دانشگاه کاشان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در
رشته ریاضی (گرایش آنالیز)

عنوان:

خواص حساس و دیفرانسیل توابع گپ نامساوی‌های تغییراتی برداری مینتی

استاد راهنما:
دکترخیر ا... پوربرات

پژوهشگر:
سمیه زارع

زمستان ۸۷

چکیده

در این پایان‌نامه، خواص دیفرانسیل رده‌ای از نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار و توابع گپ مربوط به نامساوی‌های تغییراتی مینتی مورد بحث قرار گرفته و روابط بین مشتق‌های کانتینژنت آن‌ها تعیین شده‌است. در ادامه بیانی صریح از مشتق کانتینژنت یک رده از نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار ارائه می‌گردد. همچنین روابط بین یک نامساوی تغییراتی برداری مینتی و یک مسئله‌ی بهینه‌سازی برداری تحت فرض‌های شبه‌محدبی یا شبه‌یکنوایی بررسی‌شده و در پایان شرایط بهینگی جواب‌هایی از این نامساویها به دست آمده است.

واژگان کلیدی: مشتق کانتینژنت، توابع گپ، نامساوی‌های تغییراتی مینتی، مسئله‌ی بهینه‌سازی برداری

فهرست مندرجات

مقدمه

نامساوی تغییراتی برداری[1] در یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی، اولین بار توسط جیانسی($Giannessi$) (۱۹۸۰) بررسی شد که نوع بردار مقدار از یک نامساوی تغییراتی استمپاچیا و($Stampacchia$) و هارتمن (Hartman) (VI) است. VI عبارت است از یافتن $y^* \in K$ به‌طوری که $\langle F(y^*), x - y^* \rangle \geq 0$، برای هر $x \in K$، وقتی $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$، $K \subseteq \mathbb{R}^n$ و $\langle .\,, . \rangle$ ضرب داخلی در $\mathbb{R}^n$ است. این نامساوی‌ها در انجمن‌های علمی و کمیته‌های تخصصی مورد توجه ویژه می‌باشد.

بخش کاربردی آن در مسائل توازن ترافیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین یک مدل ریاضی برای مسئله‌ی توازن در یک ساختار مکانیکی وقتی معیارهای متضاد متعددی همانند وزن، قیمت، مقاومت و ... وجود دارد، فراهم می‌کند. مفهوم تابع گپ نقش مهمی برای مطالعه VVI دارد. تاکنون دو روش برای معرفی تابع گپ برای VVI، استفاده شده است. یانگ ($Yang$) و یائو (Yao) تابع گپ را برای مسائل VVI به‌عنوان توابع حقیقی ـ مقدار تعریف کردند. چن ($Chen$)، توابع گپ را برای مسائل VVI به‌عنوان نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار معرفی کرد. به‌علاوه تحت بعضی شرایط اجباری مناسب، لی (Li)، دیفرانسیل و خواص حساس توابع گپ، تعریف شده توسط چن را برای مسائل VVI بحث کرد. همچنین یک بیان صریح از مشتق‌های کانتینژنت [2] برای یک رده از نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار و بعضی شرایط بهینگی

---

[1] VVI

[2] $Contingent$

برای VVI و $WVVI$ توسط تابع گپ به‌دست آورد.

اخیراً نتایج مشابهی برای نامساوی‌های تغییراتی مینتی $(Minty)$،[۳] و توسیع برداری آن یعنی نامساوی‌های تغییراتی برداری مینتی [۴] و نامساوی‌های تغییراتی برداری ضعیف مینتی[۵]، به‌دست آمده است. جیانسی بعضی روابط بین جواب‌های مسائل $MVVI$ و جواب‌های مؤثر مسائل بهینه‌سازی تحت فرض‌های محدبی و یکنوایی بررسی کرد. ماسترونی $(Mastroeni)$، بعضی روابط بین مسائل $MVVI$ و مسائل VVI را تحت فرض‌های منظم مناسب نشان داد و به‌طور هم‌زمان یک تابع گپ حقیقی مقدار برای $MVVI$ توسط توابع پیوسته‌ی خطی مثبت معرفی کرد.

در این پایان‌نامه نامساوی‌های تغییراتی مینتی از نوع اسکالر و برداری و دیفرانسیل و خواص حساس توابع گپ تعریف شده برای این نامساوی‌ها، بررسی می‌شود. اهم کار بررسی خواص تابع گپ برای $MVVI$ و $MWVVI$ است که به‌عنوان نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار تعریف می‌شوند.

این پایان نامه شامل ۵ فصل است.

در فصل ۱ مقدمات و احکام مورد نیاز در سایر فصل‌ها را بیان می‌کنیم.

در فصل۲ نامساوی تغییراتی مینتی و به اختصار کاربردهایی از آن ارائه می‌شود. همچنین بعضی روابط بین توسیع برداری آن یعنی $MVVI$ و یک مسئله‌ی بهینه سازی برداری تحت فرض‌های شبه‌یکنوایی یا شبه‌محدبی بررسی شده است. مطالب بیان شده در این فصل تعمیمی از مرجع [۱۳] می‌باشد.

در فصل ۳ یک بیان صریح از مشتق کانتینژنت یک رده از نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار را به‌دست می آوریم.

فصل ۴ را با معرفی یک تابع گپ حقیقی ـ مقدارمشتق‌پذیر پیوسته برای MVI آغاز

---

[۳] MVI

[۴] $MVVI$

[۵] $MWVVI$

می‌کنیم. سپس تابع گپ را به ترتیب برای $MVVI$ و $MWVVI$،تعریف کرده، بعضی روابط بین مشتق‌های کانتینژنت یک رده از نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار و مشتق‌های کانتینژنت توابع گپ را بررسی می‌کنیم.

در فصل ۵ به ترتیب شرایط بهینگی برای جواب‌هایی از $MVVI$ و $MWVVI$، را به‌دست می‌آوریم.

مطالب ارائه شده دراین پایان‌نامه از مراجع [۱۹] ، [۲۲] و [۳۱] می‌باشد.

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

این فصل شامل ۴ بخش است. در بخش ۱ دو نوع از مخروط‌های تانژانت به نام‌های مخروط کانتینژنت و مخروط مجاورت معرفی می‌شود و تعاریف و قضایای مربوط به آن‌ها بیان می‌گردد. در بخش ۲ نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار، پیوستگی و دیفرانسیل‌پذیری آن‌ها بررسی می‌شود. در بخش ۳ تعاریف و خواص توابع محدب و توسیع آن‌ها یعنی توابع شبه محدب و نیم محدب بیان می‌شود و در بخش آخر مقدمات و قضایایی که در فصل‌های بعد از آن‌ها استفاده می‌شود، ا رائه می گردد.

۱.۱ مخروط‌های تانژانت

مفهوم تماس با این نیاز که فضای بردارهای مماس(تانژانت) باید یک فضای برداری باشد، از بعضی جهات تحت شعاع قرار گرفته‌است. اگر به ایده زیربنایی مفهوم مماس(تانژانت) برای زیرمجموعه‌ی K در نقاط $x \in K$ برگردیم، متقاعد می‌شویم که مشتقات تقسیم $\frac{K-x}{h}$ را شکل داده و حد آن‌ها را وقتی‌که $h > 0$ به صفر می‌رسد، بگیریم.

با این روش انواعی از مخروط‌های بسته ساخته شده از بردارهای تانژانت را به دست می‌آوریم. مشهورترین نوع این مخروط‌های تانژانت برای زمانی است که مخروط کانتینژنت در قرن سیزدهم توسط بولیگاند معرفی شد که حد بالایی این تقسیم است. بعضی از این

مخروط‌های تانژانت، مخروط‌های محدب هستند.

در این قسمت ابتدا تعاریف و خاصیت‌های اولیه‌ی مخروط‌ها، به‌طور کلی مخروط‌های محدب را بیان کرده، سپس دو نوع از مخروط‌های تانژانت را معرفی می‌کنیم.
مجموعه‌های محدب در بخش‌های کاربردی آنالیز تابعی، به ویژه مطالب مربوط به بهینه‌سازی ظاهر می‌شوند.

تعریف ۱.۱ زیرمجموعه‌ی K از فضای برداری حقیقی V، **محدب** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $u,v \in K$ و هر $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم $\lambda u + (1-\lambda)v \in K$. یعنی برای هر دو نقطه‌ی u,v عضو K، پاره‌خط واصل بین آن‌ها نیز در K قرار گیرد.

یادآوری می‌کنیم که اگر K محدب باشد، مجموعه‌های $int(K)$ و $\bar{K}$ نیز محدب‌اند.

تعریف ۲.۱ زیرمجموعه‌ی ناتهی C از فضای هیلبرت حقیقی H را **مخروط** نامیم هرگاه برای هر $\alpha \geq 0$ اگر $\Gamma \in C$، آن‌گاه $\alpha\Gamma \in C$.

تعریف ۳.۱ مجموعه‌ی $\{\alpha\Gamma + \beta \mid \alpha \geq 0 \ , \ \Gamma \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ یک نیم‌خط تعریف می‌کند که یک **راه**، در جهت ناصفر $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ دارای پایه‌ی β نامیده می‌شود.

برای مثال اجتماع دو ربع دایره‌ی مخالف، مجموعه‌ی $C = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \geq 0\right\}$، زیرفضاها، راه‌ها و... مخروط هستند.
همه‌ی مخروط‌ها شامل مبدأ و بی‌کران هستند البته به‌جز مخروط بدیهی صفر. امّا مخروط‌ها همواره محدب نیستند. مجموعه‌ی $C = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \geq 0\right\}$ مخروط نامحدب در $\mathbb{R}^2$ است. گزاره‌ی زیر تعریف معادلی برای مخروط محدب در یک فضای هیلبرت به‌دست می‌دهد.

گزاره ۴.۱ زیرمجموعه‌ی ناتهی C یک مخروط محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x,y \in C$ و هر $\lambda,\mu \geq 0$ داشته‌باشیم $\lambda x + \mu y \in C$

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم C یک مخروط محدب باشد. $x,y \in C$ و $\lambda,\mu \geq 0$. اگر $\lambda + \mu = 0$، آن‌گاه $\lambda = \mu = 0$ و به‌وضوح $\lambda x + \mu y \in C$. همچنین چون C محدب است اگر $\lambda + \mu > 0$،

آن‌گاه $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,x+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\,y\in C$. بنابراین

$$\lambda x+\mu y=(\lambda+\mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,x+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\,y\right)\in C$$

زیرا C مخروط است.

به‌عکس، فرض کنیم برای هر $x,y\in C$ و $\lambda,\mu\geq 0$ داشته باشیم $\lambda x+\mu y\in C$. بدیهی است که C محدب است. برای نشان دادن این‌که مخروط محدب است فرض کنیم $x\in C$ و $\lambda\geq 0$، در این صورت بنابر فرض $\lambda x=\lambda x+0y\in C$. □

نتیجه ۵.۱ زیرمجموعه‌ی ناتهی C از H یک مخروط محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x,y\in C$ و هر $\lambda\geq 0$ داشته باشیم $x+y\in C$ و $\lambda x\in C$.

اثبات. بلافاصله از گزاره قبل نتیجه می‌شود. □

فضای V و هر زیرفضای خطی V(شامل زیرفضای بدیهی$\{0\}$) مخروط‌های محدب هستند. یک مثال کلی‌تر از مخروط‌های محدب، مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای λx است به‌طوری که λ یک اسکالر مثبت، X زیرمجموعه V است و x یک عنصر از مجموعه‌ی محدب X می‌باشد.

قضیه ۶.۱ اشتراک یک مجموعه دلخواه از مخروط‌های محدب، یک مخروط محدب است. به عبارت دیگر مخروط‌های محدب تحت اشتراک بسته هستند.

تعریف ۷.۱ یک مخروط محدب C، **نوک‌دار** است، هرگاه شامل هیچ خطی نباشد. به‌طور معادل C نوک‌دار نیست هرگاه مسیر ناصفر $\Gamma\in\bar{C}$ موجود باشد به‌طوری که $-\Gamma\in\bar{C}$. اگر مبدأ یک نقطه‌ی فرین $\bar{C}$ باشد، C نوک‌دار است اگر $\bar{C}\cap-\bar{C}=\{0\}$.

یادآوری می کنیم نقطه‌ای در یک زیرمجموعه محدب C از یک فضای برداری، نقطه فرین نامیده می‌شود اگر در درون هیچ پاره‌خطی واقع در C قرار نداشته باشد.

تعریف ۸.۱ یک مخروط که بسته، محدب، نوک‌دار و دارای درون ناتهی است ، **مخروط سره** نامیده می‌شود.

قبل از بیان تعریف و گزاره‌های مربوط به مخروط‌های تانژانت(مخروط کانتینژنت و مخروط مجاورت) مفهوم حدود بالا و پایین مجموعه‌ها را بیان می‌کنیم.

فرض می‌کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $K \subset X$. فاصله‌ی x تا K به‌صورت

$$d_k(x) = d(x,K) = \inf_{y \in K} d(x,y), \qquad d(x,\emptyset) = +\infty$$

تعریف می‌شود. گوی به شعاع $r > ۰$ حول K در X با

$$B_X(K,r) = B(K,r) = \{x \in X \mid d(x,K) \leq r\}$$

نشان داده می‌شود.

تعریف ۹.۱ فرض کنیم $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ یک دنباله از زیرمجموعه‌های یک فضای متریک X باشد. زیرمجموعه‌ی

$$\lim\sup_{n \longrightarrow \infty} K_n = \{x \in X \mid \lim\inf_{n \longrightarrow \infty} d(x,K_n) = ۰\}$$

حد بالایی دنباله‌ی K_n و زیرمجموعه‌ی

$$\lim\inf_{n \longrightarrow \infty} K_n = \{x \in X \mid \lim_{n \longrightarrow \infty} d(x,K_n) = ۰\}$$

حد پایینی دنباله‌ی K_n است.

زیرمجموعه K را **حد دنباله‌ی** K_n می‌نامیم اگر

$$K = \lim\inf_{n \longrightarrow \infty} K_n = \lim\sup_{n \longrightarrow \infty} K_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} K_n$$

مثال ۱۰.۱ دنباله‌ی K_n رادر نظر بگیرید به‌طوری که

$$K_n = \begin{cases} \frac{۱}{n} \times [۰, ۱] & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \\ \frac{۱}{n} \times [-۱, ۰] & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

آن‌گاه

$$\lim \inf_{n \longrightarrow \infty} K_n = \{(\circ, \circ)\}$$

و

$$\lim \sup_{n \longrightarrow \infty} K_n = \{\circ\} \times [-\text{۱}, \text{۱}]$$

اثبات. فرض کنیم $\mathbb{R}^{\text{۲}} \ni x = (x_{\text{۱}}, x_{\text{۲}})$. $d(x, k_n)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$d(x, K_n) = \begin{cases} \inf_{\circ \leq t \leq \text{۱}} \left((x_{\text{۱}} - \frac{\text{۱}}{n})^{\text{۲}} + (x_{\text{۲}} - t)^{\text{۲}} \right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \\ \inf_{-\text{۱} \leq t \leq \circ} \left((x_{\text{۱}} - \frac{\text{۱}}{n})^{\text{۲}} + (x_{\text{۲}} - t)^{\text{۲}} \right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

قرار می‌دهیم $I = \{\circ\} \times [-\text{۱}, \text{۱}]$ که در واقع همان مؤلفه‌های به‌صورت $(\circ, t)$ اند که $-\text{۱} \leq t \leq \text{۱}$.

اگر $x \in I$

$$d(x, K_n) = \begin{cases} \inf_{\circ \leq t \leq \text{۱}} \left((\frac{\text{۱}}{n})^{\text{۲}} + (x_{\text{۲}} - t)^{\text{۲}} \right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \\ \inf_{-\text{۱} \leq t \leq \circ} \left((\frac{\text{۱}}{n})^{\text{۲}} + (x_{\text{۲}} - t)^{\text{۲}} \right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

حال اگر $\circ \leq x_{\text{۲}} \leq \text{۱}$، آن‌گاه

$$d(x, K_n) = \begin{cases} \frac{\text{۱}}{n} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \\ \left(\frac{\text{۱}}{n^{\text{۲}}} + x_{\text{۲}}^{\text{۲}} \right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

لذا داریم $\lim \inf_{n \longrightarrow \infty} d(x, k_n) = \circ$. به همین ترتیب وقتی $-\text{۱} \leq x_{\text{۲}} \leq \circ$ نیز به‌دست می‌آوریم $\lim \inf_{n \longrightarrow \infty} d(x, k_n) = \circ$. یعنی $I \subseteq \lim \sup_{n \longrightarrow \infty} K_n$

در حالتی که $x \neq \circ$ می‌توان به‌دست آورد که $\lim \inf_{n \longrightarrow \infty} d(x, k_n) \neq \circ$. یعنی اگر $x \notin I$، آن‌گاه $x \notin \lim \sup_{n \longrightarrow \infty K_n}$. بنابراین تساوی $I = \lim \sup_{n \longrightarrow \infty} K_n$ را خواهیم داشت. به همین صورت تساوی $\lim \inf_{n \longrightarrow \infty} K_n = \{(\circ, \circ)\}$ نیز ثابت می‌شود.

□

حدود بالا و پایین به‌وضوح بسته‌اند.(فرض کنیم $y_i \in \lim\sup_{n\longrightarrow\infty} K_n$ و y و $y_i \longrightarrow y$. با فرآیند قطری دنباله‌ی $k_{n,n}$ را به‌دست می‌آوریم که به ازای هر i، $d(y_i, K_{n,n}) \longrightarrow \circ$. $i \longrightarrow \infty$ نتیجه می‌دهد $d(y_i, k_{n,n}) \longrightarrow \circ$.) واضح است که

$$\lim\inf_{n\longrightarrow\infty} K_n \subset \lim\sup_{n\longrightarrow\infty} K_n$$

حد بالا و پایین مجموعه‌های K_n و $\bar{K}_n$ برابرند. زیرا $d(x, K_n) = d(x, \bar{K}_n)$. یک حد بالا ممکن است تهی باشد.(هیچ دنباله‌ای از عناصر $x_n \in K_n$ یک نقطه‌ی انباشتگی ندارد.)

گزاره ۱۱.۱ اگر $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از زیرمجموعه‌های یک فضای متریک باشد، آن‌گاه $\lim\inf_{n\longrightarrow\infty} K_n$، مجموعه حدود دنباله‌ای $x_n \in K_n$ است و $\lim\sup_{n\longrightarrow\infty} K_n$، مجموعه‌ی نقاط انباشتگی دنباله‌های $x_n \in K_n$ است، یعنی حدود زیردنباله‌های $x_{n'} \in K_{n'}$. حد بالا مساوی زیرمجموعه‌ی نقاط انباشتگی دنباله‌هایی است که در شرط زیر صدق می‌کنند

$$\forall\epsilon > \circ \quad \exists N(\epsilon) \quad : \quad \forall n > N(\epsilon) \quad x_n \in B(K_n, \epsilon).$$

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

حال مفاهیم مخروط کانتینژنت بولیگاند، مخروط مجاورت، مشتق کانتینژنت و مشتق مجاورت از یک نگاشت مجموعه ـ مقدار را تعریف می‌کنیم.

گیریم $R_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \circ\}$ و C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از $\mathbb{R}^n$ است و $\hat{x} \in C$.

تعریف ۱۲.۱ مجموعه‌ی $T(C, \hat{x})$ **مخروط کانتینژنت** نسبت به C(مخروط کانتینژنت بولیگاند) در $\hat{x}$ نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x \in T(C, \hat{x})$، دنباله‌های $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ و $\{h_n\} \subset R_+ \backslash \{\circ\}$ موجود باشد به‌طوری که $x_n \longrightarrow x$، $h_n \longrightarrow \circ$ و برای هر n، $\hat{x} + h_n x_n \in C$.

تعاریف معادلی برای مخروط کانتینژنت وجود دارد که آن‌ها را در قالب گزاره بیان می‌کنیم.

گزاره ۱۳.۱ $x \in T(C, \hat{x})$ اگر و تنها اگر دنباله‌های $\{y_n\}$ در C و $\{h_n\} \subset R_+ \backslash \{\circ\}$ وجود داشته باشند به‌طوری که $y_n \longrightarrow \hat{x}$، $h_n \longrightarrow \circ$ و $\frac{y_n - \hat{x}}{h_n} \longrightarrow x$.

اثبات. شرط لازم : قرار می‌دهیم $y_n = \hat{x} + h_n x_n$. به‌وضوح $y_n \in C$، $y_n \longrightarrow \hat{x}$، $h_n \longrightarrow 0$ و
$$\frac{y_n - \hat{x}}{h_n} = \frac{\hat{x} + h_n x_n - \hat{x}}{h_n} \longrightarrow x$$
شرط کافی: دنباله‌ی x_n را مساوی $\frac{y_n - \hat{x}}{h_n}$ در نظر می‌گیریم. لذا $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$، $h_n \longrightarrow 0$،
$x_n = \frac{y_n - \hat{x}}{h_n} \longrightarrow x$ و برای هر n داریم $\hat{x} + h_n x_n = y_n \in C$. □

گزاره ۱۴.۱ مجموعه‌ی $\left\{v \mid \lim\inf_{h \longrightarrow 0^+} \frac{d(\hat{x} + hv, C)}{h} = 0\right\}$ برابر با حد بالایی زیرمجموعه‌های $\frac{C - \hat{x}}{h}$ است.

اثبات.

$$\begin{aligned}\left\{v \mid \lim\inf_{h \longrightarrow 0^+} \frac{d(\hat{x} + hv, C)}{h} = 0\right\} &= \left\{v \mid \lim\inf_{h \longrightarrow 0^+} d(v, \frac{C - \hat{x}}{h}) = 0\right\} \\ &= \lim\sup_{h \longrightarrow 0^+} \frac{C - \hat{x}}{h}\end{aligned}$$

زیرا

$$d(\hat{x} + hv, C) = d(C - \hat{x}, hv) = hd(v, \frac{C - \hat{x}}{h})$$

□

گزاره ۱۵.۱ تساوی زیر برقرار است.

$$T(C, \hat{x}) = \left\{v \mid \lim\inf_{h \longrightarrow 0^+} \frac{d(\hat{x} + hv, C)}{h} = 0\right\}$$

اثبات. فرض می‌کنیم $v \in T(C, \hat{x})$. اول این‌که چون $d(x, K_n) \geq 0$ بنابراین

$$\lim\inf_{h \longrightarrow 0^+} d(v, \frac{C - \hat{x}}{h}) \geq 0 \qquad (I)$$

از این‌که دنباله‌های $\{h_n\}$ و $\{v_n\}$ موجودند به‌طوری که $v_n \longrightarrow v$، $h_n \longrightarrow 0$ و $\hat{x} + h_n v_n \in C$، به دست می‌آوریم

$$\lim\inf_{n \longrightarrow \infty} d(v, \frac{C - \hat{x}}{h}) = 0 \qquad (II)$$

در حالتی که K_h با اندیس h تغییر می‌کند می‌توان تعریف $\limsup\limits_{h\longrightarrow 0^+} K_n$ را چنین نوشت

$$\left\{x\in X : \lim\inf_{h\longrightarrow 0^+}(K_h)=0\right\}=\left\{x\in X : \sup_{r>0}\left(\inf_{h<r} d(x,K_h)\right)=0\right\}$$

. ثابت می‌کنیم رابطه‌ی (I) برابر باصفر است. فرض می‌کنیم $r>0$، در این صورت از $h_n\longrightarrow 0$ نتیجه می‌شود $N_r\in\mathbb{N}$ هست به طوری‌که $h_n<r$، برای هر $n\geq N_r$. مجموعه‌ی چنین n ها را با A_r نمایش می‌دهیم و از رابطه‌ی $A_r\subset(0,r)$ نتیجه می‌گیریم

$$\inf_{n\in A_r} d(v,\frac{C-\hat{x}}{h_n})\geq\inf_{h\in(0,r)} d(v,\frac{C-\hat{x}}{h_n})$$

به عبارت دیگر

$$\inf_{n\geq N_r} d(v,\frac{C-\hat{x}}{h_n})\geq\inf_{h<r} d(v,\frac{C-\hat{x}}{h_n})\qquad (III)$$

دنباله‌ی $\left(d_{n\geq N_r}(v,\frac{C-\hat{x}}{h_n})\right)$ صعودیست، پس

$$\sup_{N_r\in\mathbb{N}}\inf_{n\geq N_r} d(v,\frac{C-\hat{x}}{h_n})\geq\inf_{n\geq N_r} d(v,\frac{C-\hat{x}}{h_n})$$

طرف چپ این نامساوی همان $\lim\inf\limits_{n\longrightarrow\infty} d(v,\frac{C-\hat{x}}{h})$ که طبق (II) صفر است. بنابراین

$$0\geq\inf_{n\geq N_r} d(v,\frac{C-\hat{x}}{h_n})\qquad (IV)$$

حال از مقایسه‌ی رابطه‌ی (IV) با (III) نتیجه می‌شود $0\geq\inf\limits_{h<r} d(v,\frac{C-\hat{x}}{h_n})$. لذا $0\geq\sup\limits_{r>0}\inf\limits_{h<r} d(v,\frac{C-\hat{x}}{h_n})$ و بنابر تعریف به رابطه‌ی $0\geq\lim\inf\limits_{h\longrightarrow 0^+}(K_h)$ دست می‌یابیم که طبق (I) منجر به نتیجه‌ی $\lim\inf\limits_{h\longrightarrow 0^+}(K_h)=0$ می‌شود. حال طبق تعریف داریم $v\in\limsup\limits_{h\longrightarrow 0^+} K_n$ و با توجه به گزاره‌ی قبل شمول به‌دست می‌آید. به‌عکس اگر $v\in\left\{v\mid \lim\inf\limits_{h\longrightarrow 0^+}\frac{d(\hat{x}+hv,C)}{h}=0\right\}$، بنابر گزاره‌ی قبل $v\in\limsup\limits_{h\longrightarrow 0^+}\frac{C-\hat{x}}{h}$. لذا دنباله‌ی $h_n\longrightarrow 0$ هست که $v_n\in\frac{C-\hat{x}}{h_n}$ و $v_n\longrightarrow v$. بنابراین $\hat{x}+h_nv_n\in C$ و این یعنی $v\in T(C,\hat{x})$. □

تعریف ۱۶.۱ مجموعه‌ی $T^b(C,\hat{x})$ یک **مخروط مجاورت** نسبت به C در $\hat{x}$ نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x\in T^b(C,\hat{x})$ و هر دنباله‌ی $\{h_n\}\subset R_+\backslash\{0\}$ که $h_n\longrightarrow 0$، دنباله‌ی

$\{x_n\} \subset \mathbb{R}_n$ وجود داشته باشد به‌طوری که $x_n \longrightarrow x$ و برای هر n، $\hat{x} + h_n x_n \in C$.

گزاره ۱۷.۱ $x \in T^b(C, \hat{x})$ اگر و تنها اگر برای هر دنباله‌ی $\{h_n\} \subset R_+ \setminus \{\circ\}$ که $h_n \longrightarrow \circ$، دنباله‌ی $\{y_n\} \subset C$ وجود داشته باشد به‌طوری که $y_n \longrightarrow \hat{x}$ و $\frac{y_n - \hat{x}}{h_n} \longrightarrow x$.

اثبات. مشابه اثبات گزاره ۱۳.۱ $\square$

گزاره ۱۸.۱ مجموعه‌ی $\left\{ v \mid \lim_{h \longrightarrow \circ^+} \frac{d(\hat{x} + hv, C)}{h} = \circ \right\}$ حد پایینی زیر مجموعه‌های $\frac{C - \hat{x}}{h}$ است.

اثبات.

$$\begin{aligned} \left\{ v \mid \lim_{h \longrightarrow \circ^+} \frac{d(\hat{x} + hv, C)}{h} = \circ \right\} &= \left\{ v \mid \lim_{h \longrightarrow \circ^+} d(v, \frac{C - \hat{x}}{h}) = \circ \right\} \\ &= \lim \inf_{h \longrightarrow \circ^+} \frac{C - \hat{x}}{h} \end{aligned}$$

$\square$

گزاره ۱۹.۱ تساوی زیر برقرار است:

$$T^b(C, \hat{x}) = \left\{ v \mid \lim_{h \longrightarrow \circ^+} \frac{d(\hat{x} + hv, C)}{h} = \circ \right\}$$

اثبات. فرض می‌کنیم $v \in T^b(C, \hat{x})$، دراین‌صورت به‌ازای هر دنباله‌ی $\{h_n\}$ که $h_n \longrightarrow \circ^+$ دنباله‌ی $\{v_n\}$ وجود دارد به‌طوری که $\hat{x} + h_n v_n \in C$. از این نتیجه می‌شود $v_n \in \frac{C - \hat{x}}{h_n}$. چون به ازای هر $h_n \longrightarrow \circ$ داریم $v_n \longrightarrow v$، پس $v \in \lim \inf_{h \longrightarrow \circ^+} \frac{C - \hat{x}}{h}$ و بنابر گزاره قبل شمول به‌دست می‌آید.

برعکس اگر $v \in \left\{ v \mid \lim_{h \longrightarrow \circ^+} \frac{d(\hat{x} + hv, C)}{h} = \circ \right\}$، آن‌گاه $v \in \liminf_{h \longrightarrow \circ^+} \frac{C - \hat{x}}{h}$، لذا به‌ازای هر $h_n \longrightarrow \circ$، $v_n \in \frac{C - \hat{x}}{h_n}$ وقتی $v_n \longrightarrow v$. بنابراین $\hat{x} + h_n v_n \in C$ یعنی $v \in T^b(\hat{x}, C)$. $\square$

تعریف ۲۰.۱ C در $\hat{x}$ **مشتق‌پذیر** است هرگاه $T(\hat{x}, C) = T^b(\hat{x}, C)$.

توجه کنید که از گزاره‌های بیان شده می توان نتیجه گرفت که مخروط کانتینژنت و مخروط مجاورت به‌ترتیب حد بالا و پایین زیرمجموعه‌های $\frac{C-\hat{x}}{h}$ هستند.

در این قسمت مخروط Φ ـ کانتینژنت را که تعمیمی از مخروط کانتینژنت بولیگاند است تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۱.۱ گیریم C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از $\mathbb{R}^n$ باشد و $\hat{x} \in C$. یک نگاشت با مقدار برداری $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را درنظر بگیرید.

i) مجموعه‌ی $T_\Phi(c,\hat{x}) \subset \mathbb{R}^m$ یک **مخروط** Φ **ـ کانتینژنت** نسبت به C در $\hat{x}$ نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $y \in T_\Phi(c,\hat{x})$، دنباله‌های $\{x_n\} \subset C$ و $\{h_n\} \subset R_+ \backslash \{\circ\}$ موجود باشند به‌طوری که $x_n \longrightarrow \hat{x}$، $h_n \longrightarrow \circ$ و $\dfrac{\Phi(x_n)-\Phi(\hat{x})}{h_n} \longrightarrow y$.

ii) مجموعه‌ی $T_\Phi^b(c,\hat{x}) \subset \mathbb{R}^m$، **مخروط** Φ **ـ مجاورت** نسبت به C در $\hat{x}$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $y \in T_\Phi^b(c,\hat{x})$ و هر دنباله‌ی $\{h_n\} \subset R_+ \backslash \{\circ\}$ که $h_n \longrightarrow \circ$، دنباله‌ی $\{x_n\} \subset C$ وجود داشته باشد به‌طوری که $x_n \longrightarrow \hat{x}$ و $\dfrac{\Phi(x_n)-\Phi(\hat{x})}{h_n} \longrightarrow y$.

iii) C، Φ **ـ مشتق‌پذیر** در $\hat{x}$ است هرگاه $T_\Phi(c,\hat{x}) = T_\Phi^b(c,\hat{x})$.

تذکر ۲۲.۱ اگر $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک نگاشت همانی باشد یعنی $\Phi(x) = x$، آن‌گاه مخروط Φ ـ کانتینژنت نسبت به C در $\hat{x}$ با مخروط کانتینژنت نسبت به C در $\hat{x}$ منطبق می‌شود. لذا مخروط Φ کانتینژنت به عنوان تعمیمی ار مخروط کانتینژنت در نظر گرفته می‌شود، زیرا

$$y \in T_\Phi(c,\hat{x})(x) \Longleftrightarrow \exists \{x_n\} \subset C, \{h_n\} \subset R_+ \backslash \{\circ\} \;:\; h_n \longrightarrow \circ, x_n \longrightarrow \hat{x},$$

$$\frac{\Phi(x_n)-\Phi(\hat{x})}{h_n} \longrightarrow y \Longleftrightarrow \frac{x_n - \hat{x}}{h_n} \longrightarrow y \Longleftrightarrow y \in T(C.\hat{x})(x)$$

به‌طور مشابه مخروط Φ ـ مجاورت تعمیمی از مخروط مجاورت است.

۲.۱ نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار

دراین بخش توابعی را معرفی می‌کنیم که به ازای هر عضو از فضای متریک دامنه، زیرمجموعه‌ای از فضای متریک دیگری را نظیر می‌کنند. این دسته از نگاشت‌ها را نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار می‌نامند.

قبل از بیان تعاریف و مفاهیم، ابتدا مثال‌هایی از مسائل کلی و طبیعی ارائه می‌دهیم که از نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار استفاده می‌کنند.

۱) هرزمان که با مسائل معکوس مواجه می‌شویم با نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار برخورد می‌کنیم. یعنی مسائلی که وجود جواب یا منحصر به‌فردیشان برای بعضی مقادیر تضمین شده نیست. نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار به مااجازه می‌دهند از این محدودیت که برای حل معادله، نگاشت باید دوسویی باشد فرار کنیم.

در واقع اولین مثال طبیعی که از نگاشت مجموعه ـ مقدار استفاده می‌شود، معکوس f^{-1} از یک نگاشت تک ـ مقداری f، از X به Y است. همیشه می‌توانیم f^{-1} را به‌عنوان یک نگاشت مجموعه ـ مقدار معرفی کنیم به‌طوری که به هر مقدار y(حتی تهی) مجموعه جواب $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ نسبت به معادله $f(x) = y$ را نسبت می‌دهد.

۲) نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار از ابتدای همکاری‌های فیلیپو[1] و وازسکی [2] در اوایل دهه شصت چارچوب مفیدی را برای نظریه‌ی کنترل[3] فراهم کرده‌اند. این نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار که نگاشت‌های پارامتری نامیده می‌شوند، به خانواده‌ای از نگاشت‌های $x \longrightarrow f(x,u)$ از X به Y مربوط می‌شوند که u در مجموعه‌ای از پارامترهای u امتداد دارد. نگاشت(تک‌مقداری) f پویایی سیستم را توصیف می‌کند که به حالت x سیستم، کنترل u، و

---

[1] $Filippov$

[2] $Wazewski$

[3] نظریه کنترل یک شاخه از مهندسی و ریاضیات است که با رفتار سیستم‌های دینامیکی سر وکار دارد. خروجی مطلوب یک سیستم مرجع نامیده می‌شود. وقتی یک یا تعداد بیشتری از متغیرهای خروجی یک سیستم مکرراً برای دنبال کردن یک مرجع مشخص نیاز باشد، یک کنترلر ورودی‌های سیستم را برای فراهم کردن اثر مطلوب روی خروجی سیستم اداره می‌کند.

سرعت $f(x,u)$ سیستم مربوط می‌باشد. نگاشت مجموعه ـ مقدار U، نگاشت واکنشی [۴] را توصیف می‌کند که به وضعیت x، زیرمجموعه‌ی $U(x)$ از کنترل‌های مجاز را نسبت می‌دهد.

بنابراین نگاشت F که به هر وضعیت x، زیرمجموعه‌ی $F(x)$ از سرعت‌های ممکن را مربوط می‌سازد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x) = f(x, U(x)) = \{f(x,u)\}_{u \in U(x)}$$

لذاسیستم کنترل که به‌وسیله‌ی خانواده‌ی $x'(t) = f(x(t), u(t))$ از معادلات دیفرانسیل پارامتری معین می‌شود که $u(t) \in U(t)$، در واقع به‌وسیله‌ی شمول دیفرانسیل $x'(t) \in F(x(t))$ تعیین می‌گردد.

۳) بهینه‌سازی، مثال‌هایی از مسائلی را فراهم می‌کند که به‌طور طبیعی فاقد جواب منحصر به‌فرد است. گیریم W یک تابع از $X \times Y$ به $\mathbb{R}$ باشد. خانواده‌ای ازمسائل مینمم‌سازی

$$\forall y \in Y \ , \ V(y) = \inf_{x \in X} W(x,y)$$

پارامتری‌شده به‌وسیله پارامتر y را در نظر می‌گیریم. تابع V تابع حاشیه‌ای(نمایش یا مقدار) نامیده می‌شود. برای هر $y \in Y$، $G(y) = \{x \in X \mid W(x,y) = V(y)\}$ را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از جواب‌ها برای مسئله‌ی مینمم‌سازی در نظر می‌گیریم. یکی از پیامدهای اصلی نظریه‌ی بهینه‌سازی، مطالعه‌ی نگاشت مجموعه ـ مقدار G می باشد. (ناتهی بودن ، پیوستگی و دیفرانسیل‌پذیری در مفهوم مناسب و غیره.) G را نگاشت حاشیه‌ای می‌نامیم.

جای تعجب نیست که نظریه‌ی بازی[۵] و اقتصاد ریاضیات، به‌طور طبیعی از نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار استفاده می‌کنند.

حال تعاریف اساسی نگاشت‌های مجموعه ـ مقدار را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲۳.۱ گیریم X و Y فضاهای متریک باشد. یک نگاشت مجموعه ـ مقدار F از X به Y، به‌وسیله‌ی گرافش، که زیرمجموعه‌ی فضای حاصلضرب $X \times Y$ است، مشخص می‌شود.

گراف F عبارت است از

[۴] $feedback$

[۵] بررسی ریاضی بازیها یا مدل‌های انتزاعی وضعیتهای رویارویی از دیدگاه تعیین یک سیاست یا راهبرد بهینه.

$$graphF = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$$

$F(x)$ را تصویر یا مقدار F در x می‌نامیم.

یک نگاشت مجموعه ـ مقدار **غیر جزئی** گفته می‌شود، هرگاه گرافش ناتهی باشد. یعنی حداقل یک عنصر $x \in X$ وجود دارد به‌طوری که $F(x)$ ناتهی است.

F **اکید** است، هرگاه همه‌ی $F(x)$ ها غیر تهی باشند. **قلمرو** F، زیرمجموعه‌ی عناصر $x \in X$ است به‌طوری که $F(x)$ تهی نباشد، یعنی

$$DomF = \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}.$$

تصویر F، اجتماع تصاویر(مقادیر) $F(x)$ است وقتی x بر مجموعه‌ی X تغییر می‌کند. به عبارتی

$$Im(F) = \bigcup_{x\in X} F(x).$$

معکوس F، نگاشت مجموعه ـ مقدار F^{-1} از Y به X است، یعنی

$$x \in F^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in F(x) \Longleftrightarrow (x,y) \in graph(F)$$

بنابراین قلمرو F، برابر با تصویر F^{-1} و مساوی تصویر گراف به‌روی X است و به‌طور متقارن تصویر F، برابر با قلمرو F^{-1} و مساوی با تصویر گراف F به‌روی فضای Y است.

اگر K یک زیرمجموعه از X باشد، $F\mid_K$ **تحدید** F به K است و برابر است با

$$F\mid_K(x) = \begin{cases} F(x) & if \quad x \in K \\ \\ \emptyset & if \quad x \notin K \end{cases}$$

فرض می‌کنیم $\mathcal{P}$ یک خاصیت از یک زیرفضا باشد.(برای مثال بسته‌بودن ، محدب بودن یا...) یک نگاشت مجموعه ـ مقدار خاصیت $\mathcal{P}$ را دارد اگر و تنها اگر گرافش خاصیت $\mathcal{P}$ را داشته باشد.

برای مثال نگاشت مجموعه ـ مقدارT بسته است اگر و تنها گرافش بسته باشد یعنی اگر برای هر $x \in X$ و دنباله‌ی $x_n \subset X$ که $x_n \longrightarrow x$ و هر $y_n \subset Y$ که $y_n \in T(x_n)$ و $y_n \longrightarrow y$