دانشکده علوم- گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

عنوان:

عمل شکافتن حذفی برای مترویدهای دودویی و کاربردهای آن

استاد راهنما:

دکتر حبیب اذانچیلر

نگارش:

عذرا جلیلی

مهر ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

چکیده

در این پایان نامه ، عمل شکافتن حذفی روی گرافها به متروئیدهای دودویی تعمیم داده می شود و سپس ارتباط بین متروئیدهای حاصل از این عمل و متروئیدهای دودویی اصلی از لحاظ ماتریسهای متناظر، پایه ها ، توابع رتبه و همبندی مورد بررسی قرار گرفته و در پایان یک سری کاربردهای جالبی از این عمل ارائه خواهد شد.

پیشگفتار

عمل شکافتن حذفی روش معروف و مفیدی در حل مسائل همبندی گرافهاست .این عمل ممکن است همبندی یالی گرافها را کاهش دهد.

فرض کنید $G = (V+s, E)$ برای $k \geq ۲$ یک گرافk-همبند یالی در V باشد همچنین فرض کنید $d(s)$ زوج باشد. لواس [۴] ثابت کرده است که برای هر یال su یالی مانند sv وجود دارد بطوریکه بعد از شکافتن دو یال su و sv ، $k-$ همبندی یالی حفظ می شود.کاربرد دیگر این عمل مسئله افزایش همبندی یالی است . با استفاده از نتایج شکافت یالی و قضیه اشتراک g - چند مترویدها ی فرانک [۱، ۲] ، تیبور جردن [۳] ، قضیه مینیمم- ماکسیمم و الگوریتم چند جمله ای را برای مسئله افزایش همبندی یالی همزمان ارائه کرده است. در این مسئله دو گراف $G' = (V, E')$ ، $H' = (V, K')$ و دو مقدار صحیح $k, l \geq ۲$ داده شده است و هدف یافتن مجموعه کوچکی از یالهایی است که اضافه نمودن آنها به صورت همزمان G' و H' را به ترتیب k -همبند یالی و l -همبند یالی می نماید.

در این پایان نامه، عمل شکافتن حذفی برحسب دورهای گرافها توصیف می گردد. در حقیقت دورهای گراف G_{xy} برحسب دورهای گراف G تعیین می شوند. این نتیجه در تعمیم عمل شکافتن حذفی به مترویدهای دودویی مفید خواهد بود.

فصل اول این پایان نامه با ارائه مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف و متروید آغاز می شود و در فصل دوم با مفهوم عمل شکافتن و نیز عمل شکافتن حذفی در گراف و متروید آشنا می شوید،فصل سوم به شناسایی پایه ها و تابع رتبه متروید شکافته شده حذفی می پردازد و در نهایت در فصل چهارم برخی کاربردهای عمل شکافتن حذفی و ارتباط همبندی مترویدها با این عمل بیان خواهد شد. این پایان نامه برگرفته از مقاله زیر می باشد:

M. M. Shikare . K. V. Dalvi . S. B. Dhotre , *Splitting Off Operation for Binary Matroids and its Application,*Graphs and Combinatories (2010)

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف مقدماتی از نظریه گراف و متروید

در این فصل ابتدا تعاریف مقدماتی و بعضی از قضایای مود نیاز از نظریه‌ی گراف و سپس تعاریفی از نظریه‌ی متروید و قضایایی که در این پایان نامه به آن نیاز است ، به ترتیب از کتاب نظریه‌ی گراف وست [۱۱] و کتاب نظریه‌ی متروید آکسلی [۵] بیان می شوند.

۱.۱ گراف

تعریف ۱.۱.۱. *گراف* [۱] G یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi)$ متشکل از مجموعه‌ی ناتهی و متناهی به نام $V(G)$ که مجموعه رأس [۲] *های گراف یک مجموعه ی متناهی به نام* $E(G)$ *که مجموعه یال* [۳] *های گراف و یک رابطه* ψ *است که به هر عضو* $e \in E(G)$ *دو عضو (نه لزوما متمایز) از اعضای* $V(G)$ *را وابسته می کند.*

---

۱ Graph

۲ Vertex

۳ Edge

تعریف ۲.۱.۱. اگر e یک یال و u ، v رأس‌هایی باشند، به قسمی که $\psi(e) = uv$ ، آنگاه گویند یال e u را به v وصل می‌کند. u و v را رأس‌های انتهایی یا نقاط انتهایی [۴] *یال e می نامند.*

تعریف ۳.۱.۱. اگر دو رأس انتهایی یالی یکسان باشد آن یال را یک طوقه [۵] *گویند.*

تعریف ۴.۱.۱. درجه‌ی [۶] هر رأس مثل v از گراف بدون طوقه G که با $d(v)$ نوشته می شود، تعداد یال‌های واقع بر v تعریف می شود.

تعریف ۵.۱.۱. *اگر دو یال دارای رأسهای انتهایی یکسان باشند آن دو یال را یالهای موازی یا یالهای چند گانه [۷] گویند.*

تعریف ۶.۱.۱. *گراف ساده* [۸] گرافی است که هیچ طوقه و یال‌های چندگانه نداشته باشد.

تعریف ۷.۱.۱. دو رأس u و v را *مجاور* [۹] گویند هرگاه نقاط انتهایی یک یال باشند. در غیر این صورت آنها را نامجاور گویند.

تعریف ۸.۱.۱. گراف ساده با n رأس را که در آن هر دو رأس دلخواه مجاورند یک گراف کامل [۱۰] *با n رأس گویند و آن را با K_n نمایش می دهند.*

---

[۴] Endpoints

[۵] Loop

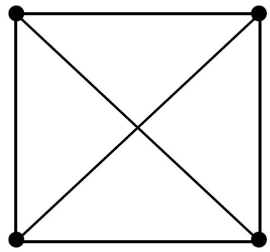
[۶] Degree

[۷] Multiple edges

[۸] Simple graph

[۹] Adjacent

[۱۰] Complete



شکل ۱.۱: K_4

مثال ۹.۱.۱. K_4 یک گراف کامل است. در شکل ۱.۱ گراف K_4 نشان داده شده است.

تعریف ۱۰.۱.۱. مجموعه ی مستقل [۱۱] *از رأس ها در یک گراف مجموعه رأس‌هایی است که دوبه دو نامجاورند.*

تعریف ۱۱.۱.۱. گراف G دوبخشی [۱۲] است، اگر $V(G)$ به صورت اجتماع دو مجموعه‌ی مستقل جدا از هم باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. یک گشت [۱۳] در گراف G دنباله ای از رأس ها و یال های G به صورت $v_0e_1v_1...e_nv_n$ می باشد، به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، v_{i-1} و v_i رأس های واقع بر یال e_i هستند.

تعریف ۱۳.۱.۱. هرگاه هیچ یالی در گشت تکرار نشود، آن را یک گذر [۱۴] گویند.

تعریف ۱۴.۱.۱. یک گشت یا گذر بسته است، هرگاه نقاط انتهایی آن ها یکی باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱. هرگاه هیچ رأسی در گذر تکرار نشود آن را یک مسیر [۱۵] می نامند.

[۱۱] Independent

[۱۲] Bipartite

[۱۳] Walk

[۱۴] Trail

[۱۵] Path

تعریف ۱۶.۱.۱. مسیر $v_\circ e_1 v_1 ... e_n v_n$ که در آن رابطه ی $v_\circ = v_n$ برقرار باشد را دور [۱۶] گویند.

تعریف ۱۷.۱.۱. طول [۱۷] یا اندازه یک گشت، گذر، مسیر یا دور، تعداد یال های موجود در آن می باشد.

مسیرها و دورهای شامل n رأس را به ترتیب با P_n و C_n نمایش می دهند.

تعریف ۱۸.۱.۱. دو رأس u و v را قابل اتصال گویند هرگاه بتوان مسیری بین این دو رأس در گراف G پیدا کرد.

تعریف ۱۹.۱.۱. دوری را فرد (زوج)گویند هرگاه تعداد یالهای آن دور ، عددی فرد (زوج) باشد.

قضیه ۲۰.۱.۱. یک گراف دوبخشی است اگر و تنها اگر شامل هیچ دور فرد نباشد.

برهان. رجوع شود به [۱۱] قضیه ۱۸.۲.۱ . □

تعریف ۲۱.۱.۱. یک *زیرگراف* [۱۸] از یک گراف G گراف H است بطوریکه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و نقاط انتهایی هر یال H بانقاط انتهایی هر یال در G یکسان هستند.

تعریف ۲۲.۱.۱. یک یکریختی [۱۹] از یک گراف ساده‌ی G به گراف ساده‌ی H دوسویی $f : V(G) \rightarrow V(H)$ است، بطوری که $uv \in E(G)$ اگر وتنها اگر $f(u)f(v) \in E(H)$. هرگاه یک، یکریختی از G به H وجود داشته باشد گویند G با H یکریخت است و آن را با نماد $G \cong H$ نشان می دهند.

---

[۱۶] Circuit

[۱۷] Length

[۱۸] Subgraph

[۱۹] Isomorphism

تعریف ۲۳.۱.۱. در یک گراف G *انقباض* [۲۰] یال e با نقاط انتهایی u و v جایگزین کردن u و v با یک رأس است، بطوریکه یالهایی که از این رأس می‌گذرند همان یال‌های u و v به جز e هستند. نتیجه حاصل گراف $G.e$ است که یک یال کمتر از G دارد.

تعریف ۲۴.۱.۱. گراف G را همبند [۲۱] گویند هرگاه برای هر دو رأس $u, v \in V(G)$ بتوان مسیری بین این دو رأس در گراف G پیدا کرد.درغیر این صورت گراف G نا همبند [۲۲] است.

تعریف ۲۵.۱.۱. هر زیر گراف همبند ماکسیمال G را یک مؤلفه ی [۲۳] G گویند. مؤلفه یک گراف بدیهی [۲۴] است، اگر هیچ یالی نداشته باشد، در غیر این صورت آن را غیر بدیهی گویند.

تعریف ۲۶.۱.۱. یال e از گراف G را پل [۲۵] گویند، اگر تعداد مؤلفه های همبند $G - e$ یکی بیشتر از تعداد مؤلفه های همبند G باشد.

گزاره ۲۷.۱.۱. یک گراف همبندبا n رأس ، حداقل $n - ۱$ یال دارد.

برهان. رجوع شود به [۱۱] گزاره ۱۳.۳.۱ . □

گزاره ۲۸.۱.۱. هر گراف با n رأس و k یال ، حداقل $n - k$ مؤلفه دارد.

برهان. رجوع شود به [۱۱] گزاره ۱۱.۲.۱ . □

[۲۰] Contraction
[۲۱] Connected
[۲۲] Disconnected
[۲۳] Component
[۲۴] Trivial
[۲۵] Bridge

تعریف ۲۹.۱.۱. رأس v یک *رأس برش* [۲۶] گراف G است اگر حذف آن تعداد مؤلفه‌های همبند G را افزایش دهد.

تعریف ۳۰.۱.۱. یک *یال برش* [۲۷] یالی از G است که حذف آن تعداد مؤلفه‌های همبند G را افزایش می‌دهد به عبارتی تعداد مؤلفه‌های همبند $G - e$ یکی بیشتر از تعداد مؤلفه‌های همبند G می باشد.

تعریف ۳۱.۱.۱. مجموعه ای مثل F از یالهای G را که $G - F$ شامل بیش از یک مؤلفه همبند باشد را یک مجموعه ناهمبند ساز گویند.

تعریف ۳۲.۱.۱. گراف G ، k- همبند یالی [۲۸] است اگر هر مجموعه ناهمبند ساز دارای حداقل k عضو باشد.

تعریف ۳۳.۱.۱. کمترین تعداد یالهایی که با حذف آنها G بیش از یک مؤلفه همبند باشد را $\mathcal{K}'(G)$ گویند به عبارتی $\mathcal{K}'(G)$ بزرگترین مقدار k است که G ، k- همبند یالی است.

تعریف ۳۴.۱.۱. *همبندی* [۲۹] G را که با $\mathcal{K}(G)$ نشان داده می شود، عبارت است از کمترین تعداد رأس های ممکن که با حذف آنها یک گراف ناهمبند حاصل می شود.

تعریف ۳۵.۱.۱. گراف G را k -همبند گویند هرگاه $\mathcal{K}(G) \geq k$. پس یک گراف با حداقل دو رأس ۱- همبند است اگر وتنها اگر همبند باشد.

[۲۶] Cut-vertex

[۲۷] Cut-edge

[۲۸] Edge connectivity

[۲۹] Connectivity

مثال ۳۶.۱.۱. $\mathcal{K}(K_n) = n - ۱$

لم ۳۷.۱.۱. یک یال در گراف G یال برش است اگر و تنها اگر قسمتی از یک دور نباشد.

برهان. رجوع شود به [۱۱] ، لم ۱۵.۲.۱ . □

تعریف ۳۸.۱.۱. *گراف همبند بدون دور را یک درخت [۳۰] گویند و زیر گراف فراگیر [۳۱] G زیر گرافی از G با مجموعه رئوس $V(G)$ می باشد. درخت فراگیر [۳۲] زیر گراف فراگیری است که خود یک درخت است.*

تعریف ۳۹.۱.۱. هرگاه $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف باشند، اجتماع [۳۳] آن ها که با نماد $G_۱ \cup G_۲$ نمایش داده می شود، گرافی است که مجموعه رئوس آن $V(G_۱) \cup V(G_۲)$ و مجموعه یال های آن $E(G_۱) \cup E(G_۲)$ می باشد.

تعریف ۴۰.۱.۱. تعداد یال های یک گراف را اندازه[۳۴] گراف نامیده و آن را با $e(G)$ نمایش می دهند.

تعریف ۴۱.۱.۱. *تعداد رئوس یک گراف را مرتبه[۳۵] گراف نامیده و آن را با نماد $n(G)$ نمایش می دهند.*

قضیه ۴۲.۱.۱. فرض کنید G گرافی بی طوقه و فاقد رأس تنها باشد ، اگر G حداقل سه رأس داشته باشد ، آنگاه G ، ۲–همبند است اگر و تنها اگر برای هر دو یال متمایز G ، دوری از G شامل هر دو یال وجود داشته باشد.

---

[۳۰] Tree

[۳۱] Subgraph Spanning

[۳۲] Tree Spanning

[۳۳] Union

[۳۴] Size

[۳۵] Order

برهان. رجوع شود به [۱۱] ، قضیه ۱.۱.۴ . □

تعریف ۴۳.۱.۱. اگر e یک یال از گراف ۲− همبند G باشد و $G-e$ ، ۲− همبند نباشد، آنگاه e را یک یال اساسی G می نامند.

تعریف ۴۴.۱.۱. یک گذر بسته را یک مدار گویند.

تعریف ۴۵.۱.۱. یک مدار اویلری [۳۶] در گراف G گذر بسته ای است که شامل هر یال G باشد در واقع یک مدار اویلری گذر بسته ای است که در آن هر یال G دقیقا یک بار مشاهده می شود.

تعریف ۴۶.۱.۱. گراف G را یک گراف اویلری [۳۷] گویند اگر دارای یک گذر بسته اویلری باشد.

قضیه ۴۷.۱.۱. گراف G اویلری است اگر و تنها اگر شامل حداکثر یک مؤلفه غیر بدیهی باشد و هر رأس آن زوج باشد.

برهان. رجوع شود به [۱۱] ، قضیه ۲۶.۲.۱ . □

تعریف ۴۸.۱.۱. دوری در گراف G که شامل همه ی یالهای G باشد را دور اویلری [۳۸] گویند .

قضیه ۴۹.۱.۱. فرض کنید G یک گراف همبند باشد در این صورت گزاره های زیر معادلند:

۱) G یک گراف اویلری است.

۲) مجموعه یال های G به صورت اجتماع جدا از هم از دور های G است.

۳) هر یال G به تعداد فرد از دورهای G تعلق دارد.

۴) درجه هر رأس G عددی زوج است .

[۳۶] Eulerian

[۳۷] Eulerian graph

[۳۸] Eulerian circuit

برهان. رجوع شود به [۱۱] ، قضیه ۲.۴.۲ □

۲.۱ متروید

تعریف ۱.۲.۱. مترویدِ [۳۹] *ی مانند M زوج مرتب $M = (S, \mathcal{I})$ است که در آن S یک مجموعه‌ی متناهی و $\mathcal{I}$ گردایه ای متناهی از زیر مجموعه‌های S می باشد که در سه شرط زیر صدق می‌کند:*

$\emptyset \in \mathcal{I}$ (I۱

(I۲ *اگر* $X \in \mathcal{I}$ *و* $Y \subseteq X$ *، آنگاه* $Y \in \mathcal{I}$

(I۳ *اگر* $X, Y \in \mathcal{I}$ *و* $|X| < |Y|$ *، آنگاه عضوی مثل* $x \in X - Y$ *وجود دارد که* $Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

اگر $M = (S, \mathcal{I})$ یک متروید باشد، آنگاه M را یک متروید روی S و S را مجموعه زمینه [۴۰] متروید M گویند. اعضای $\mathcal{I}$ را *مجموعه های مستقل* [۴۱] M می‌نامند.

گزاره ۲.۲.۱. فرض کنید S مجموعه‌ای از بردارها باشد، همچنین فرض نمایید $\mathcal{I}$ مجموعه‌ی تمامی زیرمجموعه های مستقل خطی S باشد، در این صورت زوج $(S, \mathcal{I})$ یک متروید است.

برهان. رجوع شود به [۵] ، گزاره‌ی ۱.۱.۱ . □

مترویدِ حاصل را یک مترویدِ برداری گویند و با $M[A]$ نشان می‌دهند.

---

[۳۹] Matroid

[۴۰] ground set

[۴۱] independent set

تعریف ۳.۲.۱. هر زیر مجموعه‌ی وابسته‌ی مینیمال متروید M را یک دور [۴۲] آن گویند. مجموعه‌ی تمامی دورهای متروید M را با $\mathcal{C}(M)$ یا $\mathcal{C}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید M یک متروید باشد در این صورت:

(۱) یک دور M را که شامل n عضو باشد، یک $n-$ دور گویند.

(۲) یک ۳− دور متروید M ، یعنی یک دور سه عضوی را یک مثلث[۴۳] می نامند.

(۳) اگر $\mathcal{I}(M)$ یعنی گردایه مجموعه های مستقل یک متروید معلوم باشد، آنگاه می توان $\mathcal{C}(M)$ یعنی گردایه ی دورهای M را نیز مشخص کرد. برعکس با معلوم بودن $\mathcal{C}(M)$ می توان اعضای $\mathcal{I}(M)$ را مشخص کرد. اعضای $\mathcal{I}(M)$ آن زیر مجموعه های M هستند که هیچ عضو از $\mathcal{C}(M)$ را شامل نباشند.

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه های مجموعه‌ی S باشد. در این صورت $\mathcal{C}$ گردایه‌ی دورهای یک متروید روی S است، اگر و تنها اگر $\mathcal{C}$ در شرایط زیر صدق کند:

($C1$) $\emptyset \notin \mathcal{C}$

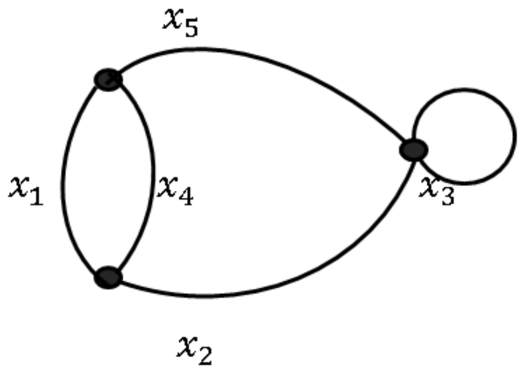
($C2$) *اگر C_1 و C_2 عناصری از $\mathcal{C}$ باشند و $C_1 \subseteq C_2$ ، آنگاه $C_1 = C_2$*

($C3$) *اگر C_1 و C_2 عناصر متمایزی از $\mathcal{C}$ باشند و $x \in C_1 \cap C_2$ ، آنگاه عضوی از $\mathcal{C}$ مانند C_3 چنان موجود است که $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - x$*

برهان. رجوع شود به [۵] ، نتیجه ۵.۱.۱ . □

circuit[۴۲]

Triangle[۴۳]



شکل ۲.۱: گراف G که $M(G)$ با $M[A]$ از مثال ۹.۲.۱ یکریخت است.

گزاره ۶.۲.۱. فرض کنید S مجموعه یال‌های گراف G و $\mathcal{C}$ مجموعه تمامی دورهای G باشد، در اینصورت $\mathcal{C}$ گردایه دورهای یک متروید روی S است.

برهان. رجوع شود به [۵] ، گزاره ۷.۱.۱ . $\square$

این متروید را با $M(G)$ نشان می‌دهند، و آن را *متروید دوری* [۴۴] گراف G گویند.

تعریف ۷.۲.۱. دو متروید $M_۱$ و $M_۲$ را یکریخت گویند و می‌نویسند $M_۱ \cong M_۲$ هرگاه نگاشت دوسویی مانند $\psi : S(M_۱) \to S(M_۲)$ چنان موجود باشد که برای هر $X \subseteq S(M_۱)$ ، $\psi(X)$ در $M_۲$ مستقل باشد، اگر وتنها اگر X در $M_۱$ مستقل باشد.

مثال ۸.۲.۱. فرض کنید G گراف نشان داده شده در شکل ۳.۱ باشد، متروید دوری حاصل از این گراف، متروید $M = M(G)$با مجموعه زمینه‌ی $S = \{x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵\}$

$$\mathcal{C} = \{\{x_۳\}, \{x_۱, x_۴\}, \{x_۱, x_۲, x_۵\}, \{x_۴, x_۲, x_۵\}\}$$

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{x_۱\}, \{x_۲\}, \{x_۴\}, \{x_۵\}, \{x_۱, x_۲\}, \{x_۱, x_۵\}, \{x_۲, x_۵\}, \{x_۲, x_۴\}, \{x_۴, x_۵\}\}$$

می‌باشد.

cycle matriod[۴۴]

مثال ۹.۲.۱. فرض کنید

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{array} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \end{array}$$

و $S' = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ مجموعه بردارهای ستونی ماتریس A باشد، در این صورت

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{۱\}, \{۲\}, \{۴\}, \{۵\}, \{۱,۲\}, \{۱,۵\}, \{۲,۴\}, \{۲,۵\}, \{۴,۵\}\}$$

و $M' = (S', \mathcal{I})$ یک مترويد است. گردایه‌ی مجموعه‌های وابسته‌ی این مترويد عبارتند از:

$$\{\{۳\}, \{۱,۳\}, \{۱,۴\}, \{۲,۳\}, \{۳,۴\}, \{۳,۵\}\} \cup \{X \subseteq S : |X| \geq ۳\}$$

گردایه‌ی تمامی مجموعه‌های وابسته‌ی مینیمال این مترويد عبارتند از:

$$\{\{۳\}, \{۱,۴\}, \{۱,۲,۵\}, \{۲,۴,۵\}\}$$

مثال ۱۰.۲.۱. با توجه به مثالهای ۸.۲.۱ و ۹.۲.۱ می توان یک تناظر یک به یک بین S وS' به صورت $\psi : S(M) \rightarrow S'(M')$ تعریف نمود، می توان مشاهده کرد که تناظر یک به یکی به شرح زیر وجود دارد :

$\psi(x_۱) = ۱$ و $\psi(x_۲) = ۲$ و $\psi(x_۳) = ۳$ و $\psi(x_۴) = ۴$ و $\psi(x_۵) = ۵$

این تناظر یک به یک مجموعه های وابسته (مستقل) را به مجموعه های وابسته (مستقل) مجموعه های مینیمال (ماکسیمال) را به مجموعه های مینیمال (ماکسیمال) می برد.

تعریف ۱۱.۲.۱. عضو e از مترويد M را یک طوقه گویند هرگاه $\{e\}$ یک دور M باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. اگر e وf دو عضو متمایز مترويدM باشند و $\{e,f\}$ یک دور M باشد، آنگاه e و f را دو عضو موازی M گویند.

تعریف ۱.۲.۱۳. یک *کلاس موازی* [۴۵] از M زیرمجموعه‌ی ماکسیمال X از $S(M)$ است که هر دو عضو آن موازیند و هیچ عضو آن یک طوقه نمی‌باشد. یک کلاس موازی را *بدیهی* [۴۶] گویند، هرگاه شامل تنها یک عضو باشد.

تعریف ۱.۲.۱۴. اگر متروید M فاقد طوقه باشد و هیچ کلاس موازی غیر بدیهی نداشته باشد، آنگاه آن را یک *متروید ساده* [۴۷] گویند.

تعریف ۱.۲.۱۵. یک مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال متروید M را یک *پایه* [۴۸] M گویند. گردایه‌ی همه‌ی پایه‌های M را با $\mathcal{B}(M)$ یا $\mathcal{B}$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱.۲.۱۶. فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه های مجموعه‌ی X باشد. در اینصورت $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از پایه‌های یک متروید روی S است، اگر و تنها اگر $\mathcal{B}$ در این شرایط صدق کند:

($B1$) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

($B2$) هرگاه B_1 و B_2 عناصری از $\mathcal{B}$ باشند و $x \in B_1 - B_2$ ، آنگاه عضوی مانند $y \in B_2 - B_1$ وجود داشته باشد بطوری که: $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$

برهان. رجوع شود به [۵] ، نتیجه ۱.۲.۵ .

□

نتیجه ۱.۲.۱۷. فرض کنید B یک پایه متروید M باشد. در این صورت برای هر $x \in (S - B)$ ،

[۴۵] parallel class

[۴۶] trivial

[۴۷] simple matroid

[۴۸] basis

$B\cup x$ شامل دوری یکتاست. این دور را با $C(x,B)$ نمایش می دهند و آن را دور اصلی [۴۹] x وابسته به پایه B می گویند.همچنین همه‌ی پایه‌های M دارای اندازه‌ی یکسانند.

برهان. رجوع شود به [۵] ، نتیجه۶.۲.۱ . $\square$

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنید S یک مجموعه‌ی n عضوی و $\mathcal{B}$ گردایه‌ی تمامی زیرمجموعه های m عضوی S باشد که $n \geq m \geq 0$ ، در اینصورت $\mathcal{B}$ گردایه‌ی پایه‌های یک متروید روی S است که با $U_{m,n}$ نشان داده می‌شود که آن را *متروید یکنواخت* [۵۰] می نامند.

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنید $M=(S,\mathcal{I})$ یک متروید و $X\subseteq S$ باشد و $\mathcal{I}|X=\{I\subseteq X : I\in\mathcal{I}\}$ می توان دید که $(X,\mathcal{I}|X)$ یک متروید است. این متروید را تحدید[۵۱] M به X یا حذف $S-X$ از M گویند و با نماد $M|X$ یا $M\backslash S-X$ نمایش می دهند. همچنین متروید حاصل از *حذف* [۵۲] X را با $M\backslash X$ یا $M|S-X$نمایش می‌دهند. مجموعه های مستقل این متروید تمامی مجموعه های مستقل M هستند که زیرمجموعه‌ی $S-X$ می‌باشند به طوری که :

$$\mathcal{I}(M\backslash X)=\mathcal{I}(M|S-X)=\{I\in\mathcal{I} \mid I\subseteq S-X\}$$

$$\mathcal{C}(M\backslash X)=\{C\in\mathcal{C} \mid C\subseteq S-X\}$$

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید $M=(S,\mathcal{I})$ یک متروید و $X\subseteq S$ باشد، *رتبه* [۵۳]ی X در M را با $r_M(X)$ یا $r(X)$ نمایش داده و آن را تعداد اعضای یک پایه از متروید $M|X$ تعریف می کنند.

---

[۴۹] circuit Fundamental

[۵۰] uniform matroid

[۵۱] Resterict

[۵۲] deletion

[۵۳] rank