وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش توپولوژی)

همبندسازی فضاهای توپولوژیک

توسط:

مینا مقیمیان هوش

استاد راهنما:

دکتر محمد ابری

استاد مشاور:

دکتر سید علی تقوی

شهریور ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

همبندسازی فضاهای توپولوژیک

توسط:

مینا مقیمیان هوش

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ

درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض (گرایش توپولوژی)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر محمد ابری استادیار دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر سید علی تقوی استادیار دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر عباس فخاری استادیار دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر غلامرضا عباسپور استادیار دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر سید ناصر هاشمی استادیار دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

پدرم

سپاسگزاری

"حمد و ستایش مخصوص خدایی است که پروردگار عالمیان است"

و

سپاس از پدر و مادرم برای آرامشی که هدیه‌ی همیشگی آنان به من بوده است،

از خواهر و برادرم برای حمایت‌ها و محبت همیشگی‌شان،

و

از استاد راهنمای بزرگوارم، آقای دکتر ابری، برای راهنمایی‌ها و توصیه‌های ارزنده‌شان.

همچنین از استاد محترم، آقای دکتر تقوی، که زحمت مشاوره‌ی این پایان‌نامه را به عهده داشته‌اند، تشکر می‌کنم.

و

برای تمام کسانی که به من لطف داشته‌اند، تندرستی و موفقیت آرزو می‌کنم.

چکیده

همبندسازی فضاهای توپولوژیک

به وسیله‌ی:

مینا مقیمیان هوش

هدف اصلی ما بررسی روند تحقیقات برجسته‌ی تاریخی مربوط به همبندسازی فضاهای توپولوژیک می‌باشد؛ از سال ۱۹۹۳ که در زمینه‌ی همبندسازی‌های فضاهای هاسدورف نتایجی حاصل شد تا سال ۲۰۰۸ که دایکسترا[۱] نشان داد هر فضای مترپذیر و جدایی‌پذیر، یک فشرده‌سازی مترپذیر با مانده‌ای که همبند مسیری و همچنین موضعاً همبند مسیری می‌باشد، می‌پذیرد [۸]. تمرکز اصلی ما روی کار دایکسترا می‌باشد و امیدواریم بررسی و گردآوری این روند تحقیقاتی، راه‌گشای ما برای کار روی سؤال بازی که توسط وی مطرح شد، باشد: *آیا هر فضای مترپذیر، یک فشرده‌سازی هاسدورف با مانده‌ای همبند می‌پذیرد؟*

[۱] Dijkstra

فهرست مطالب

پیشگفتار

همبندی یکی از خواص بنیادی فضاهای توپولوژیک است که در اوایل پیشرفت نظریه‌ی مجموعه‌ای توپولوژی، تعریف شد و به طور گسترده‌ای در دهه‌های ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰ مورد مطالعه قرار گرفت. اما بعداً این مطالعات، بیش‌تر به فضاهای همبند فشرده که به نام پیوستارها شناخته می‌شوند، محدود شد. همچنین مفهوم دیگری از توپولوژی که بیش‌تر مورد بررسی قرار گرفت، مفهوم نشاندن چگال بود و سبب تعجب است که به موضوع نشاندن‌های چگال در فضاهای همبند، توجه بسیار کمی شده است؛ در واقع تا قبل از سال ۱۹۹۳، تنها مرجع به این موضوع، سؤالی بود که توسط دوئن[۲] در یک کنفرانس در سال ۱۹۷۷ مطرح شد، با این عنوان که *آیا خط سورجنفری یک فشرده‌سازی* (*هاسدورف*) *همبند دارد*؟ اما به این سؤال توسط امریک و کولپا[۳] بعداً پاسخ منفی داده شد [۹]. لذا به دلیل نقش کلیدی خط سورجنفری در شروع تحقیقات در مورد مسئله‌ی همبندسازی، ما در پایان اولین بخش از فصل دوم، عدم وجود فشرده‌سازی‌های همبند برای این فضا را بررسی کرده‌ایم.

قابل تذکر است که از لحاظ ساختاری، فصل اول به بیان مفاهیم و ابزار لازم برای ورود به مطالب اصلی، اختصاص یافته و تحقیقاتی که در قالب سه فصل دیگر این پایان‌نامه گردآوری شده‌اند، بررسی روند تاریخی پیشرفت‌ها و تحقیقاتی است که در زمینه‌ی همبندسازی فضاهای توپولوژیک حاصل شده‌اند.

---

[۲] E. van Douwen

[۳] A. Emeryk and W. Kulpa

در اولین بخش فصل دوم در قالب یک قضیه، شرایطی کافی برای یک فضای هاسدورف بیان می‌شود تا این فضا یک همبندسازی هاسدورف داشته باشد و در بخش دوم، ملاحظه می‌شود که فضاهای هاسدورف شمارا، تنها رده از فضاهای هاسدورف هستند که توصیفی کامل از همبندسازی‌های آن‌ها، شناخته شده است. در همین بخش به نتایجی که در مورد همبندسازی‌های هاسدورف شمارا مربوط به فضاهای شمارا حاصل شده است، اشاره می‌شود و این در حالی است که ما به پاسخ منفی توسط آلاس[۴] و همکارانش [۱] به یک سؤال از واتسن و ویلسن[۵] [۲۶]، مبنی بر این‌که *آیا هر فضای هاسدورف شمارا و بدون نقاط تنها، به طور شمارا قابل همبندسازی است؟* نیز اشاره می‌کنیم.

فصل سوم در دو بخش تدوین شده است که در بخش اول ابتدا با یک قضیه‌ی جالب نشان می‌دهیم که هر فضای تیخونوف و شمارای دوم که فاقد زیرمجموعه‌های ناتهی و سره‌ی باز فشرده است، دارای یک همبندسازی مترپذیر می‌باشد و سپس به وسیله‌ی یک مثال نشان می‌دهیم که این قضیه برای فضاهای غیرجدایی‌پذیر برقرار نیست که در واقع این مثال، سؤالی از آلاس و همکارانش را پاسخ می‌دهد. بخش دوم این فصل از منظری متفاوت به بررسی فشرده‌سازی‌های یک فضای متریک و جدایی‌پذیر می‌پردازد.

آن‌چه انگیزه‌ی تحقیق دایکسترا در مورد این موضوع شده [۸]، سؤالی بوده که توسط سیمون[۶] مطرح شده است [۲۵]، که *آیا فضایی که پس از حذف یک زیرمجموعه‌ی چگال و شمارا از مربع واحد* $[0,1]^2$ *حاصل می‌شود، یک فشرده‌سازی با مانده‌ی همبند دارد؟* گویا سیمون حدس می‌زد که پاسخ این سؤال منفی است ولی دایکسترا نتیجه‌ای کلی را اثبات کرد که در حالت خاص نشان می‌دهد پاسخ این سؤال، مثبت است؛ در واقع ثابت می‌شود که هر فضای مترپذیر و جدایی‌پذیر، یک فشرده‌سازی مترپذیر می‌پذیرد که مانده‌ی آن همبند مسیری و نیز موضعاً همبند مسیری می‌باشد.

در فصل چهارم، هدف ما بررسی همبندسازی‌ها با ویژگی‌های مشخصی می‌باشد. در بخش اول، همبندسازی‌های موضعاً همبند و در بخش دوم، همبندسازی‌های همبند مسیری بررسی شده‌اند و مباحث با ارائه‌ی مثال‌هایی کامل‌تر شده‌اند. بخش سوم این فصل، به همبندسازی‌های تک نقطه‌ای می‌پردازد. ما ضمن آشنایی با مفاهیمی جدید، این بخش را پس از بررسی قضیه‌ای در مورد همبندسازی‌های تک نقطه‌ای مربوط به زیرفضاهای خط حقیقی پی

[4] O.T. Alas

[5] S. Watson and R.G. Wilson

[6] P. Simon

گرفته‌ایم و در قالب مثال‌هایی نشان داده‌ایم که وضعیت در مورد زیرفضاهای صفحه‌ی اقلیدسی، به طور اساسی متفاوت می‌باشد.

فصل ۱

پیش نیازها

۱-۱ توپولوژی عمومی

در این فصل ابزار لازم برای ورود به متن اصلی نوشتار را فراهم می‌کنیم. سعی شده است قضایای وابسته به هر مفهوم، که بعداً لازم هستند، بیان شوند. فرض ما بر این است که خواننده با اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها و توپولوژی مقدماتی آشنایی دارد.

۱-۱-۱ اعداد ترتیبی

به هر مجموعه‌ی خوش ترتیب X، یک عدد ترتیبی α نسبت داده می‌شود که نوع ترتیب X نامیده می‌شود. انواع ترتیب مجموعه‌های خوش ترتیب X و Y مساوی‌اند، اگر و تنها اگر X و Y متشابه باشند (یعنی نگاشتی حافظ ترتیب از X به‌روی Y وجود داشته باشد).

اگر α و β دو عدد ترتیبی متناظر با X و Y باشند، گوییم α کوچک‌تر از β یا β بزرگ‌تر از α است و می‌نویسیم $\beta > \alpha$ یا $\alpha < \beta$، اگر یک $y_\circ \in Y$ وجود داشته باشد به طوری که مجموعه‌های X و $\{y \in Y \ : \ y < y_\circ\}$ متشابه باشند. می‌توان اثبات کرد که هر مجموعه از اعداد ترتیبی با رابطه‌ی $>$ خوش ترتیب است. هر مجموعه‌ی خوش ترتیب از نوع α با مجموعه‌ی تمام اعداد ترتیبی کوچک‌تر از α که به طور خطی با رابطه‌ی $>$ مرتب شده است، متشابه می‌باشد.

یک عدد ترتیبی λ یک *عدد حدی* است، اگر هیچ عددی ترتیبی وجود نداشته باشد که بلافاصله قبل از λ

قرار بگیرد.

اگر مجموعه‌ی تمام اعداد ترتیبی کوچک‌تر از یک عدد حدی λ، شامل یک زیرمجموعه‌ی A از نوع α باشد به طوری که برای هر $\xi < \lambda$ یک $\xi' \in A$ وجود داشته باشد که در رابطه‌ی $\xi < \xi' < \lambda$ صدق کند، آن‌گاه می‌گوییم که عدد ترتیبی α *هم‌پایان* با λ است.

چون هر نگاشت حافظ ترتیب یک‌به‌یک است، برای هر زوج X و Y از مجموعه‌های متشابه داریم $|X| = |Y|$. در نتیجه به هر عدد ترتیبی α یک عدد اصلی نسبت داده می‌شود؛ عدد اصلی هر مجموعه‌ی خوش ترتیب از نوع α. این عدد، عدد اصلی α نامیده شده و با $|\alpha|$ نشان داده می‌شود.

عدد ترتیبی نامتناهی λ (یعنی نوع ترتیب یک مجموعه‌ی خوش ترتیب نامتناهی) یک *عدد اولیه* است، هرگاه λ در بین تمام اعداد ترتیبی α که در $|\alpha| = |\lambda|$ صدق می‌کنند، کوچک‌ترین باشد. عدد ترتیبی اولیه‌ی λ، *منظم* است، اگر هیچ $\alpha < \lambda$ای وجود نداشته باشد که هم‌پایان با λ باشد.

برای هر عدد اصلی m، یک عدد ترتیبی اولیه‌ی λ وجود دارد به طوری که $m = |\lambda|$ و این λ منحصربه‌فرد است.

عدد اولیه‌ی دارای عدد اصلی $\aleph_0$ با ω_0 یا ω نمایش داده می‌شود که نوع ترتیب مجموعه‌ی تمام اعداد صحیح مثبت با ترتیب طبیعی می‌باشد. عدد اولیه‌ی دارای عدد اصلی $\aleph_i$ برای $i = 1, 2, \ldots$، با ω_i نمایش داده می‌شود. پس ω_1 کوچک‌ترین عدد ترتیبی ناشماراست.

به‌جا است که ذکر شود در این پایان‌نامه، بنا به موضوع بحث، از نماد c برای نمایش عدد اصلی پیوستار استفاده کرده‌ایم.

۱-۱-۲ فضاهای توپولوژیک

آن‌چه در این قسمت بیان می‌شود شامل تعریف فضاهای توپولوژیک، مروری بر ساختار آن‌ها و بررسی مفاهیمی برجسته در رابطه با این فضاها می‌باشد.

جالب است بدانیم که منشأ پیدایش مفهوم فضای توپولوژیک، بررسی خط حقیقی و فضای اقلیدسی و بررسی توابع پیوسته در این فضاها بوده است. یک ***فضای توپولوژیک*** عبارت است از مجموعه‌ای مانند X همراه با گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های آن، موسوم به مجموعه‌های باز به طوری که $\emptyset$ و X بازند و اجتماع دلخواه و مقطع متناهی مجموعه‌های باز نیز باز است.

تعریف ۱.۱.۱. زیرمجموعه‌ی A از فضای توپولوژیک X را ***بسته*** گوییم در صورتی که مجموعه‌ی $X \setminus A$ باز باشد.

تعریف ۲.۱.۱. فرض می‌کنیم X یک مجموعه باشد. یک ***پایه*** برای یک توپولوژی در X گردایه‌ای است از زیرمجموعه‌های X (موسوم به اعضای پایه) به طوری که:

(۱) به ازای هر $x \in X$، دست کم یک عضو پایه مانند B شامل x موجود است.

(۲) اگر x متعلق به دو عضو پایه مانند B_1 و B_2 باشد، آن‌گاه عضوی از پایه مانند B_3 وجود دارد به طوری که $x \in B_3$ و $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ی یک توپولوژی در X باشد آن‌گاه τ، توپولوژی تولید شده به وسیله‌ی $\mathcal{B}$ چنین تعریف می‌شود: زیرمجموعه‌ی U از X را در X باز گوییم، هرگاه به ازای هر $x \in U$، عضوی از پایه مانند $B \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in B$ و $B \subset U$.

تعریف ۳.۱.۱. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، کوچک‌ترین عدد اصلی به شکل $|\mathcal{B}|$ که $\mathcal{B}$ یک پایه برای فضای X است، ***وزن*** فضای X نامیده شده و با $w(X)$ نمایش داده می‌شود. اگر فضای X دارای وزن شمارا باشد، گوییم X در دومین اصل شمارایی صدق می‌کند یا ***شمارای دوم*** است.

تعریف ۴.۱.۱. یک خانواده‌ی $\mathcal{U}$ از مجموعه‌های باز ناتهی از یک فضای X یک π-***پایه*** نامیده می‌شود، اگر برای هر مجموعه‌ی باز ناتهی V از X، $U \in \mathcal{U}$ وجود داشته باشد که $U \subset V$. کوچک‌ترین عدد اصلی به شکل $|\mathcal{U}|$، که $\mathcal{U}$ یک π-پایه برای فضای X می‌باشد را π-***وزن*** X نامیده و با $\pi w(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. یک خانواده‌ی $\mathcal{B}(x)$ از همسایگی‌های $x \in X$ یک ***پایه‌ی موضعی*** در نقطه‌ی x نامیده می‌شود هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز U که شامل x است، $V \in \mathcal{B}(x)$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in V \subset U$.

تعریف ۶.۱.۱. ***مشخصه‌ی یک نقطه‌ی*** x در یک فضای توپولوژیک X، به عنوان کوچک‌ترین عدد اصلی به شکل $|\mathcal{B}(x)|$ که $\mathcal{B}(x)$ یک پایه‌ی موضعی در نقطه‌ی x است، تعریف شده و با $\chi(x, X)$ نمایش داده می‌شود و اما ***مشخصه‌ی یک فضای توپولوژیک*** X را سوپریمم مشخصه‌های نقاط X تعریف می‌کنیم و با $\chi(X)$ نمایش می‌دهیم. حال اگر یک فضای توپولوژیک X دارای مشخصه‌ی شمارا باشد، گوییم X در اولین اصل شمارایی صدق می‌کند یا ***شمارای اول*** است.

تعریف ۷.۱.۱. یک خانواده‌ی $\mathcal{N}$ از زیرمجموعه‌های یک فضای توپولوژیک X، یک ***شبکه*** برای X است هرگاه برای هر نقطه‌ی $x \in X$ و هر همسایگی U از x، یک $M \in \mathcal{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in M \subset U$. ***وزن شبکه‌ای*** یک فضای X، به عنوان کوچک‌ترین عدد اصلی به شکل $|\mathcal{N}|$ که $\mathcal{N}$ یک شبکه برای X است تعریف می‌شود و با $nw(X)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱. اگر A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک X باشد، ***درون*** مجموعه‌ی A عبارت است از اجتماع همه‌ی مجموعه‌های باز جزء A و ***بستار*** مجموعه‌ی A عبارت است از مقطع همه‌ی مجموعه‌های بسته‌ی حاوی A. درون مجموعه‌ی A را به $int\ A$ یا A° و بستار A را به $cl\ A$ یا $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم. همچنین گاهی برای تأکید به ترتیب با $int_X(A)$ و $cl_X(A)$ نمایش داده می‌شوند.

تعریف ۹.۱.۱. به ازای هر مجموعه‌ی دلخواه X، گردایه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های یک عضوی X، پایه‌ای برای ***توپولوژی گسسته*** در X است.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای باشد با یک رابطه‌ی ترتیبی ساده و $\mathcal{B}$ گردایه‌ی تمام مجموعه‌هایی که به صورت یکی از انواع زیر باشند:

(۱) همه‌ی بازه‌های باز (a, b) در X.

(۲) تمام بازه‌های به صورت $[a_\circ, b)$ که در آن $a_\circ$ کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی X است (در صورت وجود).

(۳) تمام بازه‌های به صورت $(a, b_\circ]$ که در آن $b_\circ$ بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی X است (در صورت وجود).

گردایه‌ی $\mathcal{B}$ پایه‌ای است برای یک توپولوژی در X موسوم به ***توپولوژی ترتیبی***.

تعریف ۱۱.۱.۱. یک خانواده‌ی $\{A_s\}_{s\in S}$ از زیرمجموعه‌های یک فضای توپولوژیک X، ***موضعاً متناهی*** نامیده می‌شود اگر برای هر نقطه‌ی $x \in X$، یک همسایگی U وجود داشته باشد به طوری که مجموعه‌ی $\{s \in S \ : \ U \cap A_s \neq \emptyset\}$ متناهی باشد. اگر هر نقطه‌ی $x \in X$ یک همسایگی داشته باشد که حداکثر یک مجموعه از یک خانواده‌ی داده شده را قطع کند، آن‌گاه گوییم این خانواده ***گسسته*** است. یک خانواده از زیرمجموعه‌های یک فضای توپولوژیک، σ***-موضعاً متناهی*** (σ***-گسسته***) می‌باشد، اگر بتواند به عنوان یک اجتماع شمارا از خانواده‌های موضعاً متناهی (گسسته) نمایش داده شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. کوچک‌ترین عدد اصلی $m \geq \aleph_0$ به طوری که هر خانواده از زیرمجموعه‌های باز ناتهی و دوبه‌دو مجزای X، دارای عدد اصلی کوچک‌تر یا مساوی m است، ***حجره‌بندی*** فضای X نامیده می‌شود و با $c(X)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۱. اگر A زیرمجموعه‌ای از یک فضای توپولوژیک X باشد، مجموعه‌ی $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$، ***مرز*** A نامیده شده و با $Fr\ A(Br\ A, Bd\ A)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۴.۱.۱. یک نقطه‌ی x در یک فضای توپولوژیک X یک ***نقطه‌ی حدی*** یک مجموعه‌ی $A \subset X$ نامیده می‌شود، اگر $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. مجموعه‌ی تمام نقاط حدی A، مجموعه‌ی مشتق شده از A نام دارد و با A^d نمایش داده می‌شود. نقاط $A \setminus A^d$ ***نقاط تنهای*** مجموعه‌ی A نام دارند. به بیان دیگر یک نقطه‌ی x، یک نقطه‌ی تنهای فضای X است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی تک نقطه‌ای $\{x\}$ باز باشد. در واقع مجموعه‌ی $\{x\}$ باز است اگر و تنها اگر $\{x\} = X \setminus \overline{X \setminus \{x\}}$، یعنی اگر $x \notin \overline{X \setminus \{x\}}$.

تعریف ۱۵.۱.۱. مجموعه‌ی A از یک فضای توپولوژیک X را ***چگال*** در X گوییم هرگاه $\overline{A} = X$ و یک مجموعه‌ی $A \subset X$، ***در خود چگال*** نامیده می‌شود اگر $A \subset A^d$.

تعریف ۱۶.۱.۱. اگر فضای توپولوژیک X دارای یک زیرمجموعه‌ی شمارا و چگال باشد، یک ***فضای جدایی‌پذیر*** نامیده می‌شود.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض می‌کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. تابع $f : X \to Y$ را وقتی ***پیوسته*** خوانیم که به ازای هر زیرمجموعه‌ی باز Y مانند V، مجموعه‌ی $f^{-1}(V)$ یک زیرمجموعه‌ی باز X باشد. نگاشت $f : X \to Y$ را ***نگاشت باز*** خوانیم در صورتی که به ازای هر مجموعه‌ی باز U از X، مجموعه‌ی $f(U)$ در Y باز باشد و آن را ***نگاشت بسته*** خوانیم در صورتی که به ازای هر مجموعه‌ی بسته‌ی X مانند A، مجموعه‌ی $f(A)$ در Y بسته باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض می‌کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک بوده و تابع $f : X \to Y$ تناظری دوسویی باشد. اگر f و تابع معکوس آن $f^{-1} : Y \to X$ هر دو پیوسته باشند، آن‌گاه f را یک ***همسانریختی*** نامیده و گوییم فضاهای X و Y همسانریخت هستند.

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض می‌کنیم X و $X_۱$ دو فضای توپولوژیک باشند. اگر برای یک زیرفضای Y از X یک همسانریختی $f : X_۱ \to Y$ وجود داشته باشد، آن‌گاه فضای $X_۱$ را قابل نشاندن در X و نگاشت $i_Y f : X_۱ \to X$ را یک ***نشاندن همسانریختی*** از $X_۱$ در X می‌نامیم. گاهی اوقات، X یک ***توسیع*** از $X_۱$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۲۰. $A \subset X$ را ***توکشیده*** گوییم هرگاه نگاشت پیوسته‌ی $r : X \to A$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم $r(x) = x$. در این صورت r را یک توکشاننده می‌نامیم. یک فضای X یک ***توکشیده‌ی مطلق*** نامیده می‌شود هرگاه آن یک توکشیده از هر فضای Y که X را به عنوان یک زیرفضای بسته شامل است، باشد.

در این قسمت خواص جداسازی فضاهای توپولوژیک، به اختصار بیان می‌شوند:

تعریف ۱.۱.۲۱. یک فضای توپولوژیک X یک فضای $T_۰$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر زوج نقطه‌ی متمایز $x_۱, x_۲ \in X$، یک مجموعه‌ی باز وجود داشته باشد که دقیقاً شامل یکی از این نقاط است و یک فضای $T_۱$ نامیده می‌شود، اگر برای هر زوج نقطه‌ی مجزای $x_۱, x_۲ \in X$، یک مجموعه‌ی باز $U \subset X$ وجود داشته باشد به طوری که $x_۱ \in U, x_۲ \notin U$ و همچنین مجموعه‌ی باز $V \subset X$ وجود دارد که $x_۲ \in V, x_۱ \notin V$ و آن را یک فضای $T_۲$ یا ***هاسدورف***[۱] می‌نامیم در صورتی که به ازای هر دو نقطه‌ی متمایز $x_۱, x_۲ \in X$، همسایگی‌های مجزایی مانند $U_۱$ و $U_۲$ به ترتیب از $x_۱$ و $x_۲$ یافت شوند و یک فضای $T_۳$ یا ***منظم*** نامیده می‌شود، اگر X یک فضای $T_۱$ بوده و برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی بسته‌ی $F \subset X$ که $x \notin F$، مجموعه‌های باز $U_۱$ و $U_۲$ وجود داشته باشند به طوری که $x \in U_۱, F \subset U_۲$ و $U_۱ \cap U_۲ = \emptyset$.

قضیه ۱.۱.۲۲. *فضای توپولوژیک X منظم است اگر و تنها اگر $T_۱$ بوده و برای هر نقطه‌ی $x \in X$ و هر همسایگی U از x، همسایگی V از x موجود باشد به طوری که $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

اثبات. [۱۱، گزاره‌ی ۱.۵.۵] را ببینید. □

[۱] Hausdorff

تعریف ۲۳.۱.۱. فضای توپولوژیک X یک فضای $T_{3\frac{1}{2}}$ یا ***تیخونوف***[۲] یا تماماً منظم است، هرگاه X یک فضای T_1 باشد و برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی بسته‌ی $F \subset X$ که $x \notin F$، یک تابع پیوسته‌ی $f : X \to I$ وجود داشته باشد که $f(x) = 0$ و $f(y) = 1$ برای $y \in F$ برقرار باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. فضای توپولوژیک X یک فضای T_4 یا ***نرمال*** نامیده می‌شود، اگر X فضایی T_1 بوده و برای هر زوج از زیرمجموعه‌های بسته و مجزای $A, B \subset X$، مجموعه‌های باز U و V وجود داشته باشند به طوری که $A \subset U, B \subset V$ و $U \cap V = \emptyset$.

تعریف ۲۵.۱.۱. فضای توپولوژیک X یک فضای ***تماماً نرمال*** نامیده می‌شود، اگر X یک فضای نرمال باشد و هر زیرمجموعه‌ی بسته از X یک G_δ-مجموعه باشد. به وضوح یک فضای نرمال X، تماماً نرمال است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه‌ی باز X یک F_σ-مجموعه باشد (یادآوری می‌کنیم که یک F_σ-مجموعه، اجتماعی شمارا از مجموعه‌های بسته بوده و یک G_δ-مجموعه، اشتراکی شمارا از مجموعه‌های باز می‌باشد).

تعریف ۲۶.۱.۱. فضایی که هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی آن یک G_δ-مجموعه باشد، یک ***فضای تام*** نامیده می‌شود.

قضیه ۲۷.۱.۱. ***قضیه‌ی گسترش تیتزه***[۳] *. هر تابع پیوسته از یک زیرفضای بسته‌ی M از یک فضای نرمال X به I یا $\mathbb{R}$، به طور پیوسته قابل توسیع بر X می‌باشد.*

اثبات. [۲۲، قضیه‌ی ۱.۳۵] را ببینید. □

تعریف ۲۸.۱.۱. یک زیرگردایه‌ی $\mathcal{F} \subset P(X)$ (X یک مجموعه و $P(X)$ مجموعه‌ی توانی X می‌باشند) یک ***فیلتر*** بر X نامیده می‌شود هرگاه دارای خواص زیر باشد:

(۱) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(۲) اگر $F, G \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $F \cap G \in \mathcal{F}$.

(۳) اگر $F \in \mathcal{F}$ و $F \subset G \subset X$ در این صورت $G \in \mathcal{F}$.

---

[۲] Tychonoff

[۳] Tietze

یک فیلتر $\mathcal{F}$، ***آزاد*** نامیده می‌شود اگر $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. در صورتی که یک فیلتر آزاد نباشد، ثابت نامیده می‌شود. فیلتر $\mathcal{F}$، یک فیلتر ماکسیمال یا یک ***ابرفیلتر*** نام دارد، اگر برای هر فیلتر $\mathcal{F}'$ که شامل $\mathcal{F}$ باشد داشته باشیم $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

همچنین ابرفیلترها به صورت زیر توصیف می‌شوند:

$\mathcal{F}$ یک ابرفیلتر است اگر و تنها اگر $\mathcal{F}$ خاصیت اشتراک متناهی داشته باشد و اگر $A \subset X$ آن‌گاه یا $A \in \mathcal{F}$ یا $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

۱-۱-۳ اعمال بر فضاهای توپولوژیک

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک با توپولوژی τ باشد. اگر Y زیرمجموعه‌ای از X باشد، گردایه‌ی $\tau_Y = \{Y \cap U \ : \ U \in \tau\}$ یک توپولوژی در Y است و به ***توپولوژی زیرفضایی*** موسوم است. با این توپولوژی Y را یک زیرفضای X می‌نامیم.

باید توجه کنیم خواص شمارایی اول و شمارایی دوم به زیرفضاها منتقل می‌شوند. همچنین خواص جداسازی $T_۰$ تا $T_۳$ به زیرفضاها منتقل شده اما زیرفضای یک فضای نرمال، ممکن است نرمال نباشد.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض می‌کنیم یک خانواده‌ی $\{X_s\}_{s\in S}$ از فضاهای توپولوژیک دوبه‌دو مجزا داده شده باشند، یعنی برای $s \neq s'$، $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$. مجموعه‌ی $X = \bigcup\limits_{s\in S} X_s$ و خانواده‌ی τ شامل تمام مجموعه‌های $U \subset X$، به طوری که $U \cap X_s$ در X_s برای $s \in S$ای باز می‌باشد، را درنظر می‌گیریم. به وضوح τ یک توپولوژی بر X است. مجموعه‌ی X با این توپولوژی، ***جمع فضاهای*** $\{X_s\}_{s\in S}$ نامیده شده و با $\bigoplus_s X_s$ یا با $X_۱ \oplus X_۲ \oplus \ldots \oplus X_k$، اگر $S = \{۱, ۲, \ldots, k\}$، نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳۱.۱.۱. خانواده‌ی تمام مجموعه‌های $\prod\limits_{s\in S} W_s$ که W_s یک زیرمجموعه‌ی باز از فضای X_s است و نیز این‌که برای همه مگر تعدادی متناهی $s \in S$، رابطه‌ی $X_s = W_s$ برقرار می‌باشد، یک پایه برای ***حاصلضرب دکارتی*** $\prod\limits_{s\in S} X_s$ تشکیل می‌دهد.

حاصلضرب شمارای فضاهای شمارای اول، فضایی شمارای اول بوده و همچنین حاصلضرب شمارای فضاهای شمارای دوم، فضایی شمارای دوم می‌باشد. در مورد خواص جداسازی هم باید ذکر شود که خواص

جداسازی T_0 تا T_3 به حاصلضرب‌ها منتقل می‌شوند، با این وجود این حکم در مورد فضاهای نرمال برقرار نیست.

گزاره ۳۲.۱.۱. *یک نگاشت f از یک فضای توپولوژیک X به حاصلضرب دکارتی $\prod\limits_{s\in S} Y_s$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $s \in S$، ترکیب $p_s f$ پیوسته باشد. جایی که نگاشت $p_s : \prod\limits_{s\in S} Y_s \to Y_s$، تصویر $\prod\limits_{s\in S} Y_s$ به‌روی Y_s نامیده می‌شود.*

اثبات. [۱۱، گزاره‌ی ۶.۳.۲] را ببینید. □

قضیه ۳۳.۱.۱. *اگر X و Y دو فضای توپولوژیک باشند که Y فضایی هاسدورف است و $f : X \to Y$ یک نگاشت پیوسته باشد، آن‌گاه گراف تابع f (که با $G(f) = \{(x, f(x)\ :\ x \in X\}$ نمایش داده می‌شود) زیرفضای بسته‌ای از فضای $X \times Y$ می‌باشد.*

اثبات. کافی است نشان دهیم که $(X \times Y) \setminus G(f)$ مجموعه‌ای باز است.

فرض می‌کنیم $(s, t) \in (X \times Y) \setminus G(f)$، پس داریم $t \neq f(s)$. لذا هاسدورف بودن Y نتیجه می‌دهد که همسایگی‌های باز و مجزایی از t و $f(s)$ به ترتیب مانند V و V' وجود دارند به طوری که $t \in V, f(s) \in V'$ و $V \cap V' = \emptyset$. از طرفی پیوستگی f نتیجه می‌دهد که $U = f^{-1}(V')$ همسایگی بازی از s می‌باشد؛ به وضوح $U \times V$ مجموعه‌ای باز است که شامل (s, t) می‌باشد و خواص موردنظر را دارد. □

تعریف ۳۴.۱.۱. فرض می‌کنیم یک فضای توپولوژیک X، یک خانواده‌ی $\{Y_s\}_{s\in S}$ از فضاهای توپولوژیک و یک خانواده از نگاشت‌های پیوسته‌ی $\{f_s\}_{s\in S}$ که $f_s : X \to Y_s$، داده شده باشند. ثابت می‌شود نگاشتی که به نقطه‌ی $x \in X$، نقطه‌ی $\{f_s(x)\} \in \prod\limits_{s\in S} Y_s$ را نسبت می‌دهد، پیوسته است و ***قطر نگاشت‌های*** $\{f_s\}_{s\in S}$ نامیده شده و با $\Delta_{s\in S} f_s$ یا با $f_1 \Delta f_2 \Delta \ldots \Delta f_k$، اگر $S = \{1, 2, \ldots, k\}$، نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $p : X \to Y$ نگاشتی پوشا باشد. نگاشت p را یک ***نگاشت خارج قسمتی*** خوانیم در صورتی که هر زیرمجموعه‌ی Y مانند U در Y باز باشد اگر و فقط اگر $p^{-1}(U)$ در X باز باشد.

اگر X فضایی توپولوژیک، A یک مجموعه و $p : X \to A$ نگاشتی پوشا باشد آن‌گاه تنها یک توپولوژی τ در A وجود دارد که p نسبت به آن نگاشت خارج قسمتی است. این توپولوژی به ***توپولوژی خارج قسمتی*** القا شده به وسیله‌ی p موسوم است.