دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

یک مدل بهینه‌سازی زیرگرادیانی برای مسئله طراحی شبکه جاده‌ای پیوسته

استادان راهنما

آقای دکتر جواد مهری تکمه

آقای دکتر حسین خیری استیار

پژوهشگر

رقیه حاجی‌زاده کندرود

تیر ماه ۱۳۸۹

به نام یگانه خالق هستی

فهمیدن، همیشه بهتر از آموختن است.

گوستا ولوبون

تقدیم به

پدرم و مادرم، که درست فهمیدن را به من آموختند،

برادر عزیزم

و

همه کسانی که دوستشان دارم.

تقدیر و تشکر

پایان‌نامه حاضر، تلاشی بس ناچیز در راه شناخت یکی از موضوعات مطرح شده در زمینه تحقیق در عملیات است. اشخاص بسیاری در اجرای صحیح و موفقیت‌آمیز این پایان‌نامه، این جانب را یاری داده‌اند، که بر خود لازم می‌دانم زحمات و مساعدت‌های بی‌دریغ ایشان را که برخاسته از جامعه دوستی است، ارج نهاده و سپاسگزار کوشش‌های وصف‌ناپذیر آنان در راه گسترش دستاوردهای علمی و پژوهشی باشم.

در طول دوران تحصیلاتم، اساتید گرانقدرم جناب آقای دکتر مهری و جناب آقای دکتر خیری نقش بسزایی در پیشرفت این جانب داشته‌اند و همواره با بردباری و متانت خاص خودشان، راهنمایی‌های ارزنده و مشاوره‌های گران‌بهایی را در مورد هرچه بهتر انجام شدن پایان‌نامه حاضر، به این جانب ارائه نموده‌اند. می‌دانم که هیچ کلمه‌ای را یارای آن نیست که گوشه‌ای از زحمات ایشان را جبران نماید، ولی با این وجود از ایشان صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

بر خود لازم می‌دانم، سپاسگزار زحمات بی‌دریغ استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر میرنیا باشم، که راهنمایی‌ها و نصایح مدبرانه ایشان همواره چراغ راه این جانب بوده و با ارائه کمال حسن نیت، زحمت ارزیابی نهایی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند.

وظیفه خود می‌دانم از همراهان همیشگی خود، پدر و مادر مهربانم که مشوق، حامی و روشنگر راه من بوده‌اند تشکر و قدردانی کنم. همچنین از اساتید بزرگوارم در دوره کارشناسی ارشد و دوستان خوبم به خاطر کمک‌ها، حمایت‌ها و دوستی‌هایشان سپاسگزارم.

در پایان، از تمامی بزرگوارانی که مجالی برای ذکر اسامی آن‌ها نیست، ولی هر یک به نحوی در به بار نشستن این نهال، مرا یاری داده‌اند مانند کارکنان بخش کتابخانه و مرجع دانشکده ریاضی دانشگاه تبریز، تشکر نموده و مراتب قدردانی و امتنان خود را ابراز می‌دارم.

نام خانوادگی دانشجو: حاجی‌زاده کندرود نام: رقیه

عنوان: یک مدل بهینه‌سازی زیرگرادیانی برای مسئله طراحی شبکه جاده‌ای پیوسته

استادان راهنما : آقای دکتر جواد مهری تکمه، آقای دکتر حسین خیری استیار

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: تحقیق در عملیات دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: تیر ماه ۱۳۸۹ تعداد صفحه: ۱۰۵

کلید واژه‌ها: بهینه‌سازی زیرگرادیانی، روند ناهموار، گرادیان مزدوج، تحلیل حساسیت، تخصیص ترافیک تعادل

چکیده

در این پایان‌نامه، یک مدل بهینه‌سازی زیرگرادیانی را برای مسئله مشهور طراحی شبکه پیوسته (CNDP) بررسی می‌کنیم. یک مسئله طراحی شبکه پیوسته را می‌توان به شکل یک برنامه ریاضی با قیدهای تعادل (MPEC) فرمول‌بندی کرد، که در آن جریان تعادل کاربر در نظر گرفته می‌شود. در مقابل مطالعات گذشته، روش تصویر زیرگرادیان مزدوج برای حل بهتر مسئله طراحی شبکه پیوسته با همگرایی سراسری شرح داده می‌شود. محاسبات عددی نشان می‌دهند که این روش در مقایسه با روش‌های موجود در زمان خیلی کمتری به جواب بهین می‌رسد.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جداول

مقدمه

مسئله تخصیص ترافیک(TAP) تعیین مسیر اختصاصی برای رانندگانی است که روی یک شبکه حمل و نقل از بعضی از مبدأها به سوی بعضی از مقصدها حرکت می‌کنند. واردراپ [۳۳](به نقل از [۲۳])، دو اصل اساسی را برای تعیین تخصیص بیان کرده است. طبق اصل اول، تخصیص به گونه‌ای است که در آن هیچ راننده‌ای(کاربری) نمی‌تواند با تغییر مسیر، زمان حرکت خود را کاهش دهد. طبق اصل دوم، تخصیص به گونه‌ای تعیین می‌شود که زمان حرکت کل شبکه کمینه شود. تخصیص اول به تعادل کاربر و تخصیص دوم به بهینگی سیستم معروف است. در هر دو مورد، تخصیص را می‌توان از حل یک مسئله بهینه‌سازی محدب به دست آورد. در اکثر فرمول‌بندی‌ها تعداد کاربرانی که می‌خواهند بین یک مبدأ و مقصد حرکت کنند، ثابت است. ولی در بعضی موارد، زمان حرکت می‌تواند بر تقاضا تأثیر داشته باشد، لذا تقاضا متغیر در نظر گرفته می‌شود.

رشد سریع تقاضا موجب افزایش ازدحام شبکه می‌شود. برای مقابله با این افزایش ازدحام، خصوصیات شبکه بهبود داده می‌شود. این بهبود به گونه‌ای انجام می‌گیرد که رفاه جامعه بیشینه شود. یکی از راه‌های بهبود شبکه افزودن یال‌های جدید یا افزایش ظرفیت یال‌های موجود است. این حالت به مسئله طراحی شبکه معروف است. مسئله طراحی شبکه دارای انواع مختلفی است. در این پایان‌نامه، مسئله طراحی شبکه جاده‌ای پیوسته(CNDP) با توسیع ظرفیت یال‌ها در نظر گرفته می‌شود. عبدلال و لِبلنک [۲]، اولین کسانی بودند که الگوریتم هوک[1] و جیوز[2] را برای حل مسئله طراحی شبکه ارائه کردند. سووانسیریکول [۳۰]، یک روش ابتکاری مبتنی بر گرادیان را برای مسئله ارائه کرده و نتایج محاسباتی اولیه را گزارش داده است. روش‌های برنامه‌ریزی دوترازه مبتنی بر گرادیان به طور گسترده در [۱۴]، [۲۰] و [۲۹] به کار گرفته شده‌اند و از این رو روش‌های ابتکاری مختلفی توسعه یافته است. برای مثال چیو [۸]، با استفاده مستقیم از اطلاعات مشتق جریان تعادل یالی نسبت به پریشیدگی توسیع ظرفیت یال، یک

[1] Hooke

[2] Jeeves

دنباله از روش‌های حل مبتنی بر گرادیان را برای حل مسئله طراحی شبکه حمل و نقل ارائه داد. چون طبق [۱۵] و [۲۴]، برنامه دوترازه برای مسئله طراحی شبکه مشتق‌پذیر نیست، چیو [۹]، برای حل مسئله CNDP با تقاضای متغیر یک روش تصویر زیرگرادیان دسته‌ای تعمیم‌یافته(GBSP) را ارائه داد. در این پایان‌نامه، در مقابل روش‌های حل قبلی برای حل کارای CNDP با تقاضای ثابت و بهبودبخشی قابل توجه روی کار [۹]، یک روش جدید تصویر زیرگرادیان مزدوج مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در این پایان‌نامه، مسئله طراحی شبکه جاده‌ای به صورت برنامه ریاضی با قیدهای تعادل (MPEC) فرمول‌بندی شده و رفتار کاربران نسبت به اعمال تغییر در شبکه جاده‌ای در نظر گرفته می‌شود. به خاطر مشتق‌ناپذیری جواب‌های پریشیده در جریان تعادل نسبت به توسیع ظرفیت یال، مسئله طراحی شبکه جاده‌ای از طریق روش‌های بهینه‌سازی ناهموار حل می‌شود. تحلیل حساسیت مرتبه اول از طریق حل نامساوی تغییراتی آفینی به دست می‌آید و از آن مشتقات جهتی و گرادیان تعمیم‌یافته متغیرهای توسیع ظرفیت یالی به راحتی به دست می‌آیند. سپس با استفاده از [۱۰] روش تصویر زیرگرادیان مزدوج (CSP) برای حل CNDP با همگرایی سراسری شرح داده می‌شود.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل، ابتدا تعاریف و مفاهیمی را می‌آوریم که در فصل‌های بعد نیاز خواهیم داشت. سپس مسئله نامساوی تغییراتی را تعریف کرده و تحلیل حساسیت این نوع مسائل را بیان می‌کنیم. در بخش آخر، برنامه ریاضی با قیدهای تعادل را معرفی می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱ برای $i = 1, 2, \dots, k$، نقاط $x_i \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda_i \geq 0$ را در نظر بگیرید. نقطه $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ را با شرط $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ **ترکیب محدب** k نقطه $x_1, x_2, \dots, x_k$ گویند.

مجموعه $S \subseteq \mathbb{R}^n$ را **محدب** گویند، هرگاه به ازای هر دو نقطه دلخواه $x_1, x_2 \in S$، تمامی ترکیب‌های محدب آن‌ها نیز در S باشند. به عبارت دیگر، پاره‌خط واصل بین هر دو نقطه دلخواه از یک مجموعه محدب، درون مجموعه قرار می‌گیرد.

فرض کنید S یک مجموعه دلخواه از $\mathbb{R}^n$ باشد. **پوسته محدب** S، که با $\mathrm{conv}(S)$ نشان داده می‌شود، مجموعه تمامی ترکیب‌های محدب اعضای S است. به عبارت دیگر، $x \in \mathrm{conv}(S)$ اگر و تنها اگر بتوان x

را به صورت

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i,$$
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$
$$\lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

نمایش داد، که در آن k یک عدد صحیح مثبت است و $x_1, x_2, \ldots, x_k \in S$.

تعریف ۲.۱ (ابرصفحه) مجموعه $H = \{x|\ p^t(x - \overline{x}) = 0\}$ یک ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ نامیده می‌شود، که در آن p بردار غیرصفر در $\mathbb{R}^n$ بوده و $\overline{x}$ یک نقطه روی ابرصفحه است. بردار p را گرادیان یا نرمال ابرصفحه می‌گویند.

هر ابرصفحه فضای $\mathbb{R}^n$ را به دو نیم‌فضای $H^+ = \{x|\ p^t(x - \overline{x}) \geq 0\}$ و $H^- = \{x|\ p^t(x - \overline{x}) \leq 0\}$ تقسیم می‌کند.

تعریف ۳.۱ (ابرصفحه حامی) فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^n$، $D \neq \emptyset$ و $\overline{x}$ روی مرز D باشد. در این صورت ابرصفحه $H = \{x|\ p^t(x - \overline{x}) = 0\}$ را ابرصفحه حامی D در نقطه $\overline{x}$ می‌نامند، هرگاه مجموعه D کاملاً در یک طرف H قرار گیرد. به عبارت دیگر، D زیرمجموعه یکی از نیم‌فضاهای تولید شده H^+ یا H^- باشد.

تعریف ۴.۱ تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را در مجموعه محدب $D \subseteq \mathbb{R}^n$ **محدب** گوییم، هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in D$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2). \tag{۱.۱}$$

اگر f در $\mathbb{R}^n$ محدب باشد، گوییم f محدب است و اگر نامساوی (۱.۱) برای $\lambda \in (0, 1)$ به طور اکید برقرار باشد، گوییم f **اکیداً محدب** است.

تابع $f(x)$ را **مقعر** (اکیداً مقعر) گوییم، هرگاه تابع $-f(x)$ محدب (اکیداً محدب) باشد.

تعریف ۵.۱ (یکنوایی) تابع $f : X \to \mathbb{R}^n$ را **یکنوا** گوییم، هرگاه برای هر $x, x^* \in X$ داشته باشیم:

$$[f(x) - f(x^*)]^t (x - x^*) \geq 0. \quad (۲.۱)$$

تابع $f(x)$ را **اکیداً یکنوا** گوییم، هرگاه نامساوی (۲.۱) برای هر $x, x^* \in X$ و $x \neq x^*$ به طور اکید برقرار باشد.

اگر عددی مانند $\alpha > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $x, x^* \in X$ و $x \neq x^*$

$$[f(x) - f(x^*)]^t (x - x^*) \geq \alpha ||x - x^*||^2, \quad (۳.۱)$$

آنگاه تابع $f(x)$ را **قویاً یکنوا** گوییم.

تعریف ۶.۱ (نیم‌پیوستگی) تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ را در نظر بگیرید.
تابع f روی $\mathbb{R}^n$ **نیم‌پیوسته پایینی** (l.s.c.) است، اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \liminf_{y \to x} f(y).$$

تابع f روی $\mathbb{R}^n$ **نیم‌پیوسته بالایی** (u.s.c.) است، اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \limsup_{y \to x} f(y).$$

تعریف ۷.۱ (پیوستگی لیپ‌شیتز) تابع $f : X \to \mathbb{R}^n$ را به طور محلی **پیوسته لیپ‌شیتز** گویند، هرگاه برای هر $x \in X$، یک همسایگی مانند $N(x)$ و عدد $L(x) > 0$ وجود داشته باشند به طوری که

$$||f(x_1) - f(x_2)|| \leq L(x) ||x_1 - x_2||, \qquad \forall x_1, x_2 \in N(x). \quad (۴.۱)$$

اگر نامساوی (۴.۱) برای یک عدد ثابت مانند $L > 0$ روی X به طور یکنواخت برقرار باشد، یعنی اگر

$$||f(x_1) - f(x_2)|| \leq L ||x_1 - x_2||, \qquad \forall x_1, x_2 \in X, \quad (۵.۱)$$

آنگاه تابع f را روی X پیوسته لیپ‌شیتز گویند.

شرط (۵.۱)، به شرط لیپ‌شیتز از مرتبه L معروف است. توجه کنید که هر تابع مانند f که به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، به طور محلی پیوسته لیپ‌شیتز است.

تعریف ۸.۱ (مشتق جهتی تعمیم‌یافته) حد

$$f^0(x,v) = \lim \sup_{\substack{y\to x \\ t\to 0^+}} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t}$$

را مشتق جهتی تعمیم‌یافته تابع f در نقطه x، در جهت v می‌نامند.

تعریف ۹.۱ (زیرگرادیان) فرض کنید D یک مجموعه باز محدب در $\mathbb{R}^n$ بوده و $f : D \to \mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد. در این صورت، بردار v را زیرگرادیان f در نقطه $x_0 \in D$ گوییم، هرگاه برای هر $x \in D$ داشته باشیم:

$$f(x) \geq f(x_0) + v(x - x_0).$$

مجموعه تمام زیرگرادیان‌های تابع f را با ∂f نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۱ (قضیه رادماخر[1]) اگر تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ روی مجموعه باز $D \subseteq \mathbb{R}^n$ پیوسته لیپ‌شیتز باشد، آنگاه f روی D تقریباً همه جا (با اندازه لبگ) مشتق‌پذیر است.

برهان. رجوع کنید به [۱۳]. □

قضیه ۱۱.۱ فرض کنید تابع f در نزدیکی x پیوسته لیپ‌شیتز بوده و S یک مجموعه در $\mathbb{R}^n$ با اندازه لبگ 0 باشد. اگر مجموعه نقاطی را که f در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست با Ω_f نشان دهیم، آنگاه

$$\partial f(x) = \operatorname{conv}\{\lim \nabla f(x_i) : x_i \to x,\ x_i \notin S,\ x_i \notin \Omega_f\}.$$

برهان. رجوع کنید به [۱۱]. □

[1] Rademacher's Theorem

تعریف ۱۲.۱ فضای برداری نرم‌دار X را **کامل** گویند، هرگاه هر دنباله کوشی[2] در آن همگرا باشد. یک فضای نرم‌دار کامل را **فضای باناخ** [3] می‌نامند.

قضیه ۱۳.۱ (**نقطه ثابت باناخ**) فرض کنید فضای X یک فضای باناخ بوده و تابع پیوسته f بر X به توی X یک نگاشت انقباضی باشد. به عبارت دیگر، عددی مانند $0 < \delta < 1$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x_1 و x_2 از X داشته باشیم

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \delta \|x_1 - x_2\|. \tag{۶.۱}$$

در این صورت، نقطه‌ای منحصر به فرد مانند y وجود دارد به طوری که $f(y) = y$. نقطه y، نقطه ثابت تابع f نامیده می‌شود.

برهان. رجوع کنید به [۴]. □

برای آشنایی بیشتر با تعاریف و مفاهیم اولیه می‌توانید به کتاب‌های تحقیق در عملیات و آنالیز حقیقی، به عنوان نمونه [۴]، [۶]، [۱۱]، [۱۳] و [۱۶] مراجعه کنید.

۲.۱ شرایط کروش — کان — تاکر

شکل استاندارد یک مسئله برنامه‌ریزی خطی را به صورت

$$\min\{c^t x |\ Ax = b,\ x \geq 0\}$$

در نظر بگیرید، که در آن $c, x \in \mathbb{R}^n$، $b \in \mathbb{R}^m$ و A یک ماتریس $m \times n$ با رتبه کامل است. همان طور که می‌دانیم متناظر با هر مسئله برنامه‌ریزی خطی (مسئله اولیه)، مسئله برنامه‌ریزی خطی دیگری به نام مسئله ثانویه (دوگان) وجود دارد که عبارت است از

[2] Cauchy

[3] Banach

$$\max\{b^ty|\ A^ty+s=c,\ s\geq 0\},$$

که در آن $y\in\mathbb{R}^m$ متغیر ثانویه و $s\in\mathbb{R}^n$ متغیر کمبود ثانویه است.

قضیه ۱۴.۱ (شرایط کروش − کان − تاکر(KKT)) اگر x نقطه شدنی برای اولیه و (y,s) نقطه شدنی برای دوگان باشد، آنگاه شرایط لازم و کافی برای این که x و (y,s) به ترتیب جواب‌های بهین مسئله اولیه و مسئله دوگان باشند، به صورت

$$\begin{aligned} Ax&=b,\\ A^ty+s&=c,\\ x^ts&=0,\\ x&\geq 0,\\ s&\geq 0, \end{aligned} \tag{۷.۱}$$

هستند.

برهان. رجوع کنید به [۲۲]. □

شرایط (۷.۱) را در نظر بگیرید. اگر مقدار s را از $A^ty+s=c$ به دست آورده و در شرایط دیگر جای‌گذاری کنیم، آنگاه شرایط جدید معادل با (۷.۱) را به صورت

$$\begin{aligned} Ax&=b,\\ x^t(c-A^ty)&=0,\\ c-A^ty&\geq 0,\\ x&\geq 0, \end{aligned} \tag{۸.۱}$$

به دست می‌آوریم. از شرایط KKT جدید یعنی (۸.۱) در فصل ۲ استفاده خواهیم کرد.

فرم کلی مسئله بهینه‌سازی غیرخطی به صورت

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l, \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

است، که در آن f، $h_i(i = 1, 2, \ldots, m)$ و $g_j(j = 1, 2, \ldots, l)$ روی $\mathbb{R}^n$ توابع هموار با مقدار حقیقی هستند.

اگر توابع f و $g_j(j = 1, 2, \ldots, l)$ محدب بوده و $h_i(i = 1, 2, \ldots, m)$ تابع خطی باشد، آنگاه مسئله (۹.۱) را مسئله بهینه‌سازی محدب می‌نامند. در ادامه شرایط لازم مرتبه اول برای بهینه بودن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۵.۱ (شرایط لازم مرتبه اول) فرض کنید f، $h_i(i = 1, 2, \ldots, m)$ و $g_j(j = 1, 2, \ldots, l)$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند. به علاوه، فرض کنید x^* جواب محلی (۹.۱) بوده و گرادیان‌های قیدهای فعال در x^*، مستقل خطی باشند. اگر تابع لاگرانژ این مسئله را به صورت

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{l} v_j g_j(x) \tag{۱۰.۱}$$

تعریف کنیم، آنگاه بردار مضارب لاگرانژ $u^* = (u_i^*)$ و $v^* = (v_j^*)$ وجود دارند، به طوری که

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, u^*, v^*) = 0, & \\ h_i(x^*) = 0, & \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ g_j(x^*) \leq 0, & \quad j = 1, 2, \ldots, l, \\ v_j^* \geq 0, & \quad j = 1, 2, \ldots, l, \\ v_j^* g_j(x^*) = 0, & \quad j = 1, 2, \ldots, l. \end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

شرایط (۱۱.۱) به شرایط KKT معروف هستند.

برهان. رجوع کنید به [٦]. □

حالت خاصی از مسئله (۹.۱) را به صورت

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ & x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{۱۲.۱}$$

در نظر بگیرید. تابع لاگرانژ این مسئله به صورت

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(x) - \sum_{j=1}^{l} v_j x_j \tag{۱۳.۱}$$

است. بنا به قضیه ۱۵.۱ شرایط KKT این مسئله به صورت

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{h_i(x)}{\partial x_j} - v_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{۱۴.۱}$$

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{۱۵.۱}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{۱۶.۱}$$

$$v_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{۱۷.۱}$$

$$v_j x_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{۱۸.۱}$$

هستند. از (۱۴.۱) داریم

$$v_j = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{۱۹.۱}$$

با جای‌گذاری (۱۹.۱) در (۱۸.۱) و (۱۷.۱) داریم

$$x_j \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{h_i(x)}{\partial x_j} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{۲۰.۱}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{h_i(x)}{\partial x_j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{۲۱.۱}$$

بنا به (۱۳.۱)—(۲۱.۱)، اگر تابع لاگرانژ را به صورت

$$L(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(x) \tag{۲۲.۱}$$