neskip=۱.۵cm

دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض ، گرایش توپولوژی

عنوان

مطالعه نقاط برش در فضاهای توپولوژی همبند

استاد راهنما

دکتر فریبرز آذرپناه

استاد مشاور

دکتر منیره پیمان

پژوهشگر

مریم ساعدی اصل

۱۳۹۲/۸/۲۱

نام خانوادگی دانشجو: ساعدی اصل نام: مریم

عنوان: مطالعه نقاط برش در فضاهای توپولوژی همبند

استاد راهنما: دکتر فریبرز آذرپناه
استاد مشاور: دکتر منیره پیمان

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: توپولوژی

دانشگاه: شهید چمران اهواز دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲/۸/۲۱ تعداد صفحات: ۷۳

واژگان کلیدی: نقاط برش، نقاط غیر برش، فضاهای همبند وفضاهای همبند موضعی فضاهای همبند ترتیبی همراه با نقاط انتهایی

چکیده

در مطالعه‌ی نقاط برش فضاهای توپولوژی همبند فرض می‌شوند. نقطه‌ی برش از یک فضا نقطه ای است که اگر آن را از فضا حذف کنیم، فضا ناهمبند شود. وقتی فضایی دارای نقاط غیر برش باشد، آن‌گاه مبحث نقاط برش اهمیت ویژه ای پیدا می‌کند. اگر یک فضا دارای حداقل دو نقطه‌ی غیر برش باشد، آن‌گاه می‌گوییم قضیه‌ی وجودی نقاط غیر برش برای آن برقرار است. این قضیه برای فضاهای همبندی مانند خط خالیمسکی و خط اعدد حقیقی برقرار نیست. این حقیقت باعث می‌شود به دنبال زیرکلاس‌هایی از فضاهای همبند باشیم که قضیه وجودی نقاط غیر برش برای تک تک اعضای آن برقرار باشد.

تقدیم به دل بزرگوار مادرم، آن که دیدنش
عشق و صبوری خدا را برایم تداعی می کند.

سپاس‌گزاری...

خدای مهربانم را سپاس می‌گویم برای تمام لطف و رحمت هایی که به من و عزیزانم ارزانی داشته، و برای وجود تمام انسان‌هایی که مصاحبت با آن‌ها کوتاه بود اما به من آموخت که هنوز هم دفتر عشق ومحبت باز است.

در پایان از دکتر آذر پناه استاد راهنمای بزرگوارم و خانم دکتر پیمان استاد مشاور دلسوزم و تمام کسانی که مرا در به سرانجام رساندن این رساله یاری کردند کمال تشکر را دارم.

مریم ساعدی اصل

۱۳۹۲/۸/۲۱

فهرست مطالب

پیشگفتار

خط اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) همانند خط خالیمسکی ($\mathbb{Z}$) که در رساله به آن اشاره شده، فضاهای توپولوژی همبندی هستند که حذف هر نقطه از آن‌ها فضا را به یک فضای ناهمبند تبدیل می‌کند. چنین نقاطی را نقاط برش می‌نامیم.
مفهوم نقاط برش نقش مهمی را در فضاهای توپولوژی همبند ایفا می‌کند. بررسی نقاط برش در فضاهای توپولوژی همبند به سال ۱۹۲۰ برمی‌گردد. اگر یک فضا دارای حداقل دو نقطه‌ی غیربرش باشد، آن‌گاه قضیه وجودی نقاط غیر برش برای آن برقرار می‌شود. پس واضح است که خط اعداد حقیقی و خط خالیمسکی در این قضیه صدق نمی‌کنند. بنابراین به جاست که به دنبال زیر کلاس‌هایی از فضاهای همبند باشیم که این قضیه برای تمامی اعضای آن برقرار باشد.
قضیه وجودی نقاط غیر برش برای فضاهای همبند، فشرده و هاسدورف در سال ۱۹۲۰ توسط مور[۱] به اثبات رسید. وای برن[۲] این قضیه را برای فضاهای همبند وفشرده‌ای که T_1 نیز هستند به اثبات رسانید.
ذکر این نکته الزامی است که با نگاهی به کاربردهای نقاط برش و این واقعیت که اغلب فضاهای توپولوژی همبندی که نقش مهمی را در مطالعه‌ی نقاط برش بازی می‌کنند مانند خط خالیمسکی، T_1 نیستند، می‌توان نتیجه گرفت که حذف اصول جداسازی تا حدی

[۱] $R.L.Moor$
[۲] $Whyburn$

ممکن است. به همین دلیل فضاهایی به نام $H(i)$ را معرفی می‌کنیم که مفهومی ضعیف‌تر از فشردگی دارند و هیچ‌گونه اصول جداسازی برای آن‌ها تعریف نشده است.

در این رساله ابتدا این فضا را از نقطه نظر قضیه وجودی نقاط غیر برش بررسی کرده و در ادامه به فضاهایی می‌رسیم که ما را در به ثمر رساندن هدف اصلی؛ یعنی، یافتن زیرکلاس‌هایی از فضا های توپولوژی همبند که این قضیه‌ی مهم برای تک تک اعضای آن‌ها برقرار است، یاری می‌رسانند.

فصل ۱
فصل اول

مقدمه

در این فصل تلاش شده تا به بیان مفاهیم بنیادی، تعاریف و قضایایی بپردازیم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بخش اول به بیان مفاهیمی در توپولوژی و در بخش دوم به معرفی چند فضا و قضایایی در رابطه با آن‌ها می‌پردازیم. اکثر تعاریف و قضایا را می‌توان در [۱] یافت.

۱.۱ مفاهیم بنیادی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه و $\mathcal{P}(X)$ خانواده‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های X باشد. گردایه‌ی $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ را یک توپولوژی روی X می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

الف) $\varnothing$ و X متعلق به $\mathcal{T}$ باشند.

ب) اشتراک هر دو عنصر $\mathcal{T}$ متعلق به $\mathcal{T}$ باشد.

پ) اجتماع هر تعداد از عناصر $\mathcal{T}$ متعلق به $\mathcal{T}$ باشد.

مجموعه‌ی X همراه با توپولوژی $\mathcal{T}$ را یک فضای توپولوژی نامیده و اغلب با $(X, \mathcal{T})$

نمایش داده می‌شود.

عناصر $\mathcal{T}$ را مجموعه‌های باز و زیرمجموعه‌ای از X که متمم آن متعلق به $\mathcal{T}$ باشد را بسته می‌نامیم.

مثال ۲.۱.۱. الف) اگر X یک مجموعه دل‌خواه و $\mathcal{T}_1$ گردایه همه زیر مجموعه‌های X باشد به عبارت دیگر $\mathcal{T}_1 = P(X)$ ، آن‌گاه $\mathcal{T}_1$ یک توپولوژی روی X خواهد بود که آن را توپولوژی گسسته می‌نامیم.

ب) اگر X یک مجموعه‌ی دلخواه و $\mathcal{T}_2 = \{X, \varnothing\}$ ، آن‌گاه $\mathcal{T}_2$ یک توپولوژی روی X خواهد بود که آن را توپولوژی بدیهی می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. گیریم $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژی باشد و $A \subseteq X$. $x \in X$ یک نقطه‌ی درونی A است، هرگاه $G \in \mathcal{T}$ موجود باشد که $x \in G \subseteq A$. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط درونی A را با A°نمایش داده و درون A می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژی و$A \subseteq X$. $x \in X$ را نقطه‌ی حدی A می‌نامیم هرگاه برای هر $G \in \mathcal{T}$ شامل x داشته باشیم $G \cap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing$. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط حدی A را با A' نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی $A \cup A'$ را بستار A می‌گوییم و آن را با $\overline{A}$ یا cl_X نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. گیریم $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژی باشد. $\beta \subseteq \mathcal{T}$ را یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ گوییم، هرگاه هر عنصر $\mathcal{T}$ را بتوان به صورت اجتمای از عناصر β نوشت. یا هرگاه برای هر $G \in \mathcal{T}$ و هر $x \in G$ عنصر $B \in \beta$ وجود داشته باشد که $x \in B \subseteq G$.

مثال ۶.۱.۱. الف) $\beta = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است. توپولوژی تولید شده روی $\mathbb{R}$ با پایه‌ی β، همان توپولوژی معمولی روی $\mathbb{R}$ است که توسط متریک قدرمطلق روی $\mathbb{R}$ به دست می‌آید.

ب) برای هر مجموعه X ، $\beta = \{\{x\} : x \in X\}$ یک پایه برای توپولوژی گسسته است.

در ادامه به قضایایی در رابطه با پایه‌ی یک توپولوژی می‌پردازیم.

قضیه ۷.۱.۱. *هرگاه $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژی و $\beta \subseteq \mathcal{T}$ یک پایه برای $\mathcal{T}$ باشد، آن‌گاه شرایط زیر برقرارند:*

الف) X اجتماعی از عناصر β است.

ب) اگر $B, B' \in \beta$ ، آن گاه $B \bigcap B'$ اجتماعی از عناصر β است.

برهان. به [۱] مراجعه شود.

□

قضیه ۸.۱.۱. *اگر β پایه یک توپولوژی روی X باشد،آن‌گاه توپولوژی تولید شده به وسیله β عبارت است از $\mathcal{T} = \{A : A = \cup B_\alpha, B_\alpha \in \beta, \forall \alpha \in I\}$*

برهان. به [۱] مراجعه شود.

□

تعریف ۹.۱.۱. هرگاه $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژی باشد و $Y \subseteq X$. Y با توپولوژی نسبی $\mathcal{T}_Y = \{U \bigcap Y : U \in \mathcal{T}\}$ را زیرفضای X می‌نامیم.

قضیه ۱۰.۱.۱. *اگر β یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ روی X باشد، آن‌گاه گردایه*

$$\beta_Y = \{B \cap Y : B \in \beta\}$$

پایه‌ای برای توپولوژی زیرفضایی $\mathcal{T}_Y$ روی Y می‌باشد.

برهان. به [۱] مراجعه شود.

□

قضیه ۱۱.۱.۱. *فرض کنیم Y زیر فضایی از X باشد و $A \subseteq Y$. اگر $\overline{A}$ بستار A در X باشد، آن‌گاه بستار A در Y به صورت $\overline{A} \cap Y$ خواهد بود.*

برهان. به [۱] مراجعه شود.

□

تعریف ۱۲.۱.۱. دو فضای X و Y را همسان ریخت گوییم، هرگاه تابع پوشا و یک به یک $f : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد که توابع f و $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ هر دو پیوسته باشند. در این صورت می‌نویسیم $X \cong Y$ و f را یک همسان ریختی می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۱.۱. خواصی که تحت همسان‌ریختی پایا هستند، خواص توپولوژیکی نامیده می‌شوند.

تعریف ۱۴.۱.۱. خواصی از فضا که به زیرفضا منتقل می‌شوند، خواص موروثی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱. هرگاه X و Y دو فضای توپولوژی باشند، گوییم تابع $f : X \longrightarrow Y$ در $x_0 \in X$ پیوسته است، هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز V در Y و شامل $f(x_0)$ ، مجموعه‌ی باز U در X شامل x_0 وجود داشته باشد که $f(U) \subseteq V$.

۲.۱ معرفی چند فضا

در این بخش به تعریف فضاهایی می‌پردازیم که در ادامه به آن‌ها احتیاج پیدا خواهیم کرد.

تعریف ۱.۲.۱. فضای توپولوژی X را یک فضای T_1 می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ دو مجموعه‌ی باز G و H وجود داشته باشند که $x \in G, y \notin G$ و $x \notin H, y \in H$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و x و y دو عضو متمایز از X باشند. هرگاه مجموعه‌های باز و مجزای G و H در X وجود داشته باشند که $x \in G$ و $y \in H$، فضای X را هاسدورف($T_۲$) می‌خوانیم.

تذکر ۳.۲.۱. *هر فضای $T_۲$ یک فضای $T_۱$ است.*

مثال ۴.۲.۱. فضای $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی یک فضای $T_۲$ است.

تعریف ۵.۲.۱. فضای توپولوژی X را منظم گوییم، هرگاه برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی $F \subseteq X$ و برای هر $x \notin F$ ، دو مجموعه‌ی باز ومجزای G و H در X وجود داشته باشد که $x \in G$ و $F \subseteq H$.

تعریف ۶.۲.۱. فضای توپولوژی X را کاملاً منظم گوییم، هرگاه برای هر مجموعه‌ی A در X و هر $x \in X \backslash A$، تابع پیوسته‌ی $f : X \longrightarrow [۰, ۱]$ موجود باشد که $f(x) = \{۰\}$ و $f(A) = \{۱\}$.

تذکر ۷.۲.۱. *هر فضای کاملاً منظم، یک فضای منظم است.*

تعریف ۸.۲.۱. فضای توپولوژی X را فشرده گوییم، هرگاه هر پوشش باز آن دارای یک زیرپوشش متناهی باشد.

قضیه ۹.۲.۱. *هر مجموعه‌ی بسته در یک فضای فشرده، فشرده است.*

برهان. به [۱] مراجعه شود.

□

قضیه ۱۰.۲.۱. *هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی یک فضای هاسدورف، بسته است.*

برهان. به [۱] مراجعه شود.

□

حال وقت آن رسیده است به تعریف فضایی بپردازیم که در این رساله از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

تعریف ۱.۲.۱۱. هرگاه دو زیرمجموعه‌ی باز ناتهی و مجزای G و H در X موجود باشند به طوری که

الف) $G \neq \varnothing$ و $H \neq \varnothing$،

ب) $G \cap \overline{H} = \varnothing$ و $H \cap \overline{G} = \varnothing$،

ج) $G \cup H = X$،

آن‌گاه فضای X را ناهمبند می‌نامیم. درصورتی که فضای X ناهمبند نباشد، آن را همبند می‌خوانیم.

مثال ۱.۲.۱۲. فرض کنیم $X = [۱, ۲] \cup [۳, ۴] \subseteq \mathbb{R}$ در این صورت X ناهمبند است. زیرا

$$A = X \cap (\frac{۵}{۲}, \frac{۹}{۴}) = [۳, ۴] \text{ و } B = X \cap (\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲}) = [۱, ۲]$$

در X باز و غیر تهی هستند است. و به علاوه، $A \cup B = X$ و $A \cap B = \varnothing$ ؛ یعنی، A و B یک جداساز از X هستند.

قضیه ۱.۲.۱۳. *فضای X همبند است، اگر و فقط اگر تنها زیر مجموعه‌های X که هم باز و هم بسته اند، مجموعه‌ی تهی وخود X می‌باشد.*

برهان. اگر A یک زیر مجموعه‌ی سره‌ی X باشد که هم باز وهم بسته است، آن‌گاه A و $X \backslash A$ برای X تشکیل یک زوج ناهمبندی می‌دهند چرا که

$$A \cap (X \backslash A) = \varnothing \text{ و } A \cup (X \backslash A) = X$$

برعکس: اگر U و V برای X تشکیل یک زوج ناهمبندی بدهند، آن‌گاه داریم: $U \cup V = X$ و $U \cap V = \varnothing$ که نتیجه می‌دهند $U = X \backslash V$ و $V = X \backslash U$ واین بدین معناست که U و V

هر دو باز وبسته و ناتهی اند و در ضمن با X برابر نیستند که این با فرض در تناقض است.

□

در ادامه به بیان قضایایی در رابطه با فضاهای همبند می‌پردازیم.

قضیه ۱۴.۲.۱. *هرگاه فضای X توسط دو مجموعه‌ی باز ناتهی و مجزای G و H ناهمبند شده باشد و $E \subseteq X$ همبند باشد، آن‌گاه $E \subseteq G$ یا $E \subseteq H$.*

برهان. به [۱] مراجعه شود.

□

تذکر ۱۵.۲.۱. *فشردگی و همبندی ازخواص توپولوژیکی هستند.*

تذکر ۱۶.۲.۱. *ویژگی همبندی موروثی نیست. برای مثال $Y = (0,1)\bigcup(1,2)$ به عنوان زیرفضای $\mathbb{R}$ ناهمبند است، در حالی که $\mathbb{R}$ همبند می‌باشد.*

قضیه ۱۷.۲.۱. *تصویر هر فضای همبند تحت یک تابع پیوسته، همبند است.*

برهان. به [۱] مراجعه شود.

□

قضیه ۱۸.۲.۱. *فرض کنیم X یک فضای توپولوژی بوده و برای هر $\alpha \in S$، $A_\alpha \subseteq X$ همبند باشد. اگر $\bigcap\limits_{\alpha\in S} A_\alpha \neq \varnothing$، آن‌گاه $\bigcup\limits_{\alpha\in S} A_\alpha$ در X همبند می‌باشد.*

برهان. به [۱] رجوع شود.

□

قضیه ۱۹.۲.۱. *هرگاه H_n دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های همبند فضای X باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $H_n \bigcap H_{n+1} \neq \varnothing$، آن‌گاه $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$ نیز همبند می‌باشد.*

برهان. به [۲] رجوع شود.

□

قضیه ۲۰.۲.۱. *فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و برای هر $\alpha \in S$، $A_\alpha \subseteq X$ دوبه دو از هم جدا و همبند باشند. گیریم به ازای هر اندیس $\alpha \neq \beta$ داشته باشیم $\overline{A_\alpha} \bigcap A_\beta \neq \varnothing$ یا $\overline{A_\beta} \bigcap A_\alpha \neq \varnothing$. در این صورت مجموعه‌ی $\bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$ همبند خواهد بود.*

برهان. به [۲] رجوع شود.

□

تعریف ۲۱.۲.۱. گیریم X یک فضای توپولوژی باشد. برای هر $x \in X$ بزرگ‌ترین مجموعه‌ی همبند شامل x را با C_x نمایش داده و مولفه‌ی نقطه‌ی x می‌نامیم.

تذکر ۲۲.۲.۱. *در تعریف مولفه، واضح است که اگر $x \in X$ و A یک مجموعه‌ی همبند شامل x باشد، آن‌گاه $A \subseteq C_x$. اگر $x, y \in X$ و $x \neq y$ داریم $C_x \bigcap C_y \neq \varnothing$، آن‌گاه طبق قضیه‌ی ۱۳.۲.۱، $C_x \bigcup C_y$ مجموعه‌ای همبند شامل x و y است. بنابراین $C_x \bigcup C_y \subseteq C_x$ و $C_x \bigcup C_y \subseteq C_y$ و در نتیجه $C_x = C_y$. به این ترتیب برای هر دو عنصر متمایز $x, y \in X$ داریم $C_x \bigcap C_y = \varnothing$ یا $C_x = C_y$.*

مثال ۲۳.۲.۱. در $\mathbb{Q}$ با توپولوژی معمولی، مولفه‌ها تک عنصری هستند؛ یعنی، برای هر $r \in \mathbb{Q}$ داریم $C_r = \{r\}$. زیرا مجموعه های با بیش از یک عضو در $\mathbb{Q}$ ناهمبندند. برای این منظور اگر مجموعه‌ی $\{a, b\} \subseteq \mathbb{Q}$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه می‌توان دو مجموعه باز و مجزا در $\mathbb{Q}$ یافت که $\{a, b\}$ را بصورت اجتماعی از آن دو نوشت. مجموعه های با بیش از دو عضو نیز ناهمبندند. زیرا در غیر این صورت این مجموعه ها باید ناشمارا باشند در حالی که این‌چنین نیست.

حال اگر $\mathbb{R}$ را در نظر بگیریم، از آن‌جایی که $\mathbb{R}$ همبند است برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $C_x = \mathbb{R}$.

قضیه ۲۴.۲.۱. *گیریم X یک فضای توپولوژی باشد. برای هر $x \in X$، C_x در X بسته است.*

برهان. به [۱] مراجعه شود.

□

تعریف ۲۵.۲.۱. فضای X را موضعا همبند می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی باز G در X شامل x ، مجموعه‌ی باز و همبند U در X وجود داشته باشد که $x \in U \subseteq G$.

مثال ۲۶.۲.۱. $X = [۰, ۱) \cup (۱, ۲]$ موضعا همبند است اما همبند نیست.

مثال ۲۷.۲.۱. X را به عنوان زیرفضای $\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : ۰ \leqslant x \leqslant ۱, y = \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(۱, ۰)\}$$

اگر قرار دهیم $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : ۰ \leqslant x \leqslant ۱, y = \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}\}$، آن‌گاه هر دو عنصر A توسط یک مسیر به هم متصل می‌شوند، از این رو A همبند است. از طرفی، نقطه‌ی $(۱, ۰)$ یک نقطه‌ی حدی برای A است، از این رو $\overline{A} = X$ و بنابراین فضای X همبند است. ولی فضای X همبند موضعی نیست.

در ادامه لازم است به تذکر و قضیه‌ای اشاره کنیم که در اثبات بعضی از قضایا از آن بسیار استفاده شده است.

تذکر ۲۸.۲.۱. *هرگاه S و T زیرمجموعه های $\mathbb{R}^n$ باشند، نشان می‌دهیم $\overline{S \bigcap T} \subseteq \overline{S} \bigcap \overline{T}$ و اگر S باز باشد، $S \bigcap \overline{T} \subseteq \overline{S \bigcap T}$*

برهان. واضح است که $\overline{S \bigcap T} \subseteq \overline{T}$ و $\overline{S \bigcap T} \subseteq \overline{S}$ پس $\overline{S \bigcap T} \subseteq \overline{S} \bigcap \overline{T}$. حال فرض کنیم S باز باشد و $x \notin \overline{S \bigcap T}$ نشان می‌دهیم $x \notin S \bigcap \overline{T}$. در واقع نشان می‌دهیم هیچ

عضوی از S در $\overline{T}$ نیست. پس اگر $x \in S$، داریم $N_{r_1} \subseteq S$. از طرفی $x \notin \overline{S \bigcap T}$ پس $N_{r_2} \bigcap (S \bigcap T)$. قرار می‌دهیم $r = min\{r_1, r_2\}$ بنابراین $N_r(x) \bigcap T = \varnothing$ و در نتیجه، $x \notin \overline{T}$ پس $x \notin S \bigcap \overline{T}$.

$\square$

قضیه ۲۹.۲.۱. (*اصل ماکسیمال هاسدورف*)*:فرض کنیم* Λ ، *مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های کلا مرتب یک مجموعه مرتب X باشد که با شمول $\subseteq$ مرتب شده است، آن‌گاه $(\Lambda, \subseteq)$ عنصر ماکسیمال دارد.*

فصل ۲

نقاط برش و فضاهای توپولوژیک همبند $H(i)$

مقدمه

در این فصل ابتدا نقاط برش و فضاهای نقاط برش را معرفی کرده و به ارائه‌ی چند مثال از آن‌ها می‌پردازیم. در ادامه فضایی به نام $H(i)$ را تعریف کرده و این فضا را از نقطه نظر نقاط برش بررسی می‌کنیم و در واقع به این سوال پاسخ می‌دهیم که آیا«قضیه وجودی نقاط غیر برش برای این فضا برقرار است؟». با پاسخ به سوال فوق به فضاهایی با نام فضاهای همبند ترتیبی برخورد می‌کنیم که بعد از معرفی، آن فضاها را نیز از دیدگاه نقاط برش بررسی می‌نماییم.

۱.۲ نقاط برش و فضاهای نقاط برش

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی همبند باشد. نقطه‌ی $x \in X$ را نقطه‌ی برش X گوییم، هرگاه فضای توپولوژیک $X \backslash \{x\}$ (با توپولوژی زیرفضایی) ناهمبند باشد. اگر x نقطه‌ی برش نباشد آن را نقطه‌ی نابرش X می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط برش X را با CtX نمایش می‌دهیم.