بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی دانشگاه دامغان

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض

قاب‌های پیوسته، قاب‌های پیوسته از نوع ریس و پایه‌های ریس پیوسته در فضاهای هیلبرت

توسط:

پریسا ذبحی نجف‌آبادی

استاد راهنما:

دکتر نرگس تولایی

شهریور ۱۳۹۳

به نام خدا

قاب‌های پیوسته، قاب‌های پیوسته از نوع ریس و پایه‌های ریس پیوسته در فضاهای هیلبرت

توسط:

پریسا ذبحی نجف‌آبادی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **بسیار خوب**

دکتر نرگس تولایی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر علی غفاری استاد ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان (داور اول)

دکتر مرتضی ابطحی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر محمد رمضانپور استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۳

الهی...

اندیشه ام را در مسیری معنوی و روحانی قرار ده، تا روحم را با تو در آمیزم و لذت با تو بودن را در لحظه لحظه ی زندگی ام دریابم.

ای خالق بی مدد و ای واحد بی عدد، ای اول بی بدایت و ای آخر بی نهایت. ای ظاهر بی صورت و ای باطن بی سیرت، ای حی بی ذلت و ای بخشنده بی منت، ای داننده رازها، ای شنونده آوازها، ای رساننده کام ها، ای مطلع بر حقایق، ای مهربان بر خلایق، عذرهای ما بپذیر که تو غنی و ما فقیر و بر عیب های ما مگیر که تو قوی و ما حقیر، از بنده خطا آید و ذلت و از تو عطا آید و رحمت.

تقدیم به روح پدرم

که همواره پشتیبان بی خستگی من بود، چه آن گاه که حضورش سایه ای امن بر سرم بود و چه آن گاه با پروازش، به نگهبانی بر فراز آسمان ها بدل گشت تا دعاهای خیرش بدرقه ی راهم باشد.

تقدیم به مادر مهربانم

که با رفتن پدر، باری دو چندان را بر شانه های رنجورش کشید تا درد بی پدر ماندن را کمی در دل هایمان التیام دهد.

تقدیم به همسر فداکارم

که در لحظه لحظه های این راه پر نشیب و فراز، دستانم را در دستان پر مهرش فشرد و هیچ گاه تنهایم نگذاشت.

سپاسگزاری

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند و سلام و درود بر پیامبر صدق و راستی، حضرت محمد (ص) و خاندان پاک ایشان.

اکنون که با لطف بی منتهای ایزدمنان، مرحله ای دیگر از دوران تحصیل را به پایان می رسانم، فرصت را مغتنم شمرده و از خانواده مهربانم که موفقیت های خویش را وام دار فداکاری ایشان می دانم، سپاس گزاری می نمایم.

همچنین از استاد راهنمای گرامی و بزرگوارم سرکار خانم دکتر نرگس تولایی که در تمام مراحل پایان نامه با دقت و ژرف نگری، صبر و شکیبایی راهنمایم نمودند، خالصانه تشکر و قدردانی می نمایم. بی شک بدون راهنمایی های ارزشمند و حمایت ایشان، تکمیل این پایان نامه ممکن نبود.

هم چنین داوران بزرگوارم جناب آقای دکتر علی غفاری و جناب آقای دکتر مرتضی ابطحی، سپاس اندیشه ی تابناکتان که مرا سهیم گردید در شناخت آن چه خود از نشانه های الوهیت و عظمت خداوند مهربان درک کرده اید و این مباهاتی است که نصیب هر کس نمی شود.

خاک پای تمامی کسانی که در این موفقیت همراه و یاری گرم بوده اند را طوطیای چشمانم می کنم. باشد که مو هبتشان را هیچ گاه از یاد نبرم.

پریسا ذبحی نجف آبادی

شهریور ۹۳

چکیده

قاب‌های پیوسته، قاب‌های پیوسته از نوع ریس و پایه‌های ریس پیوسته در فضاهای هیلبرت

به وسیله‌ی:
پریسا ذبحی نجف‌آبادی

در این پایان‌نامه به مطالعه‌ی قاب‌های پیوسته و پایه‌های ریس پیوسته پرداخته می‌شود. پایه‌های ریس پیوسته را معرفی کرده و شرایطی که یک قاب پیوسته، یک پایه‌ی ریس پیوسته می‌شود را مورد بررسی قرار می‌دهد. قاب‌های پیوسته‌ای وجود دارند که تنها دارای یک دوگان می‌باشند، که این نوع قاب‌ها، قاب‌هایی از نوع ریس نامیده می‌شوند . هم‌چنین این پایان‌نامه نشان می‌دهد که، یک قاب پیوسته یک قاب پیوسته از نوع ریس است، اگروتنهااگر یک پایه‌ی ریس پیوسته باشد و در نهایت اندازه‌ای می‌یابد که بر اساس آن، يك قاب موجک پیوسته، يك پایه‌ی ریس پیوسته می‌باشد.

واژگان کلیدی: قاب، پایه‌ی متعامد، پایه‌ی ریس، قاب پیوسته، پایه‌ی متعامد پیوسته، پایه‌ی ریس پیوسته، فضای هیلبرت

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

می‌دانیم مهم‌ترین مشخصه‌ی پایه در فضای هیلبرت H آن است که هر عضوی از فضا را می‌توان به صورت ترکیب خطی نامتناهی از عناصر پایه نوشت، که ضرایب یکتا هستند. هم‌چنین یک قاب دنباله‌ای از عناصر در فضای هیلبرت H است که هر عضوی از فضا را می‌توان به صورت ترکیب خطی نامتناهی از عناصر قاب نوشت، اما ضرایب لزوماً یکتا نیستند. قاب‌ها، پایه‌هایی هستند که لزوماً خاصیت مستقل خطی بودن را ندارند. درنتیجه قاب‌ها دارای خاصیت تکرار بردارها می‌باشند و این خاصیت باعث می‌شود در یک سیستم پردازش سیگنال‌ها، قاب‌ها از مقاوم‌پذیری بیشتری در برابر خطاهای ارسالی نسبت به پایه‌ها برخوردار باشند. عملکرد مطلوب قاب‌ها نسبت به پایه، باعث تعریف آن توسط دانشمندان شد. مفهوم قاب برای اولین بار در سال ۱۹۵۲، توسط «دافین»[۱] و «شیفر»[۲] بیان شد و به عنوان جایگزینی برای پایه‌های متعامد قرار گرفت. سرانجام در سال ۱۹۹۴، «جرالدکیزر»[۳] به تعمیم قاب‌ها در فضای اندازه‌پذیر پرداخت و این قاب‌های توسعه یافته را در کتابی با نام قاب‌های تعمیم یافته معرفی کرد، برای کسب اطلاعات بیشتر به [۱۴] مراجعه کنید. در سال‌های بعد این قاب‌ها که عنوان قاب‌های پیوسته را به خود گرفت، توسط دانشمندانی در جنبه‌های مختلف گسترش یافت [۱۰،۱۳].
بدین سبب ما در این پایان‌نامه به بررسی قاب‌های پیوسته و پایه‌های ریس پیوسته می‌پردازیم.
امروزه قاب‌ها و پایه‌ها، از یک طرف کاربرد بسیاری در آنالیز هارمونیک و توابع و از طرف دیگر، در علوم مختلف از جمله، فیزیک، مهندسی، کامپیوتر و پردازش تصاویر وسیگنال‌ها دارند.

---

[۱] Duffin

[۲] Schaefer

[۳] Kaiser,G

در فصل اول این پایان‌نامه، مقدماتی را برای ورود به مبحث قاب‌های پیوسته، که شامل تعاریف، قضایا و مفاهیم بنیادی است بیان می‌کنیم.

در فصل دوم، به بررسی تعاریف و قضایای اساسی مربوط به قاب‌ها و پایه‌ها در فضای هیلبرت می‌پردازیم. هم‌چنین روش مشخص‌سازی قاب‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل سوم، به معرفی قاب‌های پیوسته و پایه‌های ریس پیوسته می‌پردازیم؛ در بخش ۳-۱ به تعریف قاب‌های پیوسته و خواص مربوط به آن می‌پردازیم؛ در بخش ۳-۲ عملگر قاب پیوسته را تعریف می‌کنیم و ویژگی‌های قاب پیوسته را بررسی می‌کنیم و در ادامه نشان می‌دهیم یک قاب پیوسته کامل است؛ در بخش ۳-۳ پایه‌های ریس پیوسته و خواص مربوط به آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم و شرایطی که لازم است یک قاب پیوسته یک پایه ریس پیوسته باشد را نشان می‌دهیم؛ در بخش ۳-۴ دوگان قاب پیوسته را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که قاب‌های پیوسته‌ای هستند که فقط یک دوگان دارند، که به این نوع قاب‌ها، قاب‌های پیوسته از نوع ریس گفته می‌شود و در بخش ۳-۵ مثال‌هایی از قاب‌های پیوسته را ارائه می‌کنیم و در نهایت اندازه‌ای پیدا می‌کنیم که توسط آن یک قاب پیوسته، یک پایه‌ی ریس پیوسته می‌شود.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل برخی از تعاریفی که توسط آن‌ها، براهین و مسائلی که در فصل‌های آینده با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم، حل می‌شوند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همین‌طور مفاهیمی از قبیل اندازه‌ها، فضای هیلبرت، انتگرال‌های مقدار-برداری و... و کاربرد آن‌ها در حل مسائل مربوط به قاب‌ها آشنا می‌شویم. برای اطلاعات بیشتر به [۷]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۷] و [۲۱] مراجعه نمایید.

۱-۱ اندازه‌ها

از آن‌جا که تمام قاب‌های پیوسته در فضای اندازه تعریف می شوند، لذا لازم است قبل از پرداختن به تعاریف مربوط به قاب‌های پیوسته، درک درستی از فضای اندازه داشته باشیم. در این بخش فضای اندازه را تعریف کرده و به ویژگی‌های مربوط به آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض می‌کنیم X یک مجموعه‌ی غیرتهی و $\mathcal{M} \subseteq P(X)$. در این‌صورت $\mathcal{M}$ را یک جبر می‌گوییم هرگاه

۱- $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

۲- اگر $A, B \in \mathcal{M}$، آن‌گاه $A \cup B \in \mathcal{M}$.

۳- اگر $A \in \mathcal{M}$، آن‌گاه $A^c \in \mathcal{M}$.

یک σ-جبر، جبری است که تحت اجتماع شمارش‌پذیر بسته باشد. به‌عنوان مثال اگر X یک مجموعه باشد، آنگاه $\mathcal{M} = P(X)$ یک σ-جبر می‌باشد.

چنانچه X یک فضای توپولوژیکی باشد، σ-جبر تولید شده توسط خانواده‌ی مجموعه‌های باز واقع در X، را σ-جبر بورل می‌گوییم و آن را با $\mathfrak{B}_X$ نشان می‌دهیم و اعضای $\mathfrak{B}_X$ را مجموعه‌های بورل می‌نامیم. بنابراین $\mathfrak{B}_X$ شامل مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، اشتراک شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز، اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بسته و غیره می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۱. فرض می‌کنیم $\mathcal{M}$ یک σ-جبر روی X باشد. در این‌صورت یک اندازه‌ی مثبت روی $\mathcal{M}$ تابعی چون $\mu : \mathcal{M} - \longrightarrow [\circ, +\infty]$ است به‌طوری‌که

۱- $\mu(\emptyset) = \circ$.

۲- اگر $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزای $\mathcal{M}$ باشند، آن‌گاه

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n),$$

که خاصیت (۲) را جمعی شمارش‌پذیر می‌نامیم.
چنانچه X یک مجموعه‌ی غیرتهی و $\mathcal{M}$ یک σ-جبر روی X باشد، $(X, \mathcal{M})$ را یک فضای اندازه‌پذیر و مجموعه های واقع در $\mathcal{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر می‌نامیم. اگر μ یک اندازه روی $(X, \mathcal{M})$ باشد، آن‌گاه $(X, \mathcal{M}, \mu)$ را یک فضای اندازه می‌نامیم.

مثال ۳.۱.۱. اگر Xیک مجموعه‌ی غیرتهی و$\mathcal{M} = P(X)$ ، آن‌گاه

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [\circ, +\infty)$$
$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{متناهی } A \\ +\infty & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

یک فضای اندازه می‌باشد که به آن اندازه‌ی شمارشی می‌گوییم.

مثال ۴.۱.۱. اگر Xیک مجموعه‌ی غیرتهی و $\mathcal{M} = P(X)$، آن‌گاه برای هر $x_\circ \in X$

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [\circ, +\infty)$$
$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & x_\circ \in A \\ \circ & x_\circ \notin A \end{cases}$$

یک فضای اندازه می‌باشد که به آن جرم نقطه‌ای یا اندازه‌ی دیراک می‌گوییم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. در این‌صورت μ اندازه‌ی

۱- متناهی است اگر $\mu(X) < +\infty$.

۲- σ-متناهی است اگر $X = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$ که در آن $A_n \in \mathcal{M}$ و $\mu(A_n) < +\infty$ به ازای همه‌ی nها برقرار باشد.

۳- نیمه متناهی است اگر به ازای هر $A \in \mathcal{M}$ که $\mu(A) = +\infty$ مجموعه‌ای چون $B \in \mathcal{M}$ موجود باشد که $B \subset A$ و $0 < \mu(B) < +\infty$.

فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. در این‌صورت خاصیت $P(x)$ تقریباً همه‌جا برقرار است اگر

$$\exists C \in \mathcal{M};\ \mu(C) = 0 \ \wedge (\forall x \in C^c; P(x))$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر و (Y, τ) یک فضای توپولوژیکی باشد. در این‌صورت تابع $f : X \to Y$ یک تابع اندازه‌پذیر است هرگاه

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{M} \quad (V \in \tau).$$

مثال ۷.۱.۱. هرگاه تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد، یک تابع اندازه‌پذیر می‌شود

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

تعریف ۸.۱.۱. اندازه‌ی μ بر σ-جبر تمام مجموعه‌های بورل را یک اندازه‌ی بورل روی X می‌نامیم. حال اگر μ یک اندازه‌ی بورل روی X و $E \subseteq X$ یک مجموعه‌ی بورل باشد، آن‌گاه

۱- μ را روی E منظم درونی می‌گوییم، اگر

$$\mu(E) = \sup\ \{\ \mu(K)\ ;\ k \subseteq E\ ,\ \text{فشرده است}\ K\}.$$

۲- μ را روی E منظم بیرونی می‌گوییم، اگر

$$\mu(E) = \inf\ \{\ \mu(U)\ ;\ E \subseteq U\ ,\ \text{باز است}\ U\}.$$

۳- μ را روی E منظم می‌گوییم هرگاه، هم منظم درونی و هم منظم بیرونی باشد.

تعریف ۹.۱.۱. فرض می‌کنیم μ یک اندازه‌ی بورل روی X باشد. در این‌صورت μ را اندازه‌ی رادون می‌نامیم هرگاه

۱- به‌ازای هر مجموعه‌ی فشرده‌ی $K \subseteq X$ داشته باشیم $\mu(K) < +\infty$.

۲- روی همه‌ی مجموعه‌های باز، منظم درونی باشد.

۳- روی همه‌ی مجموعه‌های بورل، منظم بیرونی باشد.

۱-۲ انتگرال‌های بردار-مقداری

به دلیل این‌که عملگرهای قاب پیوسته به صورت انتگرال‌های بردار-مقداری تعریف می‌شوند، لازم است که انتگرال‌پذیری توابع در فضاهای برداری را مورد بررسی قرار دهیم. در این بخش انتگرال‌های بردار-مقداری را تعریف و خواص مربوط به آن‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض می‌کنیم X یک فضای برداری مختلط باشد. در این‌صورت نگاشت $\|.\| : X \to [0, +\infty)$ را یک نیم نرم روی X می‌گوییم هرگاه

۱- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad (\alpha \in \mathbb{C}, x \in X)$.

۲- $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \quad (x_1, x_2 \in X)$.

از خاصیت (۱) می‌توان نتیجه گرفت $\|0\| = 0$.
حال اگر خاصیت $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ برقرار باشد، آن‌گاه به نیم نرم $\|.\|$ یک نرم روی X گفته می‌شود. در این حالت $(X, \|.\|)$ را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم.
لازم به‌ذکر است اگر $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد، آن‌گاه (X, d) یک فضای متریک است وقتی‌که تابع فاصله بر آن به‌صورت زیر تعریف شود

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in X).$$

یک متر تحت انتقال پایاست اگر به ازای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم

$$d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

دو نرم $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ روی X معادل می‌باشند، هرگاه ثابت‌های $C_1, C_2 > 0$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad (x \in X).$$

مثال ۱.۲.۲. فرض می‌کنیم $X = \mathbb{C}^k$. در این‌صورت هر کدام از نگاشت‌های زیر یک فضای نرم‌دار روی X می‌باشند.

$$\|.\| : \mathbb{C}^k \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$\|(z_1, ... z_k)\| = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} |z_i| \\ \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |z_i|^2} \\ \text{Max}_{i=1}^{n} |z_i| \end{cases}$$

حال اگر (X, d) یک فضای متریک کامل باشد (یعنی هر دنباله‌ی کوشی در X همگرا باشد)، آن‌گاه فضای نرم‌دار $(X, \|.\|)$ را یک فضای باناخ می‌نامیم. به‌عنوان مثال فضای نرم‌دار $\mathbb{C}^k$ یک فضای باناخ می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۳. فضای تمام اندازه‌های رادون مختلط روی X را با $M(X)$ مشخص می‌کنیم و برای هر $\mu \in M(X)$ تعریف می‌کنیم

$$\|\mu\| = |\mu|(X)$$

که در آن $|\mu|$ تغییرات کلی μ می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۴. فرض می‌کنیم τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد. در این‌صورت (X, τ) را فضای برداری توپولوژیکی می‌نامیم هرگاه

۱- تمام تک نقطه‌ای‌ها در X بسته باشند.

۲- نگاشت های زیر پیوسته باشند

$$\begin{cases} X \times X \longrightarrow X \\ (x, y) \longmapsto x + y \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \lambda \times X \longrightarrow X \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \end{cases}$$

فضاهای نرم‌دار، مثالی از فضای برداری توپولوژیکی می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۵. فرض می‌کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. در این‌صورت فضای X را موضعاً محدب می‌نامیم هرگاه، دارای پایه‌ی موضعی باشد که تمام اعضایش محدب باشند.

تعریف ۱.۲.۶. فرض می‌کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. در این‌صورت فضای X را F-فضا می‌نامیم هرگاه، توپولوژی τ روی X با متری که تحت انتقال پایاست، سازگار باشد. در صورتی که X موضعاً محدب هم باشد، X را فضای فرشه می‌نامیم.

تعریف ۷.۲.۱. فرض می‌کنیم $\mathcal{V}$ یک فضای برداری توپولوژیکی و $\mathcal{V}^*$ جدا کننده‌ی نقاط $\mathcal{V}$ و هم‌چنین (X, μ) یک فضای اندازه باشد. نگاشت $F : X \to \mathcal{V}$ را به‌طور ضعیف انتگرال‌پذیر می‌گوییم هرگاه، برای هر $\lambda \in \mathcal{V}^*$ داشته باشیم $\lambda F \in L^1(\mu)$. در این‌صورت، اگر بردار $v \in \mathcal{V}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\lambda(v) = \int (\lambda F) d\mu \quad (\lambda \in \mathcal{V}^*)$$

آن‌گاه v را انتگرال بردار-مقداری F می‌نامیم و قرار می‌دهیم $v = \int F d\mu$.

به‌دلیل این‌که X^* نقاط X را جدا می کند، بردار v که وجود دارد منحصر به‌فرد است و $v = \int F d\mu$ خوش تعریف می‌باشد.

در صورتی‌که $F : X \to \mathcal{V}$ به‌طور ضعیف انتگرال‌پذیر، $\int F d\mu$ موجود و T یک نگاشت خطی پیوسته از $\mathcal{V}$ به فضای برداری توپولوژیکی $\mathcal{W}$ باشد. چون به ازای هر $\varphi \in \mathcal{W}^*$ داریم $\varphi T \in \mathcal{V}^*$ ، واضح است که TF به‌طور ضعیف انتگرال‌پذیر است و

$$\varphi T(\int F d\mu) = \int \varphi T F d\mu \quad (\varphi \in \mathcal{W}^*).$$

یعنی $\int TF d\mu$ وجود دارد و

$$T \int F d\mu = \int T F d\mu.$$

در قضیه زیر نشان داده می‌شود که انتگرال‌های بردار-مقداری خطی می‌باشند.

قضیه ۸.۲.۱. *فرض می‌کنیم توابع $F : X \to \mathcal{V}$ و $G : X \to \mathcal{V}$ به‌طور ضعیف انتگرال‌پذیر، $\int F d\mu$ و $\int G d\mu$ موجود و $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ میدان اسکالر). در این‌صورت $\alpha F + \beta G$ نیز به‌طور ضعیف انتگرال‌پذیر است و*

$$\int (\alpha F + \beta G) d\mu = \alpha \int F d\mu + \beta \int G d\mu.$$

اثبات. رجوع شود به [۲۱]. □

قضیه ۹.۲.۱. *فرض می‌کنیم $\mathcal{V}$ یک فضای فرشه و μ اندازه‌ی رادون در فضای موضعاً فشرده‌ی هاسدورف X باشد. اگر $F : X \to \mathcal{V}$ پیوسته با محمل فشرده باشد، آنگاه $\int gF d\mu$ وجود دارد و متعلق به مولد خطی بسته از برد F می‌باشد. به‌علاوه، هرگاه V فضای باناخ باشد*

$$\| \int F d\mu \| \leq \int \|F\| d\mu.$$

اثبات. رجوع شود به [۱۱، قضیه‌ی A۳.۱]. □

قضیه ۱۰.۲.۱. *فرض می‌کنیم $\mathcal{V}$ یک فضای باناخ و μ اندازه‌ی رادون در فضای موضعاً فشرده‌ی هاسدورف X باشد. اگر g یک تابع در $L^{1}(\mu)$ (با ارزش عددی) و $F : X \to \mathcal{V}$ کران‌دار و پیوسته باشد، آن‌گاه $\int gFd\mu$ وجود دارد و متعلق به مولد خطی بسته از برد F می‌باشد و*

$$\| \int gFd\mu\| \leq \sup_{x\in X} \|F(x)\| \int |g(x)|d\mu(x).$$

اثبات. رجوع شود به [۱۱، قضیه‌ی A۳.۳]. □

۱-۳ فضای هیلبرت

از آن‌جاکه مفهوم قاب‌ها و همین‌طور قاب‌های پیوسته در فضای هیلبرت تعریف می‌شوند، لذا در ابتدا به تعاریف مربوط به فضای هیلبرت و آشنایی با این فضا، هم‌چنین خواص فضای هیلبرت می‌پردازیم.

۱-۳-۱ فضای ضرب داخلی

تعریف ۱.۳.۱. فرض می‌کنیم X یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد. نگاشت $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ را یک ضرب داخلی می‌گوییم، هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

۱- $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

۲- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

۳- $\langle x, x\rangle \geq 0$.

۴- $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

در این‌صورت $(X, \langle .,. \rangle)$ را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم.
لازم به‌ذکر است که، تابع ضرب داخلی نسبت به متغییر دوم مزدوج خطی است، یعنی به ازای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داریم

۱- $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

۲- $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$.

هم‌چنین اگر $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، آن‌گاه با استفاده از ضرب داخلی در این فضا می‌توانیم نرمی به‌صورت زیر تعریف کنیم.

$$\begin{cases} \|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{cases}$$

در این‌صورت، X به یک فضای نرم دار خطی تبدیل می‌شود.

مثال ۲.۳.۱. $(\mathbb{C}^n, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی است، که ضرب داخلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{cases} \langle .,. \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \quad (x, y \in \mathbb{C}^n). \end{cases}$$

مثال ۳.۳.۱. فرض می‌کنیم $I = \mathbb{N}$ یک مجموعه‌ی شمارش‌پذیر باشد. اگر

$$l^2(I) = \{\{x_n\}_{n \in I};\ \sum_{n \in I} |x_n|^2 < \infty;\ \forall n,\ x_n \in \mathbb{C}\}$$

آن‌گاه می‌توان روی $l^2(I)$ یک ضرب داخلی به صورت زیر تعریف کرد

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n} \quad (x, y \in l^2(I)).$$

مثال ۴.۳.۱. فضای برداری تمام توابع مختلط پیوسته بر $[0, 1]$ همراه با ضرب داخلی به‌صورت زیر، یک فضای ضرب داخلی است.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

قضیه ۵.۳.۱. ***قانون متوازی الاضلاع.*** *فرض می‌کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد. در این‌صورت داریم*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\| + \|y\|)^2 \quad (x, y \in X).$$

به‌علاوه شرط لازم و کافی برای این که یک فضای نرم‌دار مختلط X یک فضای ضرب داخلی باشد این است که قانون متوازی الاضلاع برقرار باشد.

اثبات. رجوع شود به [۱۲، قضیه‌ی ۵.۲۲]. □

قضیه ۶.۳.۱. *نامساوی کوشی-شوارتز.* [1] *اگر $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد، آن‌گاه داریم*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \quad (x, y \in X).$$

اثبات. رجوع شود به [۱۲، قضیه‌ی ۵.۱۹]. □

قضیه ۷.۳.۱. *اگر در فضای ضرب داخلی X دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به‌ترتیب به x و y همگرا باشند، آن‌گاه داریم*

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

اثبات. رجوع شود به [۱۲، گزاره‌ی ۵.۲۱] . □

تعریف ۸.۳.۱. فرض می‌کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد و $x, y \in X$. بردارهای x و y را متعامد می‌گوییم، هرگاه $\langle x, y\rangle = 0$، در این‌صورت می‌نویسیم $x \perp y$. واضح است که رابطه‌ی $\perp$ متقارن است. زیر مجموعه‌ی S از X متعامد است اگر هر دو عضو متمایز از آن متعامد باشند. اگر به ازای هر $x \in S$ داشته باشیم $\|x\| = 1$، آن‌گاه S متعامد یکه است. اگر $M, N \subseteq X$ و $x \in X$، آن‌گاه می‌گوییم x بر M عمود است اگر به ازای هر $y \in M$، $y \perp x$. هم‌چنین می‌نویسیم $M \perp N$ اگر به ازای هر $y \in N$ و $x \in M$ داشته باشیم $x \perp y$.

قضیه ۹.۳.۱. *قضیه‌ی فیثاغورس* [2] *فرض می‌کنیم X یک فضای ضرب داخلی و $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ یک دنباله در آن باشد به‌طوری‌که به ازای هر $j \neq k$ داشته باشیم $x_j \perp x_k$. در این‌صورت داریم*

$$\|\sum_{j=1}^{n} x_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2.$$

اثبات. رجوع شود به [۱۲، قضیه‌ی ۵.۲۳]. □

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض می‌کنیم X یک فضای ضرب داخلی و Y ، Z دو زیرفضای متعامد از X باشند به‌طوری‌که $X = Y + Z$ دراین حالت می‌گوییم Y و Z متمم متعامد یکدیگر هستند. بدیهی است که دراین حالت هر $x \in X$ نمایشی یکتا به‌صورت $x = y + z$ دارد که در آن $y \in Y$ و $z \in Z$ و می‌نویسیم

$$X = Y \oplus Z.$$

---

[1] Caychy-Schwartz

[2] Pythagorean