بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

فضای دوگان نیم خطی و قضیه آلااغلو-بورباکی برای زوج دوگان نیم خطی

استاد راهنما

دکتر محمدرضا مطلبی

استاد مشاور

دکتر محمد ضارب نیا

پژوهشگر

وحید ولیزاده

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد رضا مطلبی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر محمد ضارب نیا که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

ازکلیه استادهای گرامی دوران تحصیلم و نیز کارکنان محترم دانشکده علوم ریاضی که در مدت تحصیلات اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از دوستان عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

وحید ولیزاده

شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی: ولیزاده　　　　نام: وحید

عنوان پایان‌نامه: فضای دوگان نیم خطی و قضیه آلاغلو-بورباکی برای زوج دوگان نیم خطی

استاد راهنما: دکترمحمدرضا مطلبی

استاد مشاور: دکتر محمد ضارب نیا

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　رشته: ریاضی محض　　گرایش: آنالیز

دانشگاه: محقق اردبیلی　　دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱/۰۶/۲۰　　تعداد صفحه :۸۶

کلید واژه‌ها: نگاشت نیم خطی ، دوگان نیم خطی، هم‌پیوستگی، قضیه آلاغلو-بورباکی

چکیده در این پایان‌نامه مفهوم نگاشت نیم خطی بین دو فضای برداری توپولوژیک X و Y را تعریف نموده و مجموعه تابعک های نیم خطی پیوسته روی فضای برداری توپولوژیک X یعنی فضای دوگان نیم خطی را در نظر می‌گیریم . فضاهایی را با دوگان نیم خطی غیر بدیهی معرفی کرده و مورد بررسی قرار خواهیم داد به طوری که دوگان معمولی فضاهای مذکور بدیهی می‌باشد . در ادامه با لحاظ کردن دوگان نیم خطی نتایج زیادی از نظریه دوگان معمولی توسیع داده می‌شود . بویژه صورتی از قضیه آلاغلو-بورباکی را بیان و ثابت خواهیم کرد .

فهرست مطالب

مقدمه د

۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی ۱

۱.۱ فضای های متریک ۱

۲.۱ فضاهای برداری توپولوژیک ۲

۳.۱ پارانرم و فضای نیم محدب ۷

۴.۱ فضاهای L^p ۱۰

۵.۱ توپولوژی ضعیف * ۱۴

۶.۱ تور ۱۴

۷.۱ قضایای مقدماتی ۱۷

۲ نگاشت های نیم خطی و فضاهایی با دوگان نیم خطی ۲۰

۱.۲ تعریف نگاشت نیم خطی ۲۰

۲.۲ فضاهای با دوگان نیم خطی ۲۲

۳.۲ نتایجی از دوگان نیم خطی ۲۷

۴.۲ مثالهایی از دوگان نیم خطی در فضاهای L^p ۳۵

۳ نتایجی بر زوج دوگان نیم خطی $(X, X^{(\gamma,U)})$ ۴۳

۱.۳ قطبی نیم‌خطی ۴۳

۲.۳ توپولوژی ضعیف * برای نگاشت‌های نیم خطی ۶۰

۳.۳ قضایای آلاغلو-بورباکی و باناخ- آلاغلو ۶۱

مراجع ۸۳

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۴

مقدمه

هدف اصلی این پایان‌نامه بررسی دوگان نگاشت های نیم خطی می‌باشد. تحقیق اولیه روی دوگان نگاشت های نیم خطی اولین بار در سال ۲۰۱۱ میلادی توسط رانگلو[1] صورت گرفت. رانگلو برای اولین بار در سال ۲۰۰۹ میلادی مفهوم نگاشت نیم خطی را در مرجع [7] تعریف کرده و خانواده تمام نگاشت های نیم خطی در $\mathbb{R}$ را با نماد $\mathcal{L}_{c,\delta}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ نشان داد. در واقع، نگاشت های نیم خطی توسیعی از نگاشت های خطی می باشد به طوری که تعاریف و قضایای اثبات شده برای نگاشت های خطی می‌تواند برای نگاشت های نیم خطی نیز توسیع داده شود به طوری که گسترش آنها برای نگاشت های نیم خطی جالب و پیچیده می باشد از جمله در مرجع [7] قضیه هم پیوستگی و اصل کرانداری یکنواخت و قضیه باناخ اشتاین هاوس برای نگاشت های نیم خطی توسیع داده شده است. همچنین قضیه هم پیوستگی و اصل کرانداری یکنواخت و قضیه باناخ اشتاین هاوس برای نگاشت های نیم خطی ضعیف که توسیعی از نگاشت های نیم خطی ضعیف می باشد. اثبات شده است.

در مرجع [11] نشان داده شده است که نگاشت های نیم خطی زیر مجموعه محض نگاشت های نیم خطی ضعیف* است و هر عملگر خطی T بسیاری از توابع غیر خطی در خانواده نگاشت های نیم خطی تولید می نماید. همچنین در مرجع [11] نگاشت های UB معرفی شده و نشان داده شده است که نگاشت های نیم خطی حالت خاصی از نگاشت های UB می‌باشد. در نهایت قضیه اصل کرانداری یکنواخت برای فضای برداری توپولوژیک مرتب شده اثبات می شود.

در این پایان نامه که عمداً مطالب آن از مرجع [6] می باشد هدف بررسی دوگان نگاشت های نیم خطی است.

---
[1] Ronglu

در فصل دوم ابتدا تعریف جدیدی برای نگاشت نیم خطی ارائه می شود و خانواده تمام نگاشت‌های نیم خطی در دو فضای برداری توپولوژیک X, Y برای تابع $\gamma \in C(۰)$ و همسایگی های $U \in N(X)$ را با نماد $\mathcal{L}_{\gamma,U}(X,Y)$ نشان خواهیم داد. با استفاده از تعریف خانواده نگاشت‌های نیم خطی، دوگان نیم خطی را خانواده تمام نگاشت‌های نیم خطی پیوسته تعریف کرده و با نماد

$$X^{(\gamma,U)} = \{f \in \mathcal{L}_{\gamma,U}(X,\mathbb{K}) : \text{پیوسته است } f\}$$

نشان خواهیم داد؛ در واقع دوگان نگاشت های نیم خطی توسیعی از دوگان نگاشت های خطی می‌باشد که آن را در بر خواهد داشت و تمام مفاهیم مربوط به آن برای دوگان نگاشت نیم خطی نیز مطرح خواهد بود. مفاهیم هم‌پیوستگی و کرانداری نقطه به نقطه برای نگاشت های نیم خطی تعریف می شود که از مرجع [7] قضایای کاربردی نیز ارائه خواهد شد. در ادامه به بررسی فضاهای با دوگان نیم خطی غیر صفر پرداخته و با یک مثال نقض نشان خواهیم داد هر تابع پارانرم ممکن است نیم خطی نباشد. همچنین ثابت می شود هر فضای برداری توپولوژیک هاسدورف با پایه شولدر[۲] و هر فضای برداری توپولوژیک نیم محدب دارای دوگان نیم خطی ناشمارا می باشند و مثال‌های متعددی ارائه می شود. در پایان این فصل نشان می‌دهیم فضای $L^p[۰,۱]$ $(۰ < p < ۱)$علاوه بر این که دوگان معمولی آن صفر است ولی دوگان نیم خطی ناشمارا دارد و فضاهای فرشه جدایی پذیر دارای دوگان نیم خطی صفر است.

در فصل سوم برای زوج دوگان نیم خطی $(X, X^{(\gamma,U)})$ تعریف قطبی ارائه می‌نماییم و با استفاده از آن قضایای مهمی بیان و ثابت می شود. تعریف توپولوژی ضعیف*، فشرده ضعیف* و به طور نسبی فشرده ضعیف* را برای زوج دوگان نیم خطی $(X, X^{(\gamma,U)})$ تعریف کرده و با استفاده از آنها حالتی از قضیه مهم آلااغلو-بورباکی[۳] را برای زوج دوگان نیم خطی $(X, X^{(\gamma,U)})$ بیان و ثابت خواهیم کرد. با استفاده از این قضیه، قضیه مهم و کاربردی باناخ-آلااغلو [۴]را برای زوج دوگان $(X, X^{(\gamma,U)})$ بیان و ثابت خواهیم کرد. در ادامه نشان خواهیم داد هر فضای فشرده ضعیف*، هم‌پیوسته و قطبی در دوگان نیم خطی فضاهای متریک فشرده می‌باشند و نتایج متعددی از زوج دوگان $(X, X^{(\gamma,U)})$ را ارائه خواهیم

[۲] Schauder
[۳] Alaoglu-Bourbaki
[۴] Banach-Alaoglu

کرد.

تحت شرایطی نشان خواهیم داد

$$\mathcal{L}_{\gamma,U}(X,Y) = \mathcal{L}_{c,\delta}(X,Y)$$

و با استفاده ار آن برقراری رابطه

$$\mathbb{R}^{(\gamma,U)} = \mathbb{R}^{(c,\delta)}$$

را بیان خواهیم نمود.

در پایان تحت شرایطی نشان خواهیم داد هر زیر مجموعه دوگان نیم خطی دارای خاصیت فشرده دنباله‌ای است و قضایا و نتایج گوناگونی در این زمینه ارائه خواهیم نمود. قضیه باناخ-آلااغلو که اولین بار در سال **۱۳۳۲** توسط استفان باناخ[۵] در مورد گوی‌های واحد یکه در فضای برداری توپولوژیک با دوگان معمولی بیان و اثبات گردید و حالت کلی تر آن در سال **۱۳۴۰** توسط لیونیداس آلااغلو[۶] بیان و ثابت گردید به همین دلیل نام قضیه باناخ-آلااغلو نامگذاری شد.

[۵] Stefan Banach
[۶] Leonidas Alaoglu

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ فضای های متریک

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی دلخواه و d تابع حقیقی بر $X \times X$ باشد به طوری که به ازای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم

۱- $d(x, x) = ۰$،

۲- $d(x, y) = d(y, x) \geq ۰$،

۳- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$،

در این صورت d را **متر نما** روی X می نامند و اگر علاوه بر سه شرط بالا شرط زیر برقرار باشد

۴- هرگاه $d(x, y) = ۰$ آنگاه $x = y$.

متر نمای d متر خواهد بود و (X, d) فضای متریک خواهد بود.

مثال ۲.۱.۱. *به ازای هر $x, y \in \mathbb{K}$ تعریف می‌کنیم*

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{۱ + |x - y|}$$

در این صورت $d(x, y)$ متر نما است زیرا

$$d(x, x) = \frac{|x - x|}{۱ + |x - x|} = ۰$$

و

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{۱ + |x - y|} = \frac{|y - x|}{۱ + |y - x|} d(y, x) \geq ۰$$

و برای خاصیت سوم آن داریم

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

اگر و فقط اگر

$$\frac{|x-z|}{1+|x-z|} \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|}$$

اگر و فقط اگر

$$\frac{|x-z|}{1+|x-z|} \leq \frac{|x-y|+|x-y||y-z|+|y-z|+|x-y||y-z|}{1+|x-y|+|y-z|+|x-y||y-z|}$$

با توجه به این که مخرج کسرها مثبت است نامساوی اخیر برقرار است اگر و فقط اگر

$$\begin{aligned}|x-z|(1+|x-y|+|y-z|+|x-y||y-z|) \leq{}& |x-y|\\ &+|x-y||y-z|+|y-z|+|x-y||y-z|\\ &+|x-z||x-y|+|x-y||y-z||x-z|\\ &+|x-z||y-z|+|x-z||x-y||y-z|\end{aligned}$$

پس از ساده کاری خواهیم داشت

$$|x-z| \leq |x-y|+|y-z|+2|x-y||y-z|+|y-z||x-z||y-z|$$

نامساوی اخیر برقرار است زیرا $|x-z| \leq |x-y|+|y-z|$ *و بقیه اعضای سمت راست نامنفی است.*

حال فرض کنید $d(x,y) = 0$ *آنگاه* $x = y$ *لذا تابع معرفی شده متر می‌باشد.*

۲.۱ فضاهای برداری توپولوژیک

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه A را **شمارا** گوییم در صورتی که با $\mathbb{N}$ هم عدد باشد. مجموعه نامتناهی را که شمارا نباشد ناشمارا گویند. هرگاه مجموعه ای متناهی یا شمارا باشد منتها شمارا است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{K}$ میدان اسکالر باشد. **فضای برداری** روی $\mathbb{K}$ مجموعه ای است مانند X که عضوهایش را بردار نامیده و در آن دو عمل **جمع** و **ضرب اسکالر** تعریف شده‌اند که از خواص جبری آشنای زیر برخوردارند:

(الف) به هر جفت از بردارهای x, y برداری مانند $x+y$ چنان نظیر است که

$$x+(y+z)=(x+y)+z \qquad x+y=y+x$$

X بردار منحصر به فردی مانند صفر دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$ ، $x+0=x$؛ و به ازای هر $x \in X$ بردار منحصر به فردی مانند $-x$ چنان نظیر است که $x+(-x)=0$،

(ب) به هر جفت (α, x) با $\alpha \in \mathbb{K}$ و $x \in X$ یک بردار مانند αx چنان نظیر است که

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \quad \text{و} \quad 1x=x$$

و دو قانون پخشپذیری زیر برقرار باشد:

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \quad \text{و} \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$

یک فضای برداری حقیقی فضایی است که در آن $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ و یک فضای برداری مختلط فضایی است که در آن $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه بوده و $p(X)$ گردایه تمام زیر مجموعه‌های X باشد. $\tau \subset p(X)$ را **توپولوژی** در X گویند هرگاه

۱- $X, \emptyset \in \tau$،

۲- به ازای هر $A, B \in \tau$، $A \cap B \in \tau$،

۳- به ازای هر $\alpha \in I$ که $A_\alpha \in \tau$ داریم $\cap A_\alpha \in \tau$.

عضوهای τ را مجموعه‌های باز در X گویند و (X, τ) را فضای توپولوژیک می‌نامند.

تعریف ۴.۲.۱. فضای توپولوژیک (X,τ) را **هاسدورف** گویند هرگاه به ازای هر $x,y \in X$ با شرط $x \neq y$ همسایگی‌های v_x, v_y موجود باشند به قسمی که $v_x \cap v_y = \emptyset$.

تعریف ۵.۲.۱. گردایه γ از همسایگی‌های نقطه $p \in X$ را **پایه موضعی** در p گویند هرگاه هر همسایگی p شامل عضوی از γ باشد.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد. گردایه B را **پایه توپولوژی** گویند هرگاه

۱- به ازای هر $x \in X$ عضوی مانند $b \in B$ وجود داشته باشد به قسمی که $x \in b$،

۲- به ازای هر $x \in X$ و هر $b_1, b_2 \in B$ که $x \in b_1 \cap b_2$ باشد عضوی مانند $b_3 \in B$ وجود داشته باشد به قسمی که $x \in b_3 \subset b_1 \cap b_2$.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید X فضای برداری بوده و τ یک توپولوژی در آن باشد. (X,τ) را **فضای برداری توپولوژیک** گویند هرگاه

۱- به ازای هر $x \in X$، $\{x\}$ نسبت به توپولوژی τ بسته باشد،

۲- دو عمل جمع و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشد؛ یعنی

(الف) پیوستگی عمل جمع: نگاشت

$$+ : X \times X \longmapsto X$$

$$+ : (x,y) = x + y$$

پیوسته است هرگاه به ازای $x_1, x_2 \in X$ و هر همسایگی V از $x_1 + x_2$ همسایگی V_1 از x_1 و V_2 از x_2 موجود باشد به طوری که

$$V_1 + V_2 \subset V$$

(ب) پیوستگی عمل ضرب:نگاشت

$$\bullet : \mathbb{K} \times X \longmapsto X$$

$$\bullet : (\alpha, x) = \alpha \bullet x$$

پیوسته است هرگاه $\alpha \in \mathbb{K}$ و $x \in X$ به ازای هر همسایگی W از αx همسایگی V از x و اسکالر $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر b با شرط $|b - \alpha| < \delta$ آنگاه

$$bV \subset W.$$

تعریف ۱.۲.۸. فرض کنید $A \subset X$. در این صورت A را **محدب** گویند هرگاه به ازای هر اسکالر t با شرط $0 \leq t \leq 1$ داشته باشیم

$$tA + (1 - t)A \subset A.$$

تعریف ۱.۲.۹. فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک باشد. $B \subseteq X$ را **کراندار** گویند هرگاه به ازای هر همسایگی باز V از صفر اسکالر $\delta > 0$ای وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $r > \delta$ داشته باشیم

$$B \subseteq rV.$$

تعریف ۱.۲.۱۰. فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک باشد. X را **موضعاً محدب** گویند هرگاه پایه موضعی B موجود باشد به قسمی که هر عضو B محدب گردد.

تعریف ۱.۲.۱۱. فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک باشد. X را **موضعاً کراندار** گویند هرگاه صفر دارای همسایگی کراندار باشد.

تعریف ۱.۲.۱۲. فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک باشد. X را **متر پذیر** گویند هرگاه متر d موجود باشد که با توپولوژی فضا سازگار گردد.

تعریف ۱.۲.۱۳. فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک باشد. X را $F-$ **فضا** گویند هرگاه متر کامل و پایای d موجود باشد که با توپولوژی فضا سازگار گردد.

تعریف ۱.۲.۱۴. فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک باشد. X را **فضای فرشه** گویند هرگاه $F-$فضا و موضعاً محدب باشد.

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنید X فضای برداری توپولوژیک باشد. X **نرم پذیر** است اگر یک نرم بر X چنان باشد که متر القا شده به وسیله آن با توپولوژی فضا سازگار باشد.

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. علامت $\Lambda : X \longmapsto Y$ بدین معنی است که Λ یک نگاشت از X به Y است حال فرض کنید X و Yفضاهای برداری باشند. گوییم $\Lambda : X \longmapsto Y$ خطی است هرگاه به ازای هر x و y وجمیع اسکالرهای α و β،

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\Lambda(x) + \beta\Lambda(y).$$

نگاشتهای خطی از X به توی میدان اسکالر $\mathbb{K}$ را تابعک خطی می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنید X و Y فضای برداری توپولوژیک باشند. گردایه تمام نگاشت‌های خطی کراندار از X به Y را با $B(X,Y)$ نشان می‌دهند.

هرگاه Y میدان اسکالر در نظر گرفته شود آنگاه $B(X,\mathbb{K})$ را فضای دوگان خطی می‌نامند یا به عبارت دیگر

$$X' = B(X,\mathbb{K}) = \{f : X \longmapsto \mathbb{K} \ \text{کراندار و خطی است}\ f\}.$$

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنید K فضای هاسدورف فشرده باشد. در این صورت $C(K)$ را گردایه تمام توابع مختلط پیوسته روی K می‌نامند به قسمی که هر عضو آن نسبت به عمل جمع و ضرب اسکالر فضای برداری باشد. نرم در آن به صورت زیر است

$$\|f\|_\infty = \begin{cases} \sup\{|f(x)| \ ; \ x \in K\} & \text{هرگاه} \quad K \neq \emptyset, \\ 0 & \text{هرگاه} \quad K = \emptyset. \end{cases}$$

تعریف ۱.۲.۱۹. فرض کنید (S,τ) فضای برداری توپولوژیک باشد و $\emptyset \neq A \subset S$. توپولوژی زیر فضایی در A عبارت است از

$$\tau \mid A = \{A \cap G \ ; \ G \in \tau\}.$$

$(A, \tau \mid A)$ را یک زیر فضای (S,τ) می‌نامند.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید S فضای برداری توپولوژیک باشد. x یک نقطه انباشتگی دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در (S,τ) است اگر و فقط اگر هر $x \in G \in \tau$ و به ازای هر $N \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$G \cap \{x_n \, ; \, n \geq N\}.$$

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنید (S,τ) فضای برداری توپولوژیک باشد. (S,τ) **فشرده دنباله‌ای** است اگر و فقط اگر هر دنباله در (S,τ) دارای زیر دنباله‌ای باشد که همگرا به یک نقطه S باشد.

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنید (X,τ) فضای برداری توپولوژیک و $S \subset X$. S **کراندار کلی** می‌باشد اگر به ازای هر همسایگی u از صفر مجموعه متناهی مانند F موجود باشد به قسمی که

$$S \subset F + u.$$

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنید S یک فضای توپولوژیک باشد گوییم مجموعه $E \subset S$ هیچ جا چگال است اگر $\overline{E}^{\circ}$ تهی باشد.

مجموعه‌های از رسته اول در S مجموعه‌هایی هستند که اجتماع شمارا از مجموعه‌های هیچ جا چگال باشند. هر زیر مجموعه S که از رسته نوع اول نباشد از رسته دوم در S خوانده می‌شود.

تعریف ۲۴.۲.۱. X **جدایی پذیر** است اگر زیر مجموعه چگال شمارش پذیر داشته باشد، به عبارت دیگر $A \subset X$ شمارش پذیر باشد و $\overline{A} = X$.

مثال ۲۵.۲.۱. $\mathbb{R}$ *جدایی پذیر است زیرا زیر مجموعه چگال و شمارش پذیری چون* $\mathbb{N}$ *دارد.*

۳.۱ پارانرم و فضای نیم محدب

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X فضای برداری باشد. به ازای هر $x \in X$ **پارانرم** x به صورت $||x||$نوشته می‌شود و به ازای هر $x,y \in X$ دارای خواص زیر است

۱- $||\circ|| = \circ$،

۲- $||-x|| = ||x||$،

۳- $||x|| \geq 0$،

۴- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$،

۵- هرگاه $\{t_n\}$ دنباله‌ای از اسکالر ها با شرط $t_n \longrightarrow t$ باشد. در این صورت هرگاه $\{x_n\} \subset X$، $||x_n - x|| \longrightarrow 0$ آنگاه $||t_n x_n - tx|| \longrightarrow 0$،

و هرگاه علاوه بر شرایط بالا شرط زیر برقرار باشد **پارانرم کلی** نامیده خواهد شد.

۶- هرگاه $x = 0$ آنگاه $||x|| = 0$.

مثال ۲.۳.۱. *هر فضای پارانرم، فضای برداری توپولوژیک است زیرا نسبت به عمل جمع پیوسته است فرض کنید.*

$$x_n \longmapsto x \quad \text{و} \quad y_n \longmapsto y$$

دراین صورت

$$d(x_n + y_n, x + y) = \|x_n + y_n - x - y\|$$
$$\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$$

در نتیجه $d(x_n + y_n, x + y) \longrightarrow 0$ *. همچنین نسبت به عمل ضرب پیوسته است زیرا اگر فرض کنیم*

$$x_n \longmapsto x \quad \text{و} \quad t_n \longmapsto t$$

آنگاه

$$d(t_n x_n, tx) = \|t_n x_n - tx\| \longrightarrow 0.$$

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید P گردایه پارانرم های غیر صفر روی فضای برداری X باشد. آنگاه σP به صورت $\vee\{p : p \in P\}$تعریف می‌شود که توپولوژی برداری روی X نامیده می‌شود.

گزاره ۴.۳.۱. *فرض کنید σP توپولوژی برداری روی X باشد. $x_\alpha \longrightarrow x$، اگر و فقط اگر به ازای هر پارانرم $p \in P$، $p(x_\alpha) \longrightarrow p(x)$.*

اثبات. رجوع شود به [10,4.1]. □

تعریف ۵.۳.۱. یک $p-$**نیم نرم** $||.||$ $(۰ < p \leq ۱)$ روی فضای برداری X عبارت است از تابعی نامنفی بر Xبه طوری که هرگاه به ازای هر $x,y \in X$ و $t \in \mathbb{K}$ در شرایط زیر صدق کند

۱- $||x|| \geq ۰$،

۲- $||tx|| = |t|^p||x||$،

۳- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$،

اگر علاوه بر شرایط فوق داشته باشیم

۴) هرگاه $||x|| = ۰$ آنگاه $x = ۰$.

آنگاه هر $p-$نیم نرم یک $p-$ نرم روی X خواهد بود.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید X فضای باناخ باشد. دنباله $\{x_n\}_{n\in N} \in X$ یک **پایه شولدر** است هرگاه به ازای هر $x \in X$، $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از اسکالرها موجود باشد به‌طوری که x نمایش منحصر به‌فردی به‌شکل زیر داشته باشد

$$x = \sum_{n=۱}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

به این معنی که مجموع همگرا به توپولوژی نرم است یعنی:

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} ||x - \sum_{n=۱}^{N} \alpha_n x_n|| = ۰.$$

تعریف ۷.۳.۱. یک فضای برداری توپولوژیک X **نیم محدب** است اگر و فقط اگر یک خانواده $\{p_\alpha\}$ از $k_\alpha-$ نیم نرمهای پیوسته $(۰ < k_\alpha \leq ۱)$ موجود باشد به‌طوری که مجموعه

$$\{x \in X : p_\alpha(x) < ۱\}$$

پایه همسایگی در ۰ باشد، به عبارت دیگر

$$\{\{x : p_\alpha(x) < \frac{۱}{n}\} \ : \ p_\alpha \in P, n \in \mathbb{N}\}$$

یک پایه از $N(X)$ است، که در آن P خانواده‌ای از همه $p-$ نیم نرمهای پیوسته با شرط $0 < p \leq 1$ می‌باشد.

گزاره ۱.۳.۸. *فضای برداری توپولوژیک X موضعاً کراندار و موضعاً محدب است اگر وفقط اگر هر $p-$ نرم ($0 < p \leq 1$) بر X چنان باشد که با توپولوژی فضا سازگار گردد.*

اثبات. رجوع شود به [8,1.8]. □

گزاره ۱.۳.۹. *فضاهای موضعاً کراندار و موضعاً محدب هر دو نیم محدب هستند.*

اثبات. رجوع شود به [3,5.2]. □

۱.۴ فضاهای L^p

تعریف ۱.۴.۱. اگر X یک فضای اندازه دلخواه با اندازه مثبت μ باشد و $0 < p < +\infty$ و f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد، تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}$$

و $L^p(\mu)$ از تمام f هایی تشکیل می‌شود که

$$\|f\|_p < +\infty.$$

و ما $\|f\|_p$ را نرم L^pی f می‌نامیم.

اگر μ اندازه لبگ بر $\mathbb{R}^K$ باشد به جای $L^p(\mu)$ می‌نویسیم $L^p(\mathbb{R}^K)$.

و اگر μ اندازه شمارشی بر مجموعه A باشد به جای $L^p(\mu)$ می‌نویسیم $\ell^p(A)$ یا اگر A شمارش پذیر باشد، فقط با ℓ^p نشان می‌دهیم. هر عضو ℓ^p را می‌توان یک دنباله مختلط $X = \{S_n\}$ در نظر گرفت و

$$\|X\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |S_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$