بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم سهیلا عوضی‌پور** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی **۹۰۵۲۰۵۱۰۲۱** تحت عنوان: «**رادیکال ودربرن حلقه‌های چندجمله‌ای اریب**» را در تاریخ ۱۳۹۲/۶/۲۰ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر علی رجایی	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر سیدحمید حاج‌سیدجوادی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر علی رجایی	استادیار	

ایین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلا به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۱۳۹۲ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار ~~خانم~~/جناب آقای دکتر سید احمد موسوی ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر — و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر — از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب سهیلا عوض‌پور دانشجوی رشته ریاضی جبر ناجابه‌جایی مقطع ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: سهیلا عوض‌پور

تاریخ و امضا: ۹۲/۹/۲۴

اپین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش‌اموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درامدهای حاصل از انها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید اورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌اموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا اثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس ائین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این اپین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیات رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب سهیلا عوضی‌پور دانشجوی رشته ریاضی محض ورودی سال تحصیلی ۹۰ مقطع ارشد دانشکده ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در ائین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد ائین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر ان به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمنا نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس براورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۹۹/۶/۲۴

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد گروه ریاضی محض

رادیکال ودربرن حلقه های چندجمله ای اریب

نگارنده
سهیلا عوضی پور

استاد راهنما
دکتر سیداحمد موسوی

شهریور ماه ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر مهربانم

و مادر عزیزم.

خداوندا...

جز به فضل و احسان تو دل نبسته ام. هر چه کرده ام به لطف و کرم و جود و بخشش تو بوده است. هر حسنی که در آن است از آن توست و هر کمی و کاستی برخاسته از ضعف و ناتوانی من. تو را حمد و سپاس.

راز و رمز پویای علم و کشف معانی بدیع و تجلی جلوه های شهودی معرفت کیمیایی است که آسمان علم به برکت سیما و سیره ی نورانی نبی مکرم صلی الله علیه و آله و سلم، انسان در بند خاک را به معراج حضور می خواند. و چه خرم علمی که از چشمه ی معارف سیراب شود و چه زیبا دانشی که قبای پرنیانش به عطر و بوی گلستان محمدی معطر شود و چه معماری باشکوهی، بنایی که سنگ هویت و فرهنگ آن ریشه در مدینة النبی بیابد. و امروز کاخ آباد علم به سروش معنوی و مفهوم پیام او بیش از پیش محتاج راهنمایانی است که علاوه بر حفظ آبادانی آن در راه اعتلای آن به فرزندان خویش محبت نمایند.

وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر سید احمد موسوی که بسیار مهربان و صبور در طول انجام این پایان نامه همواره راهنمایی موثری داشتند کمال تشکر و سپاسگزاری بنمایم. همچنین از اساتید محترمی که زحمت داوری پایان نامه اینجانب را به دوش کشیدند کمال تشکر را دارم.

سهیلا عوضی پور

چکیده

در این پایان نامه ابتدا رادیکال σ- ودربرن و رادیکال σ- لویتسکی یک حلقه R را معرفی می کنیم، که σ یک خودریختی روی R است. با استفاده از خواص این رادیکال ها، رادیکال ودربرن و رادیکال لویتسکی حلقه چندجمله ای اریب $R[x;\sigma]$ و حلقه چندجمله ای لوران اریب $R[x,x^{-1};\sigma]$ را بررسی می کنیم. سپس رادیکال پوچ بالایی $R[x;\sigma]$ و $R[x,x^{-1};\sigma]$ را با استفاده از رادیکال σ- پوچ بالایی حلقه R مشخص می کنیم.

واژگان کلیدی: حلقه چندجمله ای اریب، حلقه چندجمله ای لوران اریب، رادیکال σ- ودربرن، رادیکال σ- لویتسکی، رادیکال σ- پوچ بالایی.

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان نامه R حلقه ای یکدار و شرکت پذیر و σ یک خودریختی از R می باشد، مگر آنکه موارد خلاف ان تصریح شود. فرض کنیم

$W(R)$=رادیکال ودربرن،

$P(R)$=رادیکال اول،

$L(R)$=رادیکال لویتسکی،

$N(R)$=رادیکال پوچ بالایی،

$J(R)$=رادیکال جیکوبسن باشد.

$\mathbb{Z}$ را به عنوان حلقه اعدادصحیح درنظرمی گیریم. آنالیز رادیکال اول حلقه های چندجمله ای اریب برای نخستین بار توسط پیرسن [۱] و استفنسن [۲] انجام شد. آنها نشان دادند

$$P(R[x;\sigma]) = P(R) \cap P_\sigma(R)) + P_\sigma(R)xR[x;\sigma],$$

که $P_\sigma(R)$ رادیکال σ– اول حلقه R است. برای رادیکال جیکوبسن حلقه چندجمله ای اریب، بدی[۳] و رم [۴] در [۱] نشان دادند

$$J(R[x;\sigma]) = (I \cap J(R)) + IxR[x;\sigma]$$

[۱] Pearson

[۲] Stephenson

[۳] Bedi

[۴] Ram

به علاوه اگر σ از مرتبه به طور موضعی متناهی باشد آنگاه $J(R[x;\sigma]) = I[x;\sigma]$ که

$$I = \{r \in R | rx \in J(R[x;\sigma])\}$$

از طرف دیگر در [۱۲]،پیرسن، استفنسن و وترز [۱] رادیکال های دیگری چون رادیکال σ- پوچ، رادیکال σ- جیکوبسن، رادیکال σ- کلین فلد [۲] و رادیکال σ- براون مک کی [۳] را معرفی کردند ونشان دادند که $R([x;\sigma])$ یک حلقه σ- جیکوبسن است اگر و فقط اگر R یک حلقه σ- جیکوبسن باشد. مفهومی که از رادیکال σ- پوچ بالایی در [۸]، معرفی شده شبیه مفهومی است که در [۱۲]، گفته شده است. در ادامه بحث رادیکال حلقه های چندجمله ای اریب در این پایان نامه، ابتدا σ- رادیکال های دیگری را معرفی می کنیم و سپس با رادیکال لویتسکی و رادیکال ودربرن حلقه ها مقایسه می کنیم. با استفاده از خواص این رادیکال ها، رادیکال ودربرن، رادیکال لویتسکی و رادیکال پوچ بالایی $R([x;\sigma])$ و $R([x,x^{-1};\sigma])$ را مطالعه می کنیم. در فصل اول تعاریف رادیکال σ- ودربرن، رادیکال σ- لویتسکی و ایده آل های وابسته اورده شده است. در فصل دوم σ- رادیکال هایی از $R[X]$ که توسط σ- رادیکال هایی از R القا می شوند را مورد مطالعه قرار می دهیم. در فصل سوم رادیکال ودربرن، رادیکال لویتسکی و رادیکال پوچ بالایی $R([x;\sigma])$ و $R([x,x^{-1};\sigma])$ را با استفاده از رادیکال های σ- پوچ وابسته به R مشخص می کنیم. این پایان نامه برمبنای نتایج مقاله

C.Y. Hong, N.k. kim, Y. Lee, *Radicals of skew polynomial rings and skew Laurent polynomial rings*, J. Algebra 331 (2011) 428-448.

تنظیم شده است.

[۱] Watters

[۲] Kleinfeld

[۳] Brown-McCoy

فصل ۱

رادیکال القایی توسط یک خودریختی

باارائه یک سری تعاریف با هدف تعمیم تولید رادیکال های کلاسیک شروع می کنیم. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده آلی از R باشد.

اگر $I \subseteq \sigma(I)$ آنگاه I، σ- ایده آل نامیده می شود.

اگر $I = \sigma(I)$ آنگاه I، σ- پایا نامیده می شود.

تعاریف زیر از [۸] میباشد:

یک عنصر a از R σ- پوچتوان است اگر برای هر عدد صحیح $l \geq ۱$، یک عدد صحیح مثبت $m = m(l)$ وجود داشته باشد که

$$a\sigma^l(a)\sigma^{۲l}(a)...\sigma^{ml}(a) = ۰.$$

یک زیرمجموعه S از R، σ- پوچ نامیده می شود اگر هر عنصر در S، σ- پوچتوان باشد.

دیو [۱] در لم، لیری [۲] وماتک سوک [۳] در [۸]، $N_\sigma(R)$ را رادیکال σ- پوچ بالایی معرفی کردند که به صورت زیر تعریف می شود:

$$N_\sigma(R) = \sum\{I| \ \text{است} R \text{ از پوچ } \sigma\text{- آل ایده } \sigma\text{- } ,I\}$$

[۱] Due

[۲] Leroy

[۳] Matcsuk

یک زیرمجموعه S از R، σ-n- پوچ ($n \geq ۱$) نامیده می شود اگر هر عنصر در S، برای یک عدد صحیح $m \geq n$، σ^m- پوچتوان باشد.

پیرسن، استفنسن و وترز در [۱۲]، رادیکال σ پوچ R را به صورت زیر تعریف کردند: مجموع همه ایده آل های σ-n- پوچ σ- ثابت برای یک عدد صحیح $n \geq ۱$.
توجه داشته باشیم که رادیکال σ- پوچ بالایی معادل است با رادیکال σ- پوچ با استفاده از گزاره ۷.۳ از [۸].

σ- رادیکال‌های دیگری مشابه رادیکال ودربرن و رادیکال لویتسکی حلقه R را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.

۱. یک زیر مجموعه S از R، σ- پوچتوان نامیده می‌شود اکر برای هرعدد صحیح $l \geq ۱$، یک عدد صحیح مثبت $m = m(l)$ وجود داشته باشد که

$$S\sigma^l(S)\sigma^{۲l}(S)...\sigma^{ml}(S) = ۰.$$

۲. یک زیرمجموعه S از R، به طور موضعی σ- پوچتوان نامیده می شود اگرهر زیرمجموعه متناهی از S، σ- پوچتوان باشد.

۳. $W_\sigma(R)$ رادیکال σ- ودربرن حلقه R است که به صورت زیر معرفی می شود:

$$W_\sigma(R) = \sum\{I|\ \text{است}R\ \text{از}\ \text{پوچتوانی}\ \text{-}\sigma\ \text{ایده آل}\ \text{-}\sigma\ \text{،}I\}$$

۴. $L_\sigma(R)$ رادیکال σ- لویتسکی حلقه R است که به صورت زیر معرفی می شود:

$$L_\sigma(R) = \sum\{I\ |\ \text{است}R\ \text{از}\ \text{پوچتوانی}\ \text{-}\sigma\ \text{ایده آل به طور موضعی}\ \text{-}\sigma\ \text{،}I\}.$$

به عقیده پیرسن واستفنسن، یک σ- ایده آل سره p از R، σ- اول است اگر از $AB \subseteq P$ برای یک ایده آل A و یک σ- ایده آل B داشته باشیم $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$. هم چنین اگر P، σ- پایاباشد آنگاه P به طور قوی σ- اول نامیده می شود.

یک σ- ایده آل Q از R، σ- نیم اول نامیده می شود اگر برای هرایده آل A و یک عدد صحیح m که $A\sigma^n(A) \subseteq Q$ برای هر $n \geq m$، داشته باشیم $A \subseteq Q$.

به وضوح هر ایده آل σ- اول، σ- نیم اول است.

پیرسن و استفنسن هم چنین در [۱۱]، $P_\sigma(R)$ را رادیکال σ- اول حلقه R معرفی کردند که به صورت زیر تعریف می شود:

اشتراک همه ایده آل های به طور قوی σ- اول حلقه R.

لم ۲.۱. فرض کنیم P ایده آلی σ- پایا از R باشد. در این صورت موارد زیر معادلند:

۱. P، σ- اول است.

۲. برای $a, b \in R$ اگر برای یک عدد صحیح مثبت m، $aR\sigma^n(b) \subseteq P$ برای هر $n \geq m$ آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$ است.

۳. برای $a, b \in R$، اگر برای یک عدد صحیح m، $aR\sigma^n(b) \subseteq P$ برای هر $n \geq m$ آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$ است.

اثبات. کافیست نشان دهیم ۲ $\Leftarrow$ ۱. فرض کنیم P یک ایده آل σ- اول از R باشد. برای $a, b \in R$، فرض کنیم $aR\sigma^n(b) \subseteq P$ برای هرعدد صحیح $n \geq m$ که m یک عدد صحیح مثبت است. ایده آل $\sum_{n=m}^{\infty} R\sigma^n(b)R$ رادرنظر می گیریم که σ- ایده آلی از R است، زیرا

$$\begin{aligned}
\sigma\big(\sum_{n=m}^{\infty} R\sigma^n(b)R\big) &= \sum_{n=m}^{\infty} \sigma\big(R\sigma^n(b)R\big) \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} \sigma(R)\sigma^{n+۱}(b)\sigma(R) \\
&\subseteq \sum_{n=m}^{\infty} R\sigma^{n+۱}(b)R \\
&\subseteq \sum_{n=m}^{\infty} R\sigma^n(b)R
\end{aligned}$$

بعلاوه $(RaR)(\sum_{n=m}^{\infty} R\sigma^n(b)R) \subseteq P$. چون P، σ- اول است $a \in P$ یا $\sigma^n(b) \in P$ برای هر $n \geq m$ و چون P، σ- پایاست پس $a \in P$ یا $b \in P$ می باشد.

برعکس، فرض کنیم I و J ایده آل هایی از R باشند که J یک σ- ایده آل است و $IJ \subseteq P$. چون J، σ- ایده آل است برای هر $b \in J$، $\sigma^n(b) \in J$ برای هر عدد صحیح مثبت n، بنابراین برای هر $a \in I$،

است. با استفاده از فرض داریم $a \in P$ یا $b \in P$ و از اینرو $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$ می $aR\sigma^n(b) \subseteq IJ \subseteq P$
باشد. $\square$

تذکر ۳.۱. یک σ- ایده آل P از R، σ- نیم اول است اگر و تنها اگر برای $a \in R$، اگر برای یک عدد صحیح m، $aR\sigma^n(a) \subseteq P$ برای هر $n \geq m$ آنگاه $a \in P$ با استفاده از روش مشابه در اثبات لم ۲.۱.

تعریف ۴.۱. یک عنصر $a \in R$ به طور قوی σ- پوچتوان نامیده می شود اگر برای هر دنباله $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ از اعداد صحیح مثبت که $t_{n+1} \geq 1 + \sum_{i=0}^{n} t_i$ و برای هر دنباله $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ که $a_0 = a$ و $a_{n+1} \in a_n R\sigma^{t_n}(a_n)$ برای هر $n \geq 0$، یک عدد صحیح m وجود داشته باشد که $a_m = 0$ شود.

گزاره ۵.۱. داریم $P_\sigma(R) = \{a \in R \mid$ به طور قوی σ- پوچتوان است $a\}$ که $P_\sigma(R)$ یک ایده آل σ- پایای σ- پوچ از R است. هم چنین $P_\sigma(R)$ کوچکترین ایده آل σ- نیم اول از R است.

پیرسن، استفنسن و وترز نشان دادند $P_\sigma(R) \subseteq N_\sigma(R) \subseteq J_\sigma(R)$ که $J_\sigma(R)$ رادیکال σ- جیکوبسن است به معنای اشتراک همه ایده آل های σ- ابتدایی حلقه R، ما نشان خواهیم داد که

$$W_\sigma(R) \subseteq P_\sigma(R) \subseteq L_\sigma(R) \subseteq N_\sigma(R).$$

لم ۶.۱. ۱. فرض کنیم I یک σ- ایده آل از R باشد. آنگاه I، σ- پوچتوان است اگروتنها اگر برای هر عدد صحیح $l \geq 1$، یک عدد صحیح مثبت N باشد که

$$I\sigma^l(I)\sigma^{2l}(I)...\sigma^N(l)I = 0$$

در عمل در حالتی که $l = 1$ است N یک اندیس می باشد.

۲. اگر I و J، σ- ایده آل های σ- پوچتوانی از R باشند آنگاه $I + J$ نیز σ- پوچتوان است.

اثبات. ۱. فرض کنیم I، σ- پوچتوان است. بنابراین برای یک عدد صحیح مثبت $N \geq 1$،

$$I\sigma(I)\sigma^2(I)...\sigma^N(I) = 0.$$

چون I، σ- ایده آل است برای هر عدد صحیح $l \geq 1$،

$$I\sigma^l(I)\sigma^{2l}(I)...\sigma^{Nl}(I) \subseteq I\sigma(I)\sigma^2(I)...\sigma^N(I) = 0.$$

۲. با استفاده از (۱) برای هر عدد صحیح $l \geq 1$، اعداد صحیح مثبت N_1و N_2 وجود دارد که $I\sigma^l(I)...\sigma^{N_1 l}(I) = 0$ و $J\sigma^l(J)...\sigma^{N_2 l}(J) = 0$. قرار می دهیم $N = N_1 + N_2$، بنابراین

$$(I+J)\sigma^l(I+J)...\sigma^{Nl}(I+J) = I\sigma^l(I)...\sigma^{Nl}(I) + ... + J\sigma^l(J)...\sigma^{Nl}(J).$$

تعداد I یا J ای که هربار در معادله بالا اتفاق می افتد بزرگتر مساوی N_1 یابزرگتر مساوی N_2 است.
با توجه به این که I و J

σ- ایده آل اند، هر قسمت از معادله مشمول $I\sigma^l(I)...\sigma^{N_1 l}(I)$ یا $J\sigma^l(J)...\sigma^{N_2 l}(J)$ است، بنابراین $(I+J)\sigma^l(I+J)...\sigma^{Nl}(I+J) = 0$ پس $I+J$، σ- پوچتوان است.

□

گزاره ۷.۱. $W_\sigma(R) \subseteq P_\sigma(R)$.

اثبات. فرض کنیم $a \in W_\sigma(R)$ که $a \notin P_\sigma(R)$. بنابراین یک ایده آل σ- اول P وجود دارد که $a \notin P$. چون که $a \in W_\sigma(R)$، برای یک σ- ایده آل σ- پوچتوان I از R، $a \in I$. چون I، σ- پوچتوان است، برای هر عدد صحیح $l \geq 1$ ، یک عدد صحیح مثبت n وجود دارد که

$$I\sigma^l(I)\sigma^{2l}(I)...\sigma^{nl}(I) = \{0\} \subseteq P.$$

$I \not\subseteq P$ ، و چون P، σ- اول است پس $\sigma^l(I)\sigma^{2l}(I)...\sigma^{nl}(I) \subseteq P$. از انجا که P، σ- ثابت است، پس باید $I\sigma^l(I)\sigma^{2l}(I)...\sigma^{(n-1)l}(I) \subseteq P$. با ادامه دادن این روند به دست می آوریم، $a \in I \subseteq P$ ، که تناقض است. □

مثال زیر نشان می دهد که در حالت کلی برای یک خودریختی σ از R ، $W_\sigma(R) \not\subseteq P_\sigma(R)$.

مثال ۸.۱. فرض کنیم K یک میدان نامتناهی و $K[\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}]$ حلقه چندجمله ای روی K و

$$J = \langle \{t_{n_1}t_{n_2}t_{n_3} | n_3 - n_2 \geq (n_2 - n_1)^2\}\rangle$$

ایده آلی از $K[\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}]$ باشد، برطبق ساختاری که رم در [۱۳]، به ان اشاره کرده، R را به صورت زیر تعریف می کنیم $R = K[\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}]/J$. K– خودریختی σ از $K[\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}]$ که هر t_i را t_{i+1} می برد، یک خودریختی σ رویR القا می کند. فرض کنیم $I = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sigma^i(t_1)R$ و $f = \sum_{\text{متناهی}} t_{i_1}t_{i_2}...t_{i_{j_i}} \in I$ قرار می دهیم

$$D = \left\{ |i_u - i_v| \,\middle|\, i_u, i_v \text{اندیس هایی هستند که در تک جمله ای های } f \text{ ظاهر می شوند.} \right\}$$

و ماکسیمم D را k در نظر می گیریم. بنابراین برای هر عدد صحیح $l \geq 1$ داریم

$$f\sigma^l(f)f\sigma^2 l(f)...\sigma^{(k+l)^2(l)}(f) = 0.$$

عدد صحیح $l \geq 1$ را ثابت در نظر می گیریم. ادعا می کنیم f به طور قوی پوچتوان است. با استفاده از برهان خلف فرض کنیم f به طور قوی پوچتوان نیست، بنابراین $f \notin P_\sigma(R)$. قرار می دهیم $f = f_0$ بنابراین $f_0 \notin P$ برای یک ایده آل σ– اول P از R ، بنابراین با استفاده از تعریف یک عدد صحیح $s_0 \geq 1$ و $r_0 \in R$ وجود دارد که $f_0r_0\sigma^{s_0}(f_0) \notin P$. فرض کنیم $f_1 = f_0r_0\sigma^{s_0}(f_0)$، پس برای اعداد صحیح $r_1 \in R$ و $s_1 \geq 1 + s_0$، $f_2 = f_1r_1\sigma^{s_1}(f_1) \notin P$. بنابراین برای یک عدد صحیح $r_2 \in R$، داریم $f_2 = f_0\sigma^{s_0}(f_0)\sigma^{s_0+s_1}(f_0)r_2$. با ادامه دادن این روند دنباله $(f_m)_{m=0}^{\infty}$ در R و دنباله $(s_m)_{m=0}^{\infty}$ از اعداد صحیح مثبت را به دست می آوریم که $s_{m+1} \geq 1 + \sum_{i=0}^{\infty} s_i$ و $f_{m+1} = f_mr_m\sigma^{s_m}(f_m)$ که برای همه $m \geq 0$، $f_m \notin p$. بنابراین،

$$f_{m+1} = f_0\sigma^{s_0}(f_0)\sigma^{s_0+s_1}(f_0)...\sigma^{s_0+s_1+...+s_m}(f_0)r_{m+1} \notin P$$

برای برخی $r_{m+1} \in R$ که $m \geq 1$. اما این غیرممکن است زیرا یک عدد صحیحN وجود دارد که

$I \subseteq P_\sigma(R)$ و این نتیجه می دهد $(k+l)^۲l \geq \sum_{i-۰}^{N} s_i$. به وضوح I، σ- ایده آلی از R است، بنابراین $t_۱ \in P_\sigma(R)$. حال نشان می دهیم $I \not\subseteq W_\sigma(R)$. فرض کنیم $J = \sum_{i=۰}^{\infty} \sigma^i(t_۱)R \subseteq I$ و $t_۱ \in W_\sigma(R)$، بنابراین با استفاده از لم (۳.۱) برای عدد صحیح $k \geq ۱$، داریم

$$J\sigma^(J)\sigma^۲(J)...\sigma^k(J) = ۰$$

بنابراین

$$t_۱\sigma(t_k)\sigma^۲(t_{۲k})...\sigma^k(t_{k^۲}) = t_۱t_{k+۱}t_{۲k+۲}...t_{k^۲+k} = ۰$$

اما $k^۲ < k^۲ - ۱ = (k^۲+k) - (k+۱)$ که این تناقض است، بنابراین $t_۱ \notin W_\sigma(R)$.

با استفاده از لم زیر نشان خواهیم داد که $P_\sigma(R) \subseteq L_\sigma(R)$.

لم ۹.۱. ۱. فرض کنیم I و J ایده آل های به طور موضعی σ- پوچتوانی از R باشند که J یک σ- ایده آل است. آنگاه $I + J$ یک ایده آل به طور موضعی σ- پوچتوان از R است.

۲. فرض کنیم I و J ایده آل های راست به طور موضعی σ- پوچتوانی از R باشندکه $\sigma(I) \subseteq I$ و $\sigma(J) \subseteq J$. آنگاه RI و $I + J$ ، σ- ایده آل های به طور موضعی σ- پوچتوانی از R است.

۳. $L_\sigma(R)$ بزرگترین σ- ایده آل به طور موضعی σ- پوچتوان از R است.

اثبات. ۱. فرض کنیم $C = \{a_۱+b_۱, a_۲+b_۲, ..., a_n+b_n\}$ یک زیر مجموعه متناهی از $I+J$ باشدکه $a_i \in I$ و $b_j \in J$. فرض کنیم $A = \{a_۱, ..., a_n\}$ زیرمجموعه ای متناهی از I باشد. چون I به طور موضعی σ- پوچتوان است، برای هر عدد صحیح $l \geq ۱$، یک عدد صحیح مثبت $k = k(l)$ وجود دارد که $A\sigma^l(a)...\sigma^{kl}(a) = ۰$. از انجا که J یک σ- ایده آل است،

$$(a_{i_۱}+b_{i_۱})\sigma^l(a_{i_۲}+b_{i_۲})...\sigma^{kl}(a_{i_{k+۱}}+b_{i_{k+۱}}) = a_{i_۱}\sigma^l(a_{i_۲})...\sigma^{kl}(a_{i_{k+۱}}) + \alpha = \alpha$$

برای $\alpha \in J$ ، که $a_{i_j} \in A$ می باشد. فرض کنیم B مجموعه همه چنین α هایی باشد، چون l و k اعداد صحیح ثابتی اند پس B یک زیرمجموعه متناهی از J است. چون J به طور موضعی σ-

پوچتوان است یک عدد صحیح مثبت t وجود دارد که $B\sigma^{(k+1)l}(B)...\sigma^{t(k+1)l}(B) = 0$ بنابراین

$$
\begin{aligned}
&(a_{i_1} + b_{i_1})\sigma^l(a_{i_2} + b_{i_2})...\sigma^{kl}(a_{i_{k+1}} + b_{i_{k+1}})\sigma^{(k+1)l}(a_{i_{k+2}} \\
&\quad +b_{i_{k+2}})...\sigma^{Nl}(a_{i_{(t+1)k+t+1}} + b_{i_{(t+1)k+t+1}}) \\
&\quad = \alpha_1\sigma^{(k+1)l}\big((a_{i_{k+2}} + b_{i_{k+2}})\sigma^l(a_{i_{k+3}} + b_{i_{k+3}}) \dots \sigma^{kl}(a_{i_{2k+2}} + b_{i_{2k+2}})\big) \dots \\
&\quad = \alpha_1\sigma^{(k+1)l}(\alpha_2)\sigma^{2(k+1)l}\big((a_{i_{2k+3}} + b_{i_{2k+3}})\sigma^l(a_{i_{2k+4}} + b_{i_{2k+4}})...\sigma^{kl}(a_{i_{3k+3}} \\
&\quad +b_{i_{3k+3}})\big) \dots \\
&\quad \vdots \\
&\quad = \alpha_1\sigma^{(k+1)l}(\alpha_2)\sigma^{2(k+1)l}(\alpha_3)...\sigma^{t(k+1)l}(\alpha_{t+1}) \in B\sigma^{(k+1)l}(B) \\
&\quad \times\sigma^{2(k+1)l}(B)...\sigma^{t(k+1)l}(B) = 0
\end{aligned}
$$

که $N = t(k+1) + k$ و $\alpha_1, ..., \alpha_{t+1} \in B$، این نتیجه می دهد که $C\sigma^l(C)...\sigma^{Nl}(C) = 0$. بنابراین $I + J$ به طورموضعی σ- پوچتوان است زیراهرزیرمجموعه متناهی اش، σ- پوچتوان است.

۲. فرض کنیم $S = \{\sum r_i a_i | a_i \in I, r_i \in R\}$ یک زیرمجموعه متناهی از RI باشد. عدد صحیح $l \geq 1$، را ثابت در نظر می گیریم. فرض کنیم $S' = \{a_i r_i | \sum_{\text{متناهی}} r_i a_i \in S\}$ پس S' یک زیر مجموعه متناهی از I است، چون I به طورموضعی σ- پوچتوان است پس برای یک عدد صحیحm

$$S'\sigma^l(S')\sigma^{2l}(S')...\sigma^{ml}(S') = 0$$

لذا S، σ- پوچتوان است. با استفاده از استدلال قبل، RI و RJ به طور موضعی σ-پوچتوانند و هم چنین با استفاده از (۱)، $RI + RJ$ به طور موضعی σ - پوچتوان است. چون $I + J \subseteq RI + RJ$ پس $I + J$ نیز به طور موضعی σ -پوچتوان است.

۳. از (۱) نتیجه می شود.

□

گزاره ۱.۱۰. $P_\sigma(R) \subseteq L_\sigma(R)$.

اثبات. با استفاده از گزاره ۱.۵، $P_\sigma(R)$ کوچکترین ایده آل σ- نیم اول است. پس کافیست نشان دهیم $L_\sigma(R)$، σ- نیم اول است. $L_\sigma(R)$ با استفاده از تعریف آن یک σ- ایده آل است. فرض کنیم $L_\sigma(R)$، σ- نیم اول نیست آنگاه $a \in R \backslash L_\sigma(R)$ وجوددارد که برای هر $n \geq m$، $aR\sigma^n(a) \subseteq L_\sigma(R)$ برای یک عدد

صحیح m. $L_\sigma(R)$ به طور موضعی σ- پوچتوان است، چون $a \notin L_\sigma(R)$ بنابراین یک عدد صحیح $k \geq ۱$ وجود دارد که برای هر $s \geq ۱$،

$$a\sigma^k(a)\sigma^{۲k}(a)...\sigma^{sk}(a) \neq ۰ \qquad (۱)$$

اما $aR\sigma^n(a) \subseteq L_\sigma(R)$ و بنابراین برای یک عدد صحیح $s_۱k \geq m$،

$$a\sigma^k(a)\sigma^{۲k}(a)...\sigma^{s_۱k}(a) \in l_\sigma(R).$$

بنابراین از نابرابری (۱) دنباله غیرایستای زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
۰ &\neq a\sigma^k(a)\sigma^{۲k}(a)...\sigma^{s_۱k}(a),\\
۰ &\neq a\sigma^k(a)...\sigma^{s_۱k}(a)\sigma^{(s_۱+۱)k}\big(a\sigma^k(a)...\sigma^{s_۱k}(a)\big),\\
۰ &\neq a\sigma^k(a)...\sigma^{s_۱k}(a)\sigma^{(s_۱+۱)k}\big(a\sigma^k(a)...\sigma^{s_۱k}(a)\big)\sigma^{۲(s_۱+۱)k}\big(a\sigma^k(a)...\sigma^{s_۱k}(a)\big),\\
&\vdots\\
۰ &\neq a\sigma^k(a)...\sigma^{s_۱k}(a)\sigma^{(s_۱+۱)k}\big(a\sigma^k(a)...\sigma^{s_۱k}(a)\big)...\sigma^{t(s_۱+۱)k}\big(a\sigma^k(a)...\sigma^{s_۱k}(a)\big),
\end{aligned}$$

برای هر $t \geq ۱$. اما $L_\sigma(R)$ به طور موضعی σ- پوچتوان است با استفاده از لم ۹.۱(۳). چون $a\sigma^k(a)\sigma^{۲k}(a)...\sigma^{s_۱k}(a) \in L_\sigma(R)$، داریم

$$a\sigma^k(a)...\sigma^{s_۱k}(a)\sigma^{(s_۱+۱)k}\big(a\sigma^k(a)...\sigma^{s_۱k}(a)\big)...\sigma^{t_۱(s_۱+۱)k}\big(a\sigma^k(a)...\sigma^{s_۱k}(a)\big) = ۰$$

برای $t \geq ۱$ که این تناقض است. □

مثال ۱۱.۱. فرض کنیم K یک میدان نامتناهی و $K[\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}]$ حلقه چندجمله ای روی K و $J = \langle\{t_{n_۱}t_{n_۲}t_{n_۳} | n_۳ - n_۲ = n_۲ - n_۱ > ۰\}\rangle$ ایده آلی از $K[\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}]$ باشد، برطبق ساختار رم در [۱۳]، R را به صورت $R = K[\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}]/J$ تعریف می کنیم. K- خودریختی σ از $R = K[\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}]/J$ که هر t_i را $t_{i+۱}$ می برد، یک خودریختی σ رویR القا می کند. رم در [۱۳] مثال ۲.۳ نشان داد حلقه