بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

میانگین پذیری تقریبی جبرهای دنباله‌ای باناخ

استاد راهنما:

دکتر حجت اله سامع

استاد مشاور:

دکتر اسماعیل فیضی

پژوهشگر:

زینب کهزادی

شهریور ماه ۱۳۸۹

دانشگاه بوعلی سینا

دانشکده علوم

گروه ریاضی

جلسه دفاع از پایان نامه خانم زینب کهزادی

کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش آنالیز

تحت عنوان :

میانگین پذیری تقریبی جبرهای دنباله‌ای باناخ

Approximate amenability for sequence Banach algebras

به ارزش ۴ واحد در روز چهارشنبه مورخ ۱۳۸۹/۶/۳۱ ساعت ۱۶-۱۴ در محل آمفی تئاتر (۱) و با حضور اعضای هیأت داوران زیر برگزار گردید و با نمره......۱۹/۲...درجه...عالی...... ارزیابی شد.

ترکیب اعضای هیأت داوران :

ردیف	سمت درهیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی ـ گروه/ دانشکده/ دانشگاه	محل امضاء
۱	استاد راهنما	دکتر حجت اله سامع	استادیار- ریاضی ـ علوم ـ بوعلی سینا	
۲	استاد مشاور	دکتر اسماعیل فیضی	استادیار- ریاضی ـ علوم ـ بوعلی سینا	
۳	استاد مدعو	دکتر محمد ابوالقاسمی	استادیار- ریاضی ـ علوم ـ رازی	
۴	داور داخلی	دکتر قربان خلیل زاده رنجبر	استادیار- ریاضی ـ علوم ـ بوعلی سینا	

یاد خدا آرام بخش دلهاست

بی کران سپاسمان به درگاه حق او که قطره ای از اقیانوس بی انتهای علم خود را بر ما عنایت فرمود تا پیوسته ، مشتاق بهره گیری از قطره ای دیگر باشیم.

اینک وظیفه ی خود می دانم با تأسی جستن از حدیث نبوی ((من لم یشکر المخلوق لم یشکرالخالق)) قدردانی خویش را از راهنمایی های بسیار گران قدر، جناب آقای دکتر حجت اله سامع که همواره از هیچ کوششی در خصوص آراستن دانشجویان به زیور علم و دانش و هم چنین علم اخلاق دریغ نورزیده اند، بیان نموده و خالصانه برای ایشان از خداوند منان سلامتی و توفیق روز افزون آرزو می نمایم.

و بی نهایت احساس قدردانی و سپاس را تقدیم می دارم به خانواده ی بی همتایم ، پدرم، تکیه گاه زندگیم، مادرم، اسطوره ی عشق و ایثار ، مهربان خواهرم، عزیزان زندگیم و اسطوره های شادی و امید برادرانم.

و درآخر از تمامی عزیزاتی که در تکمیل و اتمام این پایان نامه مرا یاری نموده اند، تقدیر و تشکر می کنم.

دانشگاه بوعلی سینا

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی

عنوان:

میانگین پذیری تقریبی جبرهای دنباله ای باناخ

نام نویسنده: زینب کهزادی

نام استاد/اساتید راهنما: دکتر حجت اله سامع

نام استاد/اساتید مشاور: دکتر اسماعیل فیضی

دانشکده : علوم پایه	**گروه آموزشی: ریاضی**

رشته تحصیلی: ریاضی محض	**گرایش تحصیلی: آنالیز**	**مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد**
تاریخ تصویب: 88/07/07	**تاریخ دفاع: 89/06/31**	**تعداد صفحات: 80**

چکیده:

در این پایان نامه به بررسی مفهوم جبرهای دنباله ای باناخ و ویژگی های آن پرداخته می شود . بررسی می شود در چه شرایطی جبر دنباله ای باناخ A بر مجموعه ی N میانگین پذیر تقریبی است . اگر $1 \le p < \infty$ آنگاه l^p یک جبر دنباله ای باناخ است و c_{00} در l^p چگال می باشد. این جبرها به گونه ی گسترده تری توسط دلز مورد بحث قرار گرفته اند. در این پایان نامه نشان داده می شود جبرها دنباله ای باناخ میانگین پذیر تقریبی نیستند. ولی این جبرها میانگین پذیر ضعیف می باشند. نتیجه همانندی برای جبرهای وزن دار $l^p(\omega)$ به دست می آید، نشان داده می شود $l^p(\omega)$ برای $1 \le p < \infty$ میانگین پذیر تقریبی نیست.

واژههای کلیدی: مشتق ، جبرهای دنباله ای ، میانگین پذیری تقریبی.

چکیده

در این پایان نامه به بررسی مفهوم جبرهای دنباله‌ای باناخ و ویژگی های آن پرداخته می شود.

بررسی می شود، در چه شرایطی جبر دنباله‌ای باناخ Aبر مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ میانگین پذیر تقریبی است.
اگر $۱ \leq p < \infty$ آن‌گاه l^p یک جبر دنباله‌ای باناخ است و $c_{۰۰}$ در l^p چگال می باشد.
این جبرها به گونه‌ی گسترده تری توسط دلز مورد بحث قرار گرفته است.
در این پایان نامه نشان داده می شود جبرهای دنباله‌ای باناخ، میانگین پذیر تقریبی نیستند. ولی این جبرها میانگین پذیر ضعیف می باشند. نتیجه همانندی برای جبرهای وزن دار $l^p(\omega)$ به دست می آید.
نشان داده می شود $l^p(\omega)$ برای $۱ \leq p < \infty$ میانگین پذیر تقریبی نیست.
واژه‌های کلیدی: مشتق، جبرهای دنباله‌ای، میانگین پذیری تقریبی

فهرست مندرجات

پیشینه

مفهوم میانگین پذیری در سال ۱۹۰۴ با طرح این پرسش لبگ آغاز شد، که آیا تابعی با مجموع جمعی متناهی که تحت یک عمل معین گروه پایا باشد، وجود دارد؟

مفهوم میانگین پذیری جبرهای باناخ به دنبال یافتن ویژگی مناسبی از یک جبر گروهی که با میانگین پذیری گروه مورد نظر معادل باشد، در سال ۱۹۷۲ توسط جانسون معرفی شد. وی نشان داد که میانگین پذیری گروه فشرده موضعی با گروه کوهمولوژی $L^1(G)$ مشخص می شود.

پس از یافتن این ویژگی، آن را میانگین پذیری جبر گروهی نامید و این مفهوم را به کلیه‌ی جبرهای باناخ تعمیم داد.

با این تعریف میانگین پذیری جبرهای باناخ پایه گذاری شد و از آن به بعد وارد شاخه‌های دیگر ریاضیات مانند جبرهای فومن نیومن، فضاهای عملگری و حتی هندسه دیفرانسیل شد. اهمیت و جذابیت این موضوع سبب شد که ریاضیدانان بسیاری به سمت آن گرایش یابند و با ضعیف تر کردن شرایط میانگین پذیری، انواع مفاهیم دیگر آن را معرفی کردند.

در سال ۱۹۸۷، بید، کرتیس و دلز مفهوم میانگین پذیری ضعیف را برای جبرهای باناخ جابجایی ارائه کردند و در سال ۱۹۹۲، گوردآ با معرفی مشتق‌های درونی تقریبی ، البته با در نظر گرفتن، شرط

کران‌داری برای تور موجود، نشان داد که میانگین پذیری جبر باناخ A معادل است با اینکه، هر مشتق $D : A \longrightarrow X$ برای هر $A-$دو مدول X، درونی تقریبی باشد.

در سال ۲۰۰۴ قهرمانی و لوی مفهوم میانگین پذیر تقریبی را معرفی و یک شرط لازم و کافی برای میانگین پذیر تقریبی بودن جبر باناخ پیدا کردند.

دلز، ژانگ و لوی این شرط را بهبود دادند. با بهره گیری از این شرط می توان میانگین پذیری تقریبی دسته بزرگی از جبرهای باناخ را بررسی کرد. یک نمونه از این جبرها، جبر دنباله‌ای است.

دلز، ژانگ و لوی نشان دادند جبر دنباله‌ای l^p برای $1 \leq p < \infty$ میانگین پذیر تقریبی نیست. این جبر کاربرد بسیار در آنالیز هارمونیک و در بررسی جبرهای گروهی دارد. برای نمونه جبر پیچشی $L^2(G)$ هنگامی که G فشرده است، با جبر دنباله‌ای $l^2(\hat{G})$ یکریخت است.

هدف این پایان نامه که شامل ۴ فصل است، بررسی مفهوم میانگین پذیری تقریبی جبرهای دنباله‌ای باناخ است. فصل اول به مباحث مقدماتی اختصاص یافته است که در آن تنها به بیان مختصری از تعاریف و قضیه هایی در آنالیز تابعی و آنالیز حقیقی پرداخته می شود که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. فصل دوم شامل دو بخش میانگین پذیری تقریبی جبرهای باناخ و هم ارزی های سودمندی در باب ساختار آن‌ها می باشد، در فصل ۳ تعریف جبرهای دنباله‌ای و قضایای مربوط به آن بیان شده است و در فصل ۴ نشان داده می شود که جبر دنباله‌ای l^p میانگین پذیر تقریبی نیست.

در پایان نیز دو بخش پیوست، به ترتیب واژه نامه و فهرست مراجع گنجاده شده است.

فصل ۱

مباحث مقدماتی

در این فصل مفاهیم، اصطلاحات و قضیه هایی را ارائه می‌دهیم که ابزارهای اساسی ما در فصل‌های بعد می‌باشند. از آن‌جایی که هدف این پایان‌نامه بررسی میانگین پذیری تقریبی جبرهای دنباله‌ای باناخ است، این فصل شامل ۲ بخش می‌باشد. در بخش اول مفاهیم ابتدایی و مقدماتی را از جبرهای باناخ ارائه می دهیم و در بخش بعدی به تعریف و بررسی مفهوم مشتق می‌پردازیم.

۱—۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

در این بخش به‌طور مختصر به بیان مفاهیم و تعاریفی از جبرهای باناخ می‌پردازیم و قضیه‌های مهمی را در باب ساختار آن‌ها بیان می‌کنیم.

۱—۱ تعریف. فرض کنیم X, Y, Z سه فضای نرم دار روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. نگاشت $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ را دوخطی گویند هرگاه:

۱) برای هر $y \in Y$، نگاشت $x \mapsto \phi(x,y)$، خطی باشد.

۲) برای هر $x \in X$، نگاشت $y \mapsto \phi(x,y)$، خطی باشد.

۱–۲ تذکر. اگر $Z = \mathbb{F}$، ϕ را یک تابعک دوخطی یا فرم دوخطی می نامند. نگاشت دوخطی $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ را کران‌دار گویند هرگاه $M > ۰$ باشد، که

$$\|\phi(x,y)\| \leqslant M \|x\| \|y\|$$

نرم ϕ، با دستور زیر تعریف می شود:

$$\|\phi\| = \sup \{\|\phi(x,y)\| \ ; \ \|x\| \leqslant ۱ \ , \ \|y\| \leqslant ۱\}$$

مجموعه نگاشت‌های دوخطی از $X \times Y$ به Z را با نماد $BL(X,Y;Z)$ نمایش می دهند.

۱–۳ گزاره. با عمل‌های نقطه‌ای $BL(X,Y;Z)$ یک فضای خطی نرم‌دار است. اگر Z یک فضای باناخ باشد آن‌گاه $BL(X,Y;Z)$ یک فضای باناخ است.

اثبات. فضای نرم‌دار بودن $BL(X,Y;Z)$ روشن است. اگر $(\phi_n)_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در $BL(X,Y;Z)$ باشد (که Z، یک فضای باناخ است)، آن‌گاه برای هر $x \in X$، دنباله $(\phi_n(x,\circ))_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در $BL(X,Y;Z)$ است. از این رو چون Z باناخ است، پس عملگر $\phi(x,\circ)$ در $BL(Y;Z)$ هست که $\phi(x,\circ) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x,\circ)$.

$\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ با دستور $\phi(x,y) = \phi(x,\circ)(y)$، یک نگاشت دو خطی کران‌دار است که حد دنباله کوشی $(\phi_n)_{n=۱}^{\infty}$ است. ■

۱–۴ تذکر. به همین روش نگاشت n–خطی $\phi : X_۱ \times X_۲ \times ... \times X_n \longrightarrow Z$ تعریف می شود. مجموعه‌ی همه نگاشت‌های n–خطی از $X_۱ \times X_۲ \times ... \times X_n$ به Z را با نماد $BL(X_۱, X_۲, ..., X_n; Z)$ و اگر $X_۱ = X_۲ = ... = X_n$، با نماد $BL^n(X;Z)$ نمایش می دهند.

۱–۵ تعریف. فضای برداری A روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر می نامیم هرگاه نگاشت دوخطی $\phi : A \times A \to A$ موجود باشد که $\phi(x,y) = x.y$ و برای هر x, y, z متعلق به A و α متعلق به $\mathbb{F}$ دارای ویژگی های زیر باشد:

۱) $x.(y.z) = (x.y).z$

۲) $x.(y+z) = x.y + x.z$ و $(x+y).z = x.z + y.z$

۳) $(\alpha.x).y = \alpha.(x.y) = x.(\alpha.y)$

۱–۶ تذکر. نام کامل چنین جبری، جبر انجمنی خطی است.

۱–۷ تذکر. میدان $\mathbb{F}$ را میدان اسکالر A می نامند، اگر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$، A را یک جبر حقیقی و اگر $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، A را یک جبر مختلط گویند.

۱–۸ تعریف. فرض کنیم E یک مجموعه، X یک فضای خطی روی $\mathbb{F}$ و α عضوی از $\mathbb{F}$ و f, g نگاشت‌هایی از E به X باشند، $f+g$ و αf نگاشت‌هایی از E به X با دستورهای زیر تعریف می شوند:

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s) \quad , (\alpha f)(s) = \alpha f(s) \qquad (s \in E)$$

این دستورها را تعریف نقطه‌ای جمع و ضرب اسکالر می نامند. اگر X یک جبر باشد ضرب نقطه‌ای را با دستور زیر تعریف می کنیم:

$$(fg)(s) = f(s)g(s) \qquad (s \in E)$$

مثال ۱. فرض کنیم E یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. مجموعه‌ی A از همه‌ی نگاشت‌های از E به $\mathbb{F}$ با جمع و ضرب اسکالر و ضرب نقطه‌ای، یک جبر است.

۱—۹ تذکر. فرض کنیم X,Y دو فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند، فضای همه نگاشت‌های خطی از X به Y، با جمع و ضرب نقطه‌ای را با نماد $L(X,Y)$ نمایش می دهیم.

مثال ۲. فرض کنیم X یک فضای خطی روی $\mathbb{F}$ باشد. $L(X,X)$ با ضرب تعریف شده با ترکیب، به گفته دیگر، ضرب تعریف شده با دستور

$$(ST)(x) = S(Tx) \qquad (x \in X)$$

یک جبر است که آن را با نماد $L(X)$ نیز نشان می دهیم.

۱—۱۰ تعریف. همریختی جبری ϕ از جبر A به جبر B یک نگاشت خطی است به گونه‌ای که

$$\phi(x,y) = \phi(x)\phi(y) \qquad (x,y \in A)$$

به گفته دیگر، ϕ از جبر A به جبر B یک نگاشت خطی و ضربی است.

هرگاه $B = \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط) باشد و $\phi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ آن‌گاه ϕ را یک همریختی مختلط می گوییم.

یک تکریختی از A به B یک همریختی یک به یک از A به B را گویند. یک یکریختی از A به B، یک همریختی دو سویه از A به B را گویند.

دو جبر A و B یکریختند اگر یک یکریختی از A به روی B وجود داشته باشد. همریختی پوشا را

برووریختی گویند.

یک زیر نیم گروه از A یک زیر مجموعه‌ی S از A را گویند به گونه‌ای که

$$x, y \in S \implies xy \in S$$

یک زیر جبر از A، یک زیرفضای خطی از A است که یک زیر نیم گروه A نیز باشد.

روشن است که یک زیر جبر B از A، خود یک جبر با همان میدان اسکالر است که ضرب در آن، تحدید ضرب در A به $B \times B$ است.

۱–۱۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای خطی روی $\mathbb{F}$ و A یک جبر روی $\mathbb{F}$ باشد. یک نیم نرم روی X، نگاشت p از X به $\mathbb{R}$ است به گونه‌ای که برای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

الف) $p(x) \geq \circ$

ب) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$

ج) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ یک نرم روی X، یک نیم نرم p روی X است به گونه‌ای که

د) $p(x) = \circ \implies x = \circ$.

یک نرم جبری (نیم نرم جبری)، یک نرم (نیم نرم) روی A است به گونه‌ای که

ه) $p(xy) \leq p(x)p(y) \quad (x, y \in A)$

مثال ۳. $L^{\infty}(\mu)$ یک فضای نرم‌دار است.

۱–۱۲ تذکر. اگر X یک فضای نرم‌دار باشد و برای هر $x, y \in X$ قرار دهیم $d(x, y) = \|x - y\|$ آن‌گاه d یک متریک روی X است از این رو هر فضای نرم‌دار یک فضای متری است. d را متر تولید شده به وسیله نرم می نامند.

۱—۱۳ تعریف. فضای نرم‌دار X را یک فضای باناخ گوییم هرگاه X نسبت به متریک تولید شده به وسیله نرم، فضایی کامل باشد.

۱—۱۴ لم و نمادگذاری. الف) اگر (X, Ω, μ) یک فضای اندازه باشد، برای $1 \leq p < \infty$، $L^p(\mu)$ فضای متشکل از تمام توابع اندازه پذیر f، تعریف شده روی X به گونه‌ای که $\int_X |f|^p d\mu < \infty$ را در نظر می گیریم.

برای هر $f \in L^p(\mu)$ قرار می دهیم:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \quad (1)$$

رابطه (۱) یک نرم روی تعریف می کند، افزون بر این $L^p(\mu)$ یک فضای باناخ است. همچنین $L^\infty(\mu)$ با نرم زبرینه اساسی یک فضای باناخ است.

ب) اگر در قسمت (الف) $X = \mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه $\Omega = P(\mathbb{N})$ مجموعه توان و μ را اندازه شمارشی انتخاب کنیم، آن‌گاه $L^p(\mu)$ در این حالت به l^p، فضای تمام دنباله‌های $x = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots\}$ با جمع و ضرب اسکالر نقطه‌وار با نرم

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^p\right)^{1/p}$$

تبدیل می شود. l^p که گونه‌ی ویژه ای از (الف) است، نیز یک فضای باناخ می باشد. همچنین $l^\infty(\mu)$، فضای متشکل از تمام دنباله‌های کران‌دار با نرم زبرینه یک فضای باناخ است.

اثبات. کتاب آنالیز تابعی دکتر صدیقی و دکتر ریاضی را ببینید. ■

۱—۱۵ گزاره. l^p با ضرب نقطه‌ای یک جبر باناخ است.

اثبات. با نگرش به لم بالا l^p فضای باناخ است. اکنون اگر $f, g \in l^p$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} \|f.g\|_p^p &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i.g_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\|g\|_\infty^p \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^p\right)^{1/p} \\ &= \|g\|_\infty \|f\|_p \leq \|g\|_p \|f\|_p \end{aligned}$$

■

مثال ۴. هر فضای نرم‌دار متناهی–بعد یک فضای باناخ است.

۱–۱۶ تعریف. $l^p(\omega)$ برای $p \geq 1$ و $\omega \in [1,\infty)^{\mathbb{N}}$ به گونه‌ی زیر تعریف می شود:

$$l^p(\omega) = \left\{(a_n); \sum \omega_n |a_n^p|^{1/p} < \infty\right\}$$

یا

$$l^p(\omega) = \left\{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \; ; \; f.\omega^{\frac{1}{p}} \in l^p\right\}$$

در این تعریف ω یک تابع وزن است.

۱–۱۷ قضیه. $l^p(\omega)$ فضای باناخ است.

اثبات. فرض کنیم $x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots)$ و x_n متعلق به $l^p(\omega)$ باشد، داریم:

$$\|x_n - x_m\|_{p,\omega} \longrightarrow 0$$

از سویی $|\xi_i^n - \xi_i^m| \leq \|x_n - x_m\|_{p,\omega}$، پس

$$|\xi_i^n - \xi_i^m| \longrightarrow 0$$

و $\{\xi_i^n\}$ یک دنباله‌ی کوشی در $\mathbb{C}$ است. از این رو $\xi_i \in \mathbb{C}$ وجود دارد که $\xi_i^n \longrightarrow \xi_i$. اکنون

$$\forall \epsilon > 0 \; , \; \exists n_0 \; , \; \forall m, n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_{p,\omega} < \epsilon$$

و

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i |\xi_i^n - \xi_i^m|^p\right)^{1/p} < \epsilon$$

از این رو برای هر k متعلق به $\mathbb{N}$ داریم:

$$(\sum_{i=1}^{k} \omega_i |\xi_i^n - \xi_i^m|^p)^{1/p} < \epsilon \quad (*)$$

در نابرابری $(*)$، اگر $m \longrightarrow \infty$ آن‌گاه برای هر k متعلق به $\mathbb{N}$ داریم:

$$(\sum_{i=1}^{k} \omega_i |\xi_i^n - \xi_i|^p)^{1/p} \leq \epsilon$$

اگر $k \longrightarrow \infty$ آن‌گاه

$$(\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i |\ \xi_i^n - \xi_i|^p)^{1/p} \leq \epsilon \Longrightarrow \|x_n - x\| p, \omega \leq \epsilon$$

پس

$$\|x_{n_0} - x\|_{p,\omega} \leq \epsilon$$

از سویی

$$\|x\|_{p,\omega} \leq \|x_{n_0} - x\|_{p,\omega} + \|x_{n_0}\|_{p,\omega} < \epsilon$$

پس $x \in l^p(\omega)$ به دست آمد، به گونه‌ای که

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \ , \ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x\|_{p,\omega} \leq \epsilon$$

به گفته دیگر، $x_n \longrightarrow x$ با نرم $\|.\|_{p,\omega}$. ■

۱−۱۸ نکته. برای اینکه $l^p(\omega)$ فضای باناخ باشد باید $\omega > 0$ باشد. زیرا اگر $\omega = 0$ آن‌گاه $\omega(n) = 0$. پس $\|\delta_n\| = 0$ در نتیجه $\delta_n = 0$ و این تناقض است زیرا می دانیم که $\delta_n \neq 0$.