وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش)

بعد ضریب شور در جبرهای لی پوچ توان

توسط:

محدثه حسینی

استاد راهنما:

دکتر پیمان نیرومند

استاد مشاور:

دکتر اسداله فرامرزی ثالث

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحيم

به نام خدا

بعد ضریب شور در جبرهای لی پوچ توان

توسط:

محدثه حسینی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **خوب**

دکتر پیمان نیرومند استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر اسداله فرامرزی ثالث استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر محسن پرویزی استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد (استاد داور)

دکتر عباس جعفرزاده استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه فردوسی مشهد (استاد داور)

دکتر سید هاشم طبسی استادیار علوم کامپیوتر گرایش عددی- علوم کامپیوتر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

مهربان فرشتگانی که:

لحظات ناب، باور بودن، لذت وغرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتاو زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

و

تقدیم به همسرم

که سایه ی مهربانیش سایه سار زندگیم می باشد، او که اسوه ی صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

سپاسگزاری

به یزدان هر آن کس که شد ناسپاس   به دلش اندر آید ز هر سو هراس

خدایا ستایش و سپاس مخصوص توست که مرا از ظلمات جهل رهانیدی و دریچه ای از گنجینه دانشت را به رویم گشودی و چه کریمانه هر آنچه خواستم عطایم فرمودی.

خداوندا! قطره ی علم مرا به دریای بی کران دانشت متصل گردان تا در کوره راه های نادانی گم نشوم و راهی را که تو به رویم گشوده ای به بی راه نروم.

در ابتدا صمیمانه ترین تقدیرها تقدیم به خانواده ی عزیز و مهربانم که همواره حامی و مشوقم بوده اند و پیمودن روزهای آسان و سخت زندگی ام بدون دعای خیر و برکت وجودشان غیر ممکن بود.

و سپاس دیگرم که مخصوص نورافروزان راه دانش و بینش است، تقدیم به محضر شما استاد گرانقدر و پر تلاشم جناب آقای دکتر پیمان نیرومند که با رویی گشاده پذیرایم بودید و علم و دانش خود را خالصانه در اختیارم نهادید.

همچنین از جناب آقای دکتر اسدالله فرامرزی ثالث که مشاوره این پایان نامه را به عهده داشتند و همواره متحمل زحمات زیادی شدند، سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر سید هاشم طبسی، نماینده محترم تحصیلات تکمیلی که در جلسه حضور داشتند، نیز کمال تشکر را دارم.

چراغ علمتان همیشه پرفروغ باد

چکیده

بعد ضریب شور در جبرهای لی پوچ توان

به وسیله‌ی:
محدثه حسینی

برای گروه دلخواه G ، مفهوم ضربگر شور توسط شور در سال ۱۹۰۴ مطرح شد. همانند گروه ها، ضربگر شور برای یک جبر لی پوچ‌توان L ، به صورت زیر خواهد بود

$$dimM(L) = \frac{۱}{۲}(n-۱)(n-۲)+۱-s(L)$$

در جایی‌که $s(L) \geq ۰$. در این پایان‌نامه به بررسی جبرهای لی پوچ توان با $s(L) = ۱, ۲$ خواهیم پرداخت. همچنین بهبودی از کران یانکوسکی به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی. ضربگر شور، جبرهای لی پوچ‌توان، زیرجبر مشتق، تانسور غیرآبلی

فهرست مطالب

پیشگفتار

برای یک گروهG، مفهوم ضربگر شور،$M(G)$، اولین بار توسط شور [۱] مطرح شد. به‌طوری‌که توسط فرمول هاپف نشان داده می‌شود که $\mathcal{M}(G)=\dfrac{R\cap[F,F]}{[R,F]}$.
مشابه ضربگر شور در گروه ها، ضربگر شور برای جبر لی L،$M(L)$،می تواند به صورت زیر تعریف شود

$$\mathcal{M}(L)=\frac{R\cap[F,F]}{[R,F]}$$

وقتی که $L\cong\frac{F}{R}$ و F یک جبر لی آزاد است. مانی هان [۲] در [۱۵]نشان می دهد که برای یک جبر لی Lاز بعد nداریم

$$dim\mathcal{M}(L)=\frac{۱}{۲}n(n-۱)-t(L) \text{ در جایی که } t(L)\geq ۰ \text{ .}$$

باتن، [۳] برکوویچ [۴] و ژو [۵] نشان دادند که یک کران بالایی جدید برای بعد ضربگر شور از یک جبر لی با بعد متناهی می تواند به تعیین ساختار L نسبت به $t(L)$کمک فراوانی بکند.
نیرومند در [۲۰]یک کران بالایی برای بعد ضربگر شور از یک جبر لی پوچ توان غیرآبلی را معرفی می کند. بدین صورت که

$$dim\mathcal{M}(L)=\frac{۱}{۲}(n-۱)(n-۲)+۱-s(l)$$

[۱] Schur

[۲] Moneyhun

[۳] Batten

[۴] Berkovich

[۵] Zhou

جایی‌که $s(L) \geq 0$ و همچنین ساختار L را در جایی که $s(L) = 0$ تعیین می کند.
در این پایان‌نامه قصد داریم که همه جبر های لی پوچ توان با $s(L) = 1, 2$ را دسته بندی کنیم. هم‌چنین به دنبال یافتن بهبودی از کران یانکوسکی هستیم. در این مبحث خواهیم دید که در صورت وجود یک زیر جبر مشتق از بعد ماکسیمال می‌توان یک کران بهتری روی $dim\mathcal{M}(L)$ معرفی کرد و در حالت خاص نتیجه یانکوسکی را به‌دست آورد.

برخی نمادگذاری ها

$\mathcal{M}(L)$: ضربگر شور جبر لی L

$H(m)$: جبر هایزنبرگ از بعد $2m+1$

$A(n)$: جبر لی آبلی از بعد n

$Z(L)$: مرکز جبر لی L

$N_L(H)$: نرمال‌ساز H در L

$Aut(L)$: مجموعه خودریختی های L

$L\otimes L$: حاصل‌ضرب تانسوری مربعی جبر لی L

$L\otimes_z L$: حاصل‌ضرب تانسوری آبلی L

$L\wedge L$: مربع خارجی جبر لی L

$End(L)$: مجموعه درون‌ریختی های L

$dimM(L)$: بعد ضربگر شور L

$L(4,5,2,4)$: جبر لی با پایه $\{x,y,z,c,r\}$ با براکت لی
$[x,y]=z$ ، $[x,z]=[y,z]=[z,c]=[y,c]=0$،$[x,c]=r$

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱-۱ تعاریف و چند نماد گذاری مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و X یک مجموعه باشد. در این‌صورت G یک گروه آزاد [۱] روی X است اگر تابع $i : X \to G$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر گروه H و هر تابع $f : X \to H$ هم‌ریختی گروهی یکتایی $g : G \to H$ یافت شود به‌طوری‌که $goi = f$ (goi نماد ترکیب دو تابع g و i است.)

تعریف ۲.۱.۱. اگر در تعریف فوق G و H گروه آبلی باشند، G را گروه آبلی آزاد [۲] نامیم. این عبارت معادل است با این‌که بتوان پایه‌ای برای G طوری یافت که هر عضو از G به‌صورت ترکیب خطی با ضرایب صحیح از عناصر این پایه نوشته شوند.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید که F یک میدان باشد و A یک فضای برداری روی این میدان به همراه یک نگاشت دو خطی $A \times A \longrightarrow A$ با ضابطه $(x, y) \longmapsto xy$ باشد در این‌صورت A را یک جبر [۳] می‌نامیم. به‌طوری‌که برای هر $x, y, z \in A$ و $a, b \in F$ دارای خواص زیر باشد

$$(ax + by)z = a(xy) + b(yz)$$
$$x(ay + bz) = a(xy) + b(xz)$$
$$a(xy) = (ax)y = x(ay)$$

[۱] Free group

[۲] Free abelian group

[۳] Algebra

بعد جبر A همان بعد A به‌عنوان فضای برداری است. جبر A با بعد متناهی است اگر A یک فضای برداری با بعد متناهی باشد. یک جبر چون A یک‌دار است اگر عنصر $۱ \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in A$ داشته باشیم:

$$۱x = x۱ = x$$

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید Fیک میدان باشد و Lیک فضای برداری روی این میدان به همراه یک نگاشت دو خطی و براکت لی ($[,]$) ، $L \times L \longrightarrow L$ ، که در شرایط زیر صدق میکند باشد

۱) $[.,.]$ دو خطی باشد.

۲) $[x,x] = ۰$

۳) برای هر $x,y,z \in L$ اتحاد ژاکوبی برقرار باشد یعنی

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = ۰$$

در اینصورت Lرا یک جبر لی [۴] می نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید که L یک جبر لی باشد و $A \subseteq L$. به‌طوری‌که برای هر $x,y \in A$ داشته باشیم، $[x,y] \in A$. در این‌صورت A را یک زیرجبر [۵] از L می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم X و Y زیرفضاهایی از L باشند. منظور از $[X,Y]$، زیرفضای پدید آمده توسط کلیه عناصر $[x,y]$ از L است، به‌طوری‌که $x \in X$ و $y \in Y$ می‌باشد. یک زیر فضای H از L را زیرجبر لی مشتق شده [۶] گوییم، هرگاه $[H,H] \subseteq H$. آن‌گاه H با همان عمل تعریف شده روی L خود یک جبر لی است.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید که I یک زیر فضا از جبر لی L باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in I$ و $y \in L$ داشته باشیم $[x,y] \in I$ دراین‌صورت I را یک ایده‌آل [۷] از L می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم L یک جبر لی باشد. توان‌های L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L^{(۰)} = L \text{، } L^{(n+۱)} = [L^{(n)}, L^{(n)}] \text{ برای هر } n \geq ۰$$

[۴] Lie algebra

[۵] Subalgebra

[۶] Derived Lie subalgebra

[۷] Ideal

$L^{(n)}$ ایده‌آلی از L است، چون ضرب هر دو ایده‌آل از L ایده‌آلی از آن است.
جبرلی L را حل‌پذیر [8] گوییم، هرگاه برای یک $n \geq 0$ ، داشته باشیم $L^{(n)} = 0$. هر ایده‌آل از جبر لی حل‌پذیر، حل‌پذیر است.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم L یک جبر لی و $[.,.]$ براکت تعریف شده روی L باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $L^n = [L, L^{n-1}]$. در این‌صورت، L را پوچ‌توان [9] نامیم، هرگاه بتوان عدد طبیعی n را یافت به‌طوری‌که $L^n = 0$.
اگر V یک فضای برداری و $f \in End(V)$ باشد، f را موضعا پوچ‌توان [10] نامیم، هرگاه بتوان عدد طبیعی n را یافت، به‌طوری‌که برای هر $v \in V$ داشته باشیم، $f^n(v) = 0$ ، که n وابسته به v است.

تعریف ۱۰.۱.۱. جبر لی L را نیم‌ساده [11] نامیم، اگر تنها ایده‌آل حل‌پذیر ماکسیمال L ، ایده‌آل (0) از L باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. جبرلی L را ساده [12] نامیم، اگر برای هر ایده‌آل I از L داشته باشیم $I = 0$ یا $I = L$

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم L یک جبر لی باشد، مرکز L را که با نماد $Z(L)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z(L) = \{x \in L | [x, y] = 0, \quad \text{برای هر } y \in L\}$$

تعریف ۱۳.۱.۱. اگر L یک جبر لی و H یک زیرجبر از L باشد، نرمال‌ساز [13] H در L را که با نماد $N_L(H)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N_L(H) = \{x \in L | [x, y] \in H, \quad \text{برای هر } y \in L\}$$

گزاره ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم L یک جبر لی باشد:*
۱) *اگر K و H زیرجبرهایی از L باشند، آن‌گاه $H \cap K$ نیز زیرجبری از L است.*
۲) *اگر K و H ایده‌آل‌هایی از L باشند، آن‌گاه $H \cap K$ نیز ایده‌آلی از L است.*

[8] Soluble
[9] Nilpotent
[10] Locally nilpotent
[11] Semi simple
[12] Simple
[13] Normalizer

۳) *اگر H ایده‌آلی از L و K زیرجبری از L باشد، آن‌گاه $H+K$ زیرجبری از L است.*
۴) *اگر K و H ایده‌آل‌هایی از L باشند، آن‌گاه $H+K$ نیز ایده‌آلی از L است.*

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنیم L و L' دو جبر لی روی میدان F باشند، در صورتی که $[.,.]$ ، براکت تعریف شده روی L و $[.,.]'$ ، براکت تعریف شده روی L' باشد، فضای برداری متشکل از همه‌ی (x,x') هایی که $x \in L$ و $x' \in L'$ همراه با براکت زیر تشکیل یک جبر لی می‌دهد.
برای هر $x,y \in L$ و $x',y' \in L'$

$$[(x,x'),(y,y')] = ([x,y],[x',y']')$$

این جبر لی را که با $L \oplus L'$ نشان می‌دهیم، جمع مستقیم [۱۴] جبرهای لی L و L' می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم L و L' دو جبر لی روی میدان F باشند. در این‌صورت تبدیل خطی $\varphi : L \to L'$ را یک هم‌ریختی [۱۵] گوییم، هرگاه برای هر $x,y \in L$ داشته باشیم:

$$\varphi[x,y] = [\varphi(x),\varphi(y)]$$

جبرهای لی L و L' را هم‌ریخت گوییم هرگاه هم‌ریختی $\varphi : L \to L'$ موجود باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. هم‌ریختی $\varphi : L \to L'$ را یک‌ریختی گوییم، اگر $Ker(\varphi) = ۰$ و $Img(\varphi) = L'$. به عبارت دیگر هرگاه φ یک به یک و پوشا باشد. جبرهای لی L و L' را یک‌ریخت [۱۶] گوییم، هرگاه یک‌ریختی $\varphi : L \to L'$ موجود باشد. مجموعه‌ی تمامی یک‌ریختی های $\varphi : L \to L$ تشکیل یک گروه می‌دهد که آن‌را با نماد $Aut(L)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۸. جبر لی L را با $H(m)$ نشان داده و آن‌را جبر هایزنبرگ [۱۷] از بعد $۲m+۱$ می‌نامیم هرگاه
$L^۲ = Z(L)$ و $dimL^۲ = ۱$.

تعریف ۱.۱.۱۹. $L(۳,۴,۱,۴)$ یک توسیع مرکزی از $A(۱)$ به وسیله $H(۱)$ است. درواقع یک جبر لی با پایه $\{x,y,z,r\}$ می باشد که رقم اول تعیین می کند که جبر اول در مورد $t(L) = ۳$ اتفاق می افتد. رقم دوم $dim(L)$. رقم سوم $dimZ(L)$ و آخرین عدد $t(L)$ را مشخص می کند.

---

[۱۴] Direct sum

[۱۵] Homomorphism

[۱۶] Isomorphism

[۱۷] Heisenberg algebra

تعریف ۲۰.۱.۱. L را یک جبر لی آبلی [18] می‌نامیم اگر و فقط اگر $Z(L) = L$. به عبارت دیگر برای هر $x, y \in L$ داشته باشیم $[x, y] = 0$

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید که L یک جبر لی و I یک ایده‌آل از L باشد در این‌صورت فضای برداری خارج‌قسمتی $\frac{L}{I} = \{I + x | x \in L\}$ تشکیل یک جبر لی با براکت تعریف شده در زیر را می‌دهد

$$\frac{L}{I} \times \frac{L}{I} \longrightarrow \frac{L}{I}$$
$$(I + x, I + y) \longmapsto I + [x, y]$$

لم ۲۲.۱.۱. *فرض کنید که L یک جبر لی باشد در این‌صورت*
۱) *اگر L پوچ‌توان باشد آن‌گاه، هر زیر جبر لی از L پوچ‌توان است.*
۲) *اگر $\frac{L}{Z(L)}$ پوچ‌توان باشد آن‌گاه، L نیز پوچ‌توان است.*

اثبات. (۱) بدیهی می‌باشد.
(۲) از آن‌جاییکه $\frac{L}{Z(L)}$ پوچ‌توان است، عددی مانند $m \geq 1$ وجود دارد به‌طوری‌که $(\frac{L}{Z(L)})^m = 0$
و بنابراین $\frac{L^m + Z(L)}{Z(L)} = 0$.
در نتیجه $L^m \subseteq Z(L)$ و $[L^m, L] = 0$. پس $L^{m+1} = 0$. □

گزاره ۲۳.۱.۱. *فرض کنید که L یک جبر لی با بعد متناهی باشد و K یک ایده‌آل از L باشد و قرار می‌دهیم $H = \frac{L}{K}$. آن‌گاه یک جبر لی با بعد متناهی J و ایده‌آل M از J وجود دارند به‌طوری‌که*

$(i) L^2 \cap K \cong \frac{J}{M}$
$(ii) M(L) \cong M$
(iii) *$M(H)$ یک تصویر همریخت از J است.*
(iv) *اگر $K \subset Z(L)$ باشد، آن‌گاه $L^2 \cap K$ یک تصویر همریخت از $M(H)$ است.*

اثبات. فرض کنید که $0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow L \longrightarrow 0$ یک نمایش آزاد از L باشد. یک ایده‌آل T از F وجود دارد به‌طوری‌که $0 \longrightarrow R \longrightarrow T \longrightarrow K \longrightarrow 0$ یک نمایش آزاد از K باشد.
آن‌گاه از آن‌جاییکه $[F, R] \subset F^2$ و $[F, R] \subset R \subset T$ داریم

$$L^2 \cap K = (\frac{F}{R})^2 \cap (\frac{T}{R}) = (F^2 + \frac{R}{R}) \cap (\frac{T}{R})$$
$$= \frac{((F^2 + R) \cap T)}{R} \cong \frac{(F^2 \cap T)}{(F^2 \cap R)}$$

[18] Abelian lie algebra

$$\cong \frac{\frac{(F^{۲} \cap T)}{[F, R]}}{\frac{(F^{۲} \cap R)}{[F, R]}}$$

قرار می‌دهیم $J = \frac{F^{۲} \cap T}{[F, R]}$ و $M = \frac{(F^{۲} \cap R)}{[F, R]}$.
حال با استفاده از تعریف $M(L)$ ،$M \cong M(L)$ ،(i) و (ii) برقرار هستند. اکنون داریم

$$H = \frac{L}{K} \cong \frac{(\frac{F}{R})}{(\frac{T}{R})} \cong \frac{F}{T}$$

بنابراین $۰ \longrightarrow T \longrightarrow F \longrightarrow H \longrightarrow ۰$ یک نمایش آزاد از H می‌باشد. بنابراین

$$M(H) \cong \frac{(F^{۲} \cap T)}{[F, T]} \cong \frac{\frac{(F^{۲} \cap T)}{[F, R]}}{\frac{[F, T]}{[F, R]}} = \frac{J}{(\frac{[F, T]}{[F, R]})}$$

و در نتیجه (iii) نیز برقرار است.

□

لم ۲۴.۱.۱. *فرض کنید که L یک جبر لی باشد به‌طوری‌که $dim(\frac{L}{Z(L)}) = n$. آن‌گاه*

$$dimL^{۲} \leq \frac{۱}{۲}n(n - ۱)$$

اثبات. به لم ۱ از [۱] مراجعه شود. □

۱–۲ معرفی ضربگر شور

فرض کنید که G یک گروه دلخواه باشد. مفهوم ضربگر شور، $M(G)$، اولین بار توسط شور [۱۹] و از کار وی روی نمایش تصویری گروه‌ها، به عنوان دومین کوهومولوژی گروه‌ها با ضرایب در $\mathbb{C}^*$ مطرح شد به‌طوری‌که برای گروه G توسط فرمول هاپف نشان داده می‌شود که

$$M(G) \cong \frac{R \cap [F, F]}{[R, F]}$$

در جایی‌که $۰ \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow ۰$ یک نمایش آزاد از G باشد.
در بین کلاس‌های مشهور از گروه‌ها بعضی از کلاس‌ها توجه بیشتری به خود جلب می‌کنند. بیشترین توجه کلاس p –گروه‌های متناهی است.

---

[۱۹] Schur

یکی از نتایج مهم برای ضربگر شور به‌وسیله گرین [۲۰] معرفی شده است. او نشان داده است که برای هر p -گروه متناهی G از مرتبه‌ی p^n و برای مقدار نامنفی $t(G)$ داریم

$$|M(G)| = p^{\frac{۱}{۲}n(n-۱)-t(G)}$$

برکوویچ [۲۱] در [۴] نشان داده است که $t(G) = ۰$ است اگر و فقط اگر G یک p -گروه آبلی مقدماتی باشد. او هم‌چنین توانست همه‌ی p -گروه‌های با $t(G) = ۱$ را دسته‌بندی کند.
در سال ۱۹۹۸، ژو [۲۲] در [۲۷] مورد $t(G) = ۲$ را در نظر گرفت و ساختار همه‌ی p -گروه‌های با خاصیت مورد نظر را تعیین کرد.
الیس [۲۳] در [۶]نشان داده است که چگونه یک کران بالایی از گشوتز [۲۴] در [۸] می‌تواند روند یافتن ساختار p -گروه‌های با $t(G) = ۰, ۱, ۲$ را مختصر کند و او هم‌چنین توانست مساله $t(G) = ۳$ را نیز حل کند.
نیرومند [۲۵] در [۱۶] کران بالایی از جونس [۲۶] را بهبود بخشید. به این ترتیب می‌توان ساختار G را وقتی که $t(G) = ۱, ۲, ۳$ است را به‌وسیله یک راه کوتاه‌تر و کاملا متفاوت از [۴،۶،۲۷] به‌دست آورد. به‌علاوه توانسته است که نتیجه را برای $t(G) = ۴, ۵$ نیز توسیع دهد.
مشابه ضربگر شور در گروه‌ها ضربگر شور برای جبر لی L، یعنی $M(L)$ می‌تواند به‌صورت زیر تعریف شود

$$M(L) \cong \frac{R \cap [F, F]}{[R, F]}$$

جایی‌که $L \cong \frac{F}{R}$ و F یک جبر لی آزاد است.
نتیجه مانی‌هان [۲۷] در [۱۵] شبیه نتیجه گرین نشان می‌دهد که برای جبر لی L از بعد n، داریم

$dimM(L) = \frac{۱}{۲}n(n-۱) - t(L)$ جاییکه $t(L) \geq ۰$.

[۲۰] Green

[۲۱] Berkovich

[۲۲] Zhou

[۲۳] Ellis

[۲۴] Gaschutz

[۲۵] Niroomand

[۲۶] Jones

[۲۷] Moneyhun

باتن [28] در [۲] موفق شد که نتایج مشابه با برکوویچ و ژو را برای جبرهای لی پوچ‌توان از بعد متناهی به‌دست آورد. همانند بیانات قبل، یک کران بالایی جدید برای بعد ضربگر شور از یک جبر لی پوچ‌توان می‌تواند مشکل تعیین جبر لی در مقادیر متفاوت $t(L)$ را ساده‌تر کند.
نیرومند در [۲۰] یک کران بالایی برای بعد ضربگر شور از یک جبر لی پوچ‌توان را به صورت زیر معرفی می‌کند

$$dimM(L) = \frac{1}{2}n(n-1) + 1 - s(L)$$

جایی‌که $s(L) \geq 0$ و هم‌چنین ساختار L را جایی‌که $s(L) = 0$ کلاس‌بندی می‌کند.
توجه کنید که اگر L آبلی باشد آن‌گاه $s(L)$ ممکن است منفی باشد.

لم ۱.۲.۱. *فرض کنید که L یک جبر لی باشد به‌طوری‌که $dimL = n$. در این‌صورت*

$$dimM(L) \leq \frac{1}{2}n(n-1)$$

اثبات. به لم ۲ از [۱] مراجعه شود.

لم ۲.۲.۱. *فرض کنید که L یک جبر لی از بعد n باشد. آن‌گاه*

$$L \text{ آبلی است اگر و فقط اگر } t(L) = 0$$

اثبات. فرض کنید که $dimM(L) = \frac{1}{2}n(n-1)$ و (K,M) یک جفت ماکسیمال برای L باشند.
از آن‌جایی‌که $M \subset Z(K)$ و $dim\frac{K}{Z(K)} \leq dim\frac{K}{M} = n$ با استفاده از لم ۲۴.۱.۱ داریم $dimK^2 \leq \frac{1}{2}n(n-1)$. بنابراین

$$\frac{1}{2}n(n-1) = dimM(L) = dimM \leq dimK^2 \leq \frac{1}{2}n(n-1)$$

بنابراین $M = K^2$ و در نتیجه $L \cong \frac{K}{M} = \frac{K}{K^2}$ آبلی است.

□

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. یک R -مدول چپ گروهی آبلی و جمعی مانند A است همراه با تابعی مانند $R \times A \to A$ داده شده با $(r,a) \mapsto ra$ به طوری‌که به ازای هر $r, s \in R$ و $a, b \in A$

---

[28] Batten

۱) $r(a+b)=ra+rb$

۲) $(r+s)a=ra+sa$

۳) $r(sa)=(rs)a$

R -مدول راست به صورت مشابه تعریف می شود.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم A یک مدول راست و B یک مدول چپ روی حلقه‌ی R باشند. هم‌چنین، F یک جبر لی آبلی آزاد روی مجموعه‌ی $A \times B$ و نیز K یک زیر جبر لی F تولید شده به‌وسیله‌ی تمام عناصر به اشکال زیر (به ازای هر $a, a_1 \in A$ ، $b, b_1 \in B$ و $r \in R$)باشد

۱) $(a+a_1, b)-(a, b)-(a_1, b)$

۲) $(a, b+b_1)-(a, b)-(a, b_1)$

۳) $(ar, b)-(a, rb)$

جبر لی آبلی خارج قسمتی $\frac{F}{K}$ را حاصل‌ضرب تانسوری [۲۹] A و B می‌نامیم. این جبر را با نماد $A \otimes_{\mathbb{R}} B$ نمایش داده می‌شود. هم‌مجموعه‌ی $(a, b)+K$ با a نموده می‌شود. اگر $R=\mathbb{Z}$ آن‌گاه $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ حاصل‌ضرب تانسوری آبلی A و B می‌نامیم.

قضیه ۵.۲.۱. *فرض کنید که L یک جبر لی پوچ توان $n-$ بعدی باشد و* $dimL^2=m \geq 1$. *آنگاه*

$$dimM(L) \leq \frac{1}{2}(n+m-2)(n-m-1)+1$$

علاوه بر این اگر $m=1$ آنگاه تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $L \cong H(1) \oplus A(n-3)$.

اثبات. فرض کنیم که $dim(L^2)=1$ آن‌گاه $\frac{L}{L^2}$ یک جبر لی آبلی از بعد $n-1$ می‌باشد. از آن‌جایی‌که $L^2 \subseteq Z(L)$ ما می‌توانیم فرض کنیم که $\frac{H}{L^2}$ یک مکمل از $\frac{Z(L)}{L^2}$ در $\frac{L}{L^2}$ باشد.
بنابراین ما داریم که $L=H+Z(L)$ و $L^2=H^2$. از طرف دیگر $H \cap Z(L) \subseteq H$ و بنابراین $Z(H)=L^2$.
از آن‌جاییکه $L^2 \subseteq Z(L)$ ، L^2 باید یک مکمل K در $Z(L)$ داشته باشد.
فرض کنید $L^2 \oplus K=Z(L)$ بنابراین ما داریم $L \cong K \oplus H$.

پس

$$dim(M(K \oplus H))=dim(M(K))+dim(M(H))+dim(\frac{K}{K^2} \otimes \frac{H}{H^2})$$

[۲۹] Tensor Product

از آن‌جاییکه H یک جبر هایزنبرگ و K آبلی است دو مورد باید در نظر گرفته شود

مورد ۱) فرض کنیم که برای هر $m \geq ۲$، $dim(H) = ۲m + ۱$. بنابراین

$$dim(M(H)) = ۲m^۲ - m - ۱،$$
$$dim(M(K)) = \frac{۱}{۲}(n - ۲m - ۱)(n - ۲m - ۲)،$$
$$dim(K \otimes \frac{H}{H^۲}) = dim(K).dim(\frac{H}{H^۲}) = (n - ۲m - ۱)(۲m)$$

و ما ثابت می‌کنیم که

$$\begin{aligned} dim(M(K \oplus H)) &= \frac{۱}{۲}(n - ۲m - ۱)(n - ۲m - ۲) \\ &+(۲m^۲ - m - ۱) + (n - ۲m - ۱)(۲m) \\ &= \frac{۱}{۲}n(n - ۳) < \frac{۱}{۲}(n - ۱)(n - ۲) + ۱ \end{aligned}$$

مورد ۲) فرض کنیم که $m = ۱$ و $H \cong H(۱)$. با استفاده از نتایج قبل

$$dim(M(H)) = ۲،$$
$$dim(M(K)) = \frac{۱}{۲}(n - ۳)(n - ۴)،$$
$$dim(K \otimes \frac{H}{H^۲}) = dim(K).dim(\frac{H}{H^۲}) = (n - ۳).(۲)$$

و ما اثبات کردیم که

$$dim(M(K \oplus H)) = \frac{۱}{۲}(n - ۳)(n - ۴) + ۲ + ۲(n - ۳) = \frac{۱}{۲}n(n - ۳) + ۲$$

اکنون ما با استفاده از استقرا روی m حکم را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم که $m > ۱$. از آن‌جاییکه $L^۲ \cap Z(L) \neq ۰$، یک ایده‌آل K از بعد ۱ مشمول در $L^۲ \cap Z(L)$ وجود دارد با استفاده از فرض استقرا داریم

$$۱ + dim(M(L)) \leq dim(M(\frac{L}{K})) + dim(M(K)) + dim(\frac{L}{L^۲} \otimes K)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} dim(M(L)) &\leq \frac{۱}{۲}(n + m - ۴)(n - m - ۱) + ۱ + n - m - ۱ \\ &= \frac{۱}{۲}(n + m - ۲)(n - m - ۱) + ۱ \end{aligned}$$

همان‌طور که ادعا کردیم. □