته است و $f(x)\longrightarrow+\infty$ وقتی $\parallel x\parallel\longrightarrow+\infty$. حال باید نشان دهیم که

$$f(\tfrac{x+y}{۲})<\max\{f(x),f(y)\}$$

قرارمی‌دهیم $m:=\max\{f(x),f(y)\}$. برای هر $\epsilon>\circ$، $N(\epsilon)>\circ$ موجود است به طوری که

$$\parallel x_n-x\parallel\leqslant f(x)+\epsilon \quad \text{و} \quad \parallel x_n-y\parallel\leqslant f(y)+\epsilon$$

برای هر $n\geqslant N(\epsilon)$. بنابراین با توجه به تعریف تحدب یکنواخت داریم

$$\parallel x_n-\tfrac{x+y}{۲}\parallel\leqslant(m+\epsilon)(۱-\delta(\tfrac{\|x-y\|}{m+\epsilon}))$$

در نتیجه

$$f(\frac{x+y}{2}) \leqslant m(1 - \delta(\frac{\|x-y\|}{m+\epsilon})) < m$$

که بنابر قضیه ۱۱.۱.۱، اثبات کامل می‌شود.

**تعریف ۲۵.۲.۱** در فضای باناخ $X$ دنباله کراندار $\{x_n\}$ دنباله قطری نامیده می‌شود هرگاه

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_{n+1}, \overline{conv}\{x_1, ..., x_n\}) = \delta\{x_1, x_2, ...\}$$

**گزاره ۲۶.۲.۱** زیرمجموعه کراندار محدب $K$ از فضای باناخ $X$ ساختار نرمال دارد اگر وفقط اگر شامل هیچ دنباله قطری نباشد.

**برهان**

اگر $K$ شامل دنباله قطری $\{x_n\}$ باشد در این صورت

$$H = \overline{conv}\{x_1, ..., x_n\}$$

یک زیرمجموعه محدب از $K$ می‌باشد که هر نقطه از آن یک نقطه قطری است. بنابراین $K$ دارای ساختار نرمال نمی‌باشد. حال فرض کنیم $K$ شامل زیرمجموعه محدب $H$ باشد که بیش از یک نقطه دارد و هر نقطهٔ آن قطری می‌باشد.

فرض کنیم $d := \delta(H)$، $\epsilon \in (0, d)$. $x_1 \in H$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $y_0 = x_1$ همچنین فرض می‌کنیم $x_n \in H$ حال تعریف می‌کنیم

$$y_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

$y_{n-1}$ نقطه قطری است بنابراین وجود دارد نقطه $x_{n+1} \in H$ به طوری که

$$\| x_{n+1} - y_{n+1} \| > d - \frac{\epsilon}{n^2}$$

فرض کنیم $x \in conv\{x_1, ..., x_n\}$ یعنی

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \geqslant 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$$

قرار می دهیم

$$\alpha := \max\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$$

چون $\alpha > 0$ می توانیم $y_{n-1}$ به صورت زیر بنویسیم

$$y_{n-1} = \frac{1}{n\alpha}x + \sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{n} - \frac{\alpha_j}{n\alpha})x_j$$

به آسانی به دست می آوریم

$$(\frac{1}{n} - \frac{\alpha_j}{n\alpha}) \geqslant 0, \quad \frac{1}{n\alpha} + \sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{n} - \frac{\alpha_j}{n\alpha}) = 1$$

$$d - \frac{\epsilon}{n^2} < \| x_{n+1} - y_{n+1} \| \leqslant \frac{1}{n\alpha} \| x_{n+1} - x \| + \sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{n} - \frac{\alpha_j}{n\alpha}) \| x_{n+1} - x_j \|$$

$$\leqslant \frac{1}{n\alpha} \| x_{n+1} - x \| + \sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{n} - \frac{\alpha_j}{n\alpha})d = \frac{1}{n\alpha} \| x_{n+1} - x \| + (1 - \frac{1}{n\alpha})d$$

بنابراین

$$\| x_{n+1} - x \| \geqslant n\alpha(d - \frac{\epsilon}{n^2} - (1 - \frac{1}{n\alpha})d) = n\alpha(\frac{d}{n\alpha} - \frac{\epsilon}{n^2})$$

$$= d - \frac{\epsilon\alpha}{n} \geqslant d - \frac{\epsilon}{n}$$

بنابراین

$$d(x_{n+1}, conv\{x_1, ..., x_n\}) \geqslant d - \frac{\epsilon}{n}$$

چون $\epsilon$ دلخواه است، بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله قطری می‌باشد.

□

**نتیجه ۲۷.۲.۱** هر زیرمجموعه محدب و فشرده $K$ از فضای باناخ $X$ ساختار نرمال دارد.

**برهان**

فرض کنیم $K$ زیرمجموعه محدب و فشرده از $X$ باشد. اگر $K$ ساختار نرمال نداشته باشد با توجه به گزاره بالا شامل یک دنباله قطری $\{x_n\}$ می‌باشد و $\{x_n\}$ نمی‌تواند هیچ زیردنبالهٔ همگرایی داشته باشد، که این با فشردگی $K$ در تناقض است.

□

# فصل ۲

# اصل انقباض باناخ و تعمیم هایی از آن

در این فصل اصل انقباض باناخ را بیان و اثبات کرده و با برخی کاربردهای آن آشنا می‌شویم. سپس به معرفی انقباض‌های نقطه‌وار و مجانبی می‌پردازیم و قضایای نقطه ثابت متناظر با این نگاشت‌ها را بیان و اثبات می‌کنیم.

## ۱.۲ اصل انقباض باناخ و برخی کاربردهای آن

**تعریف ۱.۱.۲** فرض کنید $(X,d)$ یک فضای متریک باشد و کلاس نگاشت های $f : X \longrightarrow X$ را که دارای خاصیت

$$\sigma(f^n) = \sup\{\frac{d(f^n(x),f^n(y))}{d(x,y)} \quad : \quad x,y \in X, x \neq y\} < \infty$$

برای همه $n \in N$ می‌باشند را با نماد $Lip(X)$ نشان می‌دهیم.

اعضای $Lip(X)$ نگاشت های لیپ شیتسی نامیده می‌شود و $\sigma(f^n)$ ثابت لیپ شیتس برای $f^n$ نام دارد.

به وضوح رابطه زیر برقرار است

$$f \text{ روی } X \text{ ثابت می‌باشد} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(f) = 0$$