دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

روشهای عددی با مرتبه بالا برای حل معادلات سهموی تصادفی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا سهیلی

تحقیق و نگارش:

سمیه سروری

شهریورماه ۹۰

چکیده

بسیاری از پدیده‌های طبیعی را می توان بوسیله مدلهایی که منجر به معادلات دیفرانسیل می شوند مدلسازی نمود. در بسیاری از مواقع چون بعضی از پارامترها و داده های اولیه مسئله بدلیل نداشتن اطلاعات کافی از مکانیزم سیستم بطور دقیق مشخص نیستند. رفتار سیستم در بعضی از شرایط نمایش قطعی ایده‌آلی را در بر نخواهد داشت. ازاینرو بمنظور جبران کمبود اطلاعات سیستم و همچنین داشتن توصیف حقیقی‌تری از رفتار سیستم، اغتشاش تصادفی در معادله اعمال می شود که این در حقیقت منجر به معادلات دیفرانسیل تصادفی ($SDEs$ [۱]) خواهد شد. در عمل معادلات دیفرانسیل تصادفی با مشتقات نسبی ($SPDE$ [۲]) نسبت به معادلات دیفرانسیل تصادفی معمولی ($SODE$ [۳]) دقیق تر و کامل تر می باشند که در این پایان نامه معادلات دیفرانسیل تصادفی با مشتقات نسبی بحث شده‌اند. جوابهای عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی با مشتقات نسبی تقریباً شبیه به معادلات دیفرانسیل تصادفی معمولی می‌باشد که روشهای تیلور تصادفی مبنی بر کاربرد تکراری فرمول ایتو [۴] تولید شده و برای بدست آوردن روشهای عددی مرتبه بالاتر مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در حالت کلی یک فرمول ایتو برای $SPDEs$ در دسترس نمی‌باشد با وجود این بسطهای تیلور تصادفی برای $SPDEs$ از شکل نمایشی میلد [۵] این معادلات بدست می آید که از نیاز به فرمول ایتو اجتناب می‌کند. در اینجا بسطهای تیلور تصادفی جدید و روشهای عددی مبنی بر آنها بحث خواهد شد.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل تصادفی با مشتقات نسبی، معادلات دیفرانسیل تصادفی معمولی، بسطهای تیلور تصادفی.

---

[۱] Stochastic Differential Equation

[۲] Stochastic Partial Differential Equation

[۳] Stochastic ordinary Differential Equation

[۴] Ito formula

[۵] Mild sense

فهرست مندرجات

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه ۱

۱—۱ مقدمه ۲

۱—۲ نگرش کلی بر معادلات دیفرانسیل تصادفی با مشتقات جزئی ۲

۱—۳ نگاه اجمالی بر روشهای عددی در حل $SPDE$ ۷

۲ حسابان تصادفی ۱۱

۲—۱ مقدمه ۱۲

۲—۲ نظریه احتمال ۱۲

۲—۳ فرآیندهای تصادفی ۱۶

۲–۴ فرآیند وینر و اغتشاش خالص ۱۹

۲–۵ انتگرالهای تصادفی ۲۴

۲–۶ فرمول ایتو و کاربردهای آن ۲۷

۳ بسط تیلور تصادفی ۳۸

۳–۱ مقدمه ۳۹

۳–۲ مروری بر $SODEs$ ۳۹

۳–۳ یک روش عددی مرتبه بالا ۴۲

۳–۴ بسطهای تیلور تصادفی در فضای باناخ ۴۹

۴ روشهای عددی از مرتبه بالا برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی با مشتقات نسبی ۶۹

۴–۱ مقدمه ۷۰

۴–۲ روش‌های عددی بر اساس بسطهای تیلور ۷۰

۴–۳ نتایج عددی ۷۴

۴–۴ نتیجه‌گیری ۷۹

۴–۵ پیشنهاد ۸۰

A واژه‌نامه ۸۱

B منابع ۸۴

فهرست نمودارها

نمودار ۵—۱: خطممتد، نمودارحاصل از خطای روش اویلرنمایی وخطنقطه چین، خطی با شیب $\frac{۱}{۳}=$ است ۷۸

نمودار ۵—۲: خطممتد، نمودارحاصل از خطای روش رانگ کوتا وخطنقطه چین، خطی با شیب $\frac{۱}{۳}=$ است ۷۸

پیشگفتار

تا اوایل دهه ۱۹۶۰، بیشتر تحقیقات در زمینه معادلات دیفرانسیل تصادفی روی معادلات دیفرانسیل معمولی متمرکز شده بود. از آن زمان به بعد، با پیشرفت سریع و روز افزون علوم مدرن و مهندسی نوین و افزایش تقاضاهای مربوط به آنها، معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی با پارامترهای تصادفی بتدریج مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفت. از دیدگاه نظری تاکنون مطالعاتی در رابطه با وجود ویکتایی جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی با مشتقات نسبی در فضای هیلبرت و باناخ و همچنین تقریب قوی و تقریب ضعیف این معادلات صورت گرفته‌است. در سال ۱۹۹۵ نیولرت[۱] و جیانگی[۲] یک روش عددی ضمنی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه دادند و نشان دادند که به جواب دقیق همگراست. کلودن[۳] وگرش [۴] در سال ۱۹۹۶ یک معادله دیفرانسیل تصادفی از نوع سهموی با فرآیند وینر اسکالر را در نظر گرفتند و بسط تیلور ایتو صریح را بکار بردند در حالیکه در سال ۲۰۰۱ کلودن وشات[۵] بسط تیلور ایتو ضمنی را مورد بررسی قرار دادند و در هر دو مورد یک همگرایی قوی از مرتبه بالا حاصل شد. در سال ۱۹۹۹ روش تفاضلات متناهی بکار برده شد ولی در سال ۲۰۰۰ نشان داده‌شد هر روش عددی که برای یک مجموعه از معادلات خاص، استفاده شود نمی‌تواند دارای سرعت همگرایی بیش از $\frac{1}{6}$ باشد با وجود این متذکر شدند که امکان بهبود سرعت همگرایی با استفاده از تابعهای خطی مناسب از اغتشاش، وجود دارد و در سال ۲۰۰۳ هازنبلس [۶]روش اویلر صریح و ضمنی و کرانک نیکلسون[۷] را بکاربرد و از این محاسبات سرعت همگرایی $\frac{1}{4}$ نتیجه شد.و در این پایان نامه یک روش عددی با سرعت هگرایی $\frac{1}{3}$ بحث خواهد شد.

مطالب این پایان نامه بدین شرح است: در فصل اول مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی و روشهای عددی برای حل این معادلات بیان شده ست. در فصل دوم مروری مختصر بر نظریه احتمال و

---

[۱] Nualart

[۲] *Gyöngy*

[۳] Kloeden

[۴] Grecksch

[۵] Shott

[۶] Hausenblas

[۷] Crank-Nicholson

فرآیندهای تصادفی خواهیم داشت. در فصل سوم یادآوری مختصری از روشهای عددی برای معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه شده‌است و سپس به بیان بسطهای تیلور تصادفی در فضای باناخ پرداخته شده‌است. در فصل چهارم روشهای عددی مبنی بر بسطهای تیلور تصادفی برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی با مشتقات نسبی تولید شده‌است. در ادامه نتایج عددی روش اویلر نمایی به همراه یک مثال توضیح داده می‌شود. در این فصل ابتدا مرور مختصری بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی صورت می گیرد و سپس تعاریف و مفاهیمی که برای آشنایی با موضوع پایان نامه لازم و در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱—۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مرور مختصری بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی صورت می گیرد و سپس تعاریف و مفاهیمی که برای آشنایی با موضوع پایان نامه لازم و در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده است.

۱—۲ نگرش کلی بر معادلات دیفرانسیل تصادفی با مشتقات جزئی

تا مدتها پیش در بسیاری از مدلهای توسعه یافته برای توصیف پدیده‌های طبیعی بدلیل عدم وجود روشهای عددی مفید و فقدان کامپیوترهای توانمند، عبارتهای تصادفی نادیده گرفته می‌شدند. با پیشرفت رایانه های پر سرعت، عوامل تصادفی به سیستم معادلات دیفرانسیل اضافه شدند. معادلات دیفرانسیل تصادفی با مشتقات نسبی مدلهای ریاضی غنی تری نسبت به حالت قطعی خود ارائه می دهند. این گونه مدلسازی‌هاعلیرغم قابلیت بالا و مزایای زیاد، پیچیدگی های زیادی را به مسئله تحمیل می کنند. حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی تصادفی به موازات حل تئوری آنها امری بسیار مهم و ضروری و در عین حال پیچیده به شمار می‌رود که اخیراً محققان در این زمینه فعالیت زیادی دارند [۵] . مدلهای ریاضی ارائه شده برای معادلات قطعی متناظر با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، قابل تعمیم به نوع تصادفی آن می باشند،[۳] ولی نحوه شبیه سازی و تحلیل مؤلفه‌های تصادفی بسیار مهم است. روشهای مونت—کارلو[۱] از جمله روشهای مفید و مؤثر برای شبیه‌سازی پدیده های فیزیکی به حساب می آید.

برخی روشهای عددی مطرح شده برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی قطعی را می توان برای نوع تصادفی آن مورد توسعه قرار داد. از این نمونه می توان به روشهای تفاضل متناهی تصادفی، اجزا متناهی تصادفی [۲]، روشهای تجزیه کننده و تقریب‌های گالرکین تصادفی[۲] [۱۹] اشاره نمود.

اما برخی روشهای ارائه شده برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی تصادفی، مانند تجزیه

[۱] Monte-Carlo

[۲] Stochastic Galerkin approximations

آشفتگی وینر[۳] و برشهای بسط فوریه نوفه[۴] [٦] ، اساساً ماهیت تصادفی دارند.
در حالت کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی تصادفی به معادلات خطی، نیمه خطی، شبه خطی و غیر خطی طبقه بندی می‌شوند که هر کدام از آنها بسته به نوع حرکت براونی اعمال شده برای مدلسازی معادله به زیر مجموعه هایی نیز تقسیم می‌شوند. سه نوع اصلی از معادلات تصادفی با مشتقات نسبی از جنبه کاربردی را مورد مطالعه قرار می دهیم:

معادلات سهموی تصادفی:

مسئله مقدار مرزی تصادفی به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}(t,x) + bu(t,x) = g(t,x) + \dot{W}(t,x), \qquad ۰ \le t < \infty$$

$$u(۰,x) = u_۰(x), \qquad ۰ \le x \le L,$$

$$u(t,۰) = u(t,L) = ۰,$$

که در آن u یک تابع حقیقی است که $t \in R_+$ و $x \in R_+^d$ و مقدار اولیه $u_۰(x) \in C_۰([۰,L])$ در نظر گرفته شده‌است. همچنین b یک مقدار ثابت و $\dot{W}(t,x)$ نشان دهنده فرآیند نوفه سفید وابسته به مکان و زمان می‌باشد. به منظور بررسی نحوه مدلسازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی تصادفی $(SPDE)$ از دیدگاه کاربردی، مسئله با مقدار مرزی برای معادله سهموی خطی در حالت قطعی را به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}(t,x) + bu(t,x) = F(t,x), \qquad ۰ \le t < \infty$$

$$u(۰,x) = u_۰(x), \qquad ۰ \le x \le L,$$

$$u(t,۰) = u(t,L) = ۰.$$

---

[۳] Wiener Chaos Decomposition

[۴] Fourier Expansion of Noise

مسئله فوق اغلب در مهندسی و علوم فیزیکی برای مدلسازی میزان انتشار ونفوذ جریان الکتریکی در طول یک سیم بکار می‌رود. در این مدل، $u(x,t)$ پتانسیل الکتریکی را در زمان t و در نقطه x توصیف می‌کند. معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی (PDE) بالا مبین این موضوع می‌باشد که $u(x,t)$ یک تابع از نرخ رشد جزئی u_t آن، سرعت انتشار آن u_{xx} و همچنین جمله $F(x,t)$ می‌باشد که میزان ورود جریان در (x,t) را نشان می‌دهد. همچنین جمله تصادفی به صورت معادله زیر معرفی می‌شود:

$$F(x,t) = g(x,t) + h(x,t), \qquad \circ \leq t < \infty, \quad \circ \leq x < L,$$

که در آن $g(.,.)$ و $h(.,.)$ به ترتیب سیگنالهای قطعی و تصادفی می باشند.

در واقع مؤلفه تصادفی $h(.,.)$ در معادله فوق، سیگنالهای تصادفی را مدلسازی می کند. همچنین فرض شده‌است میزان ورودی این سیگنالهای تصادفی دارای توزیع پواسن می باشند. چون در حالت کلی، این جملات تصادفی علیرغم تعداد زیادشان دارای اندازه‌های کوچکی می باشند، $h(.,.)$ به عنوان یک فرآیند نوفه سفید $\dot{W}$ با دو پارامتر در نظر گرفته می‌شود.

همان طور که ملاحظه می شود، این شبیه سازی را که بر مبنای اعمال تأثیرات تصادفی در یک مدل ریاضی مبتنی بر معادله دیفرانسیل جزئی بیان شده‌است، می‌توان در قالب یک معادله دیفرانسیل با ماهیت تصادفی در نظر گرفت.

معادلات هذلولوی تصادفی:

اساساً حرکت امواج و ارتعاشات مکانیکی از مهمترین پدیده‌های فیزیکی به شمار می آیند. به عنوان مدلهای ریاضی، این پدیده‌ها بوسیله معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از نوع هذلولی توصیف می‌شوند. از مشهورترین این معادلات می‌توان به معادله حرکت موج اشاره نمود.

یک معادله موج تصادفی بر مبنای اغتشاش خالص به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + \sigma_\circ \dot{W}(x,t)$$

که در آن c سرعت موج و $\sigma_\circ$ پارامتر شدت اغتشاش در حوزه D تعریف می‌شوند. در صورتیکه ناحیه D در

R^d در نظر گرفته می شود، این معادله می تواند ارتعاشات یک نوار کشسان را برای حالت $d = ۱$، نوسانات یک غشا مرتعش برای حالت $d = ۲$ و لرزشهای یک جسم لاستیک مانند برای حالت $d = ۳$ را توصیف نماید. اگر $D = R^d$ این معادله می تواند برای مدلسازی انتشار امواج نور و یا صوت تولید شده از یک منبع تغذیه مولد امواج با ماهیت تصادفی تعبیر شود.

در حالتیکه امواج دامنه‌های نوسان زیادی داشته باشند، برخی تأثیرات غیر خطی نیز به مسئله اعمال می‌شود. بنابراین معادله حرکت موج به فرم یک معادله هذلولی غیر خطی به صورت زیر مدل می‌شود:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = c^۲ \Delta u + f(u) + \sigma(u)\dot{W}(x,t),$$

که در آن $f(u)$ و $\sigma(u)$ توابعی غیر خطی از u می‌باشند. در حالت کلی‌تر، حرکت موج می تواند توسط سیستم‌های معادلات خطی و یا غیر خطی هذلولوی از مرتبه اول مدلسازی شود. در ادامه به ارائه یک مثال کاربردی در مدلسازی پدیدهای طبیعی می پردازیم.

در واقع روند کلی شبیه سازی حرکت یک رشته DNA که مدل ریاضی آن در نهایت به یک معادله هذلولی تصادفی منجر می شود را توصیف می نمائیم. یک مولکول DNA می تواند به عنوان یک رشته کشسان بلند در نظر گرفته شود که قطر آن در مقایسه با طول رشته بسیار کوچک فرض شده‌است. با اعمال نوعی پارامتر سازی می توان موقعیت رشته را روی $R_+ \times [۰, ۱]$ و در $R^۳$ به فرم زیر تعبیر نمود:

$$u(t,x) = \begin{pmatrix} u_۱(t,x) \\ u_۲(t,x) \\ u_۳(t,x) \end{pmatrix}$$

در این مسئله $u(x,t)$ در واقع موقعیت نقطه مشخص x رشته DNA، در زمان t در نظر گرفته می‌شود که $x \in [۰, ۱]$، در واقع فاصله این نقطه را از یکی از دو انتهای رشته DNA نشان می‌دهد. واحد طول به گونه‌ای انتخاب شده‌است که کل رشته DNA طولی برابر ۱ داشته‌باشد.

یک مولکول DNA نوعاً در یک مایع خاص شناور می باشد، از اینرو این رشته دائماً در حرکت است. حرکت این مولکول را می‌توان شبیه حرکت یک ذره کوچک شناور در سطح یک مایع که مطابق حرکت براونی جابجا می‌شود، توصیف نمود. حرکت این رشته می تواند توسط قوانین حرکت نیوتن به اینگونه تحلیل شود که برآیند

نیروهای وارد بر رشته، با حاصلضرب جرم رشته DNA در شتاب آن برابر می باشند.
اگر $\mu = ۱$ جرم رشته DNA در هر واحد طول فرض شود، در اینصورت شتاب رشته در نقطه x و در زمان t به این فرم در نظر گرفته می شود:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}(t,x)$$

از طرفی نیروهای اعمال شده روی رشته DNA عموماً به سه نوع تقسیم می شوند: نیروهای کشسان $F_۱$ که در بردارنده نیروهای پیچشی هستند، نیروهای اصطکاک $F_۲$ که ناشی از غلظت زیاد مایع می باشند و نیروهای تصادفی $F_۳$ که بدلیل ضربات تصادفی مولکولهای مایع به رشته DNA بوجود می آیند. بنابراین معادله حرکت نیوتن به این صورت نوشته می شود:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = F_۱ - F_۲ + F_۳$$

نیروهای کشسان معمولاً به صورت مشتق مرتبه دوم نسبت به متغیر مکان در نظر گرفته می‌شوند و نیروهای مولکولی نیز با استفاده از یک جمله تصادفی مدل می شوند. ساده‌ترین معادله یک بعدی مرتبط با این مسئله که در آن فقط جابجایی‌های عمودی اعمال شده و از نوع پیچشی آن صرفنظر شده‌است، به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}(t,x) = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}(t,x) - \int_۰^۱ k(x,y)u(t,y)dy + \dot{F}(t,x)$$

که اولین جمله سمت راست در عبارت فوق بیانگر نیروهای کشسانی و جمله دوم نشان دهنده نیروهای اصطکاک و سومین جمله $\dot{F}(t,x)$، در حقیقت یک اغتشاش گاوسی می باشد.
در حقیقت شبیه سازی یک رشته DNA، یک معادله هذلولوی تصادفی را نتیجه می‌دهد.

معادلات بیضوی تصادفی:

یک معادله بیضوی تصادفی را می توان به فرم زیر معرفی نمود:

$$\Delta u(x) + bu(x) = g(x) + \dot{W}(x), \qquad ۰ \leq x \leq L$$

$$u(\circ) = u(L) = \circ$$

که در آن u یک تابع حقیقی مقدار از $x \in R_+^d$ و $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ عملگر لاپلاس و b یک مقدار ثابت اختیار شده‌اند. همچنین $\dot{W}(x)$ فرآیند نوفه سفید گاوسی در نظر گرفته می‌شود.

بطور کلی روشهای متعددی برای حل این معادلات[۴] مطرح شده است.رویکرد اصلی در این پایان‌نامه حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی تصادفی از نوع سهموی می‌باشد.

۱—۳ نگاه اجمالی بر روشهای عددی در حل $SPDE$

اکثر روشهای عددی مرتبه همگرایی پایین دارند، پیشرفت غیر منتظره معادلات دیفرانسیل تصادفی با روش مایلشتین[۵] شروع شد و با استخراج منظم بسط تیلور تصادفی و روشهای عددی بر اساس آنها ادامه یافت. این بسطهای تکراری بر اساس کاربرد تکراری فرمول ایتو هستند و امّا نکته بحرانی این است که انتگرالهای تصادفی چندگانه که در این روشها ایجاد می شود، اطلاعات بیشتری در مورد فرآیند اغتشاش خالص با زیر بازه‌های گسسته سازی شده [۱] را نیاز دارد.

یک فرمول ایتو مطلوب برای معادلات دیفرانسیل تصادفی با مشتقات جزئی موجود نمی باشد. با وجود این اخیراً نشان داده شده است که بسط تیلوری که از نیاز به فرمول ایتو اجتناب می‌کند، در دسترس است. یک چنین بسطهایی نسبت به اغتشاش قوی هستند ازاینرو برای انواع دیگری از فرآیندهای تصادفی با مسیر ساده پیوسته نظیر حرکت براونی کسری[۶] صدق می‌کنند. معادله دیفرانسیل تصادفی با اغتشاش سفید[۷] W_t را در نظر بگیرید:

$$dU_t = [AU_t + f(U_t)]dt + dW_t, \qquad U_\circ = u_\circ, \qquad (۱-۱)$$

---

[۵] Milstein scheme

[۶] Fractional Brownian motion

[۷] white noise

تعریف ۱.۳.۱:(نمایش میلد) فرآیند تصادفی U_t را نمایش میلد معادله (۱−۱) گویند هرگاه:

$$U_t = e^{At}u_\circ + \int_\circ^t e^{A(t-s)}f(U_s)ds + \int_\circ^t e^{A(t-s)}dW_s. \qquad (۲-۱)$$

شایان ذکر است که استفاده از شکل نمایشی میلد، نیاز به فرمول ایتو را جبران کرد.

تعریف ۲.۳.۱: فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی یا مختلط و $||.|| : X \to R$ یک تابع باشد بطوریکه به ازای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر α داشته باشیم:

۱) $||x|| \geq \circ$ و $||x|| = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$.

۲) $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$.

۳) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

آنگاه $||.||$ را یک نرم بر X نامیم و X را یک فضای نرم دار گوییم.

تعریف ۳.۳.۱: فضای نرم دار X را یک فضای باناخ گوییم، هر گاه X نسبت به متریک تولید شده بوسیله نرم، فضایی کامل باشد.

تعریف ۴.۳.۱: فرض کنید X یک مجموعه و S خانواده ای ناتهی از زیر مجموعه‌های X باشد S را سیگما جبر گوییم هر گاه:

۱) به ازای هر $A \in S$، $X_A \in S$

۲) اگر A_n دنباله ای از زیر مجموعه‌های X در S باشد، آنگاه $\cup_n A_n \in S$.

تعریف ۵.۳.۱: فرض کنید S سیگما جبری از زیر مجموعه‌های X باشد تابع $\mu : S \to [\circ, \infty]$ را اندازه گوییم، هر گاه:

۱) $\mu(\varnothing) = \circ$

۲) اگر A_n دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در S باشد، آنگاه:

$$\mu\left(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=۱}^{\infty} \mu(A_n).$$

تعریف ۶.۳.۱: اگر S سیگما جبری از زیر مجموعه‌های X و μ اندازه ای روی S باشد، آنگاه (X, S, μ) فضای احتمال و اعضای S مجموعه‌های اندازه پذیر نامیده می‌شوند. همچنین اگر $\mu(X) = ۱$ سه تایی (X, S, μ) را فضای احتمال گوییم.

تعریف ۷.۳.۱: اگر (X, S, μ) یک فضای اندازه و f تابعی حقیقی و توسعه یافته روی X باشد، آنگاه تابع f اندازه‌پذیر است، در صورتیکه به ازای هر عدد حقیقی α داشته باشیم:

$$\{x : f(x) \leq \alpha\} \in S.$$

که تابع f اندازه پذیر و نرم روی این فضا به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu \right).$$

در حین پیاده‌سازی هر روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی، شبیه‌سازی فرآیند اغتشاش موجود در آن لازم است و این کار به روشهای گوناگونی صورت می پذیرد. با توجه به اینکه نموهای اغتشاش ΔW_n متغیرهای تصادفی با توزیع گاوسی، میانگین صفر و واریانس h هستند از اینرو در این پایان نامه بمنظور تولید این نموها در پیاده سازی روشهای عددی از مولد تولید اعداد شبه—تصادفی در نرم افزار $MATLAB$ استفاده خواهد شد. در بحث پیاده‌سازی یک روش عددی یا محاسبه جواب تحلیلی یک معادله دیفرانسیل تصادفی باقی ماندن روی یک مسیر برآونی یکسان در بین شبیه‌سازیها و همچنین شبیه‌سازی انتگرالهای تصادفی به طور صحیح ضروری خواهد بود. بطور مثال فرض کنید می خواهیم جواب تحلیلی معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو:

$$dY(t) = aY(t)dt + bY(t)dW(t), \qquad Y(t_۰) = Y_۰, \qquad t \in [t_۰, T] \qquad (۴-۱)$$

را روی یک شبکه گسسته متساوی الفاصله از نقاط $t_j = t_۰ + jh$ به ازای $j = ۱, ..., N$، که در آن $h = \frac{t_N - t_۰}{N}$، است محاسبه کنیم. چون جواب تحلیلی معادله دیفرانسیل تصادفی (۱—۴) بصورت:

$$Y(t) = Y_۰ exp((a - \frac{۱}{۲}b^۲)(t - t_۰) + b(W(t) - W(t_۰))), \qquad (۵-۱)$$

خواهد بود و با توجه به اینکه $W(t) - W(t_۰)$، نمایش نمو وینر روی بازهٔ $[t_۰, t]$ است، بنابراین با تولید متغیرهای مستقل نرمال استاندارد g_j به ازای $j = ۱, ..., N$، و محاسبهٔ:

$$W(t_j) - W(t_۰) = \sqrt{jh} g_j, \qquad j = ۱, ..., N \qquad (۶ - ۱)$$

آنگاه $Y(t_j)$، بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Y(t_j) = Y_۰ exp((a - \frac{۱}{۲}b^۲)jh + b\sqrt{jh}g_j$$

از طرفی چون نموهای وینر روی بازه‌های غیر متداخل مستقل از هم می‌باشند، از اینرو $W(t_۲) - W(t_۱)$ و $W(t_۱) - W(t_۰)$ مستقل از هم می باشند و بنابراین از (۱—۶) داریم:

$$W(t_۲) - W(t_۱) = W(t_۲) - W(t_۰) - (W(t_۱) - W(t_۰)) = \sqrt{۲h} g_۲ - \sqrt{h} g_۱,$$

که مستقل از $W(t_۱) - W(t_۰) = \sqrt{h} g_۱$، نخواهد بود و در نتیجه این روش شبیه‌سازی درست نمی‌باشد. در واقع از تساوی :

$$W(t_j) - W(t_۰) = \sum_{i=۱}^{j} (W(t_i) - W(t_{i-۱})) = \sqrt{h} \sum_{i=۱}^{j} g_i, \qquad (۷ - ۱)$$

می‌توان نشان داد که استقلال نموهای وینر روی بازه‌های غیر متداخل حفظ می‌شود و با قرار دادن (۱—۷) در(۱—۵) داریم:

$$Y(t_j) = Y_۰ exp((a - \frac{۱}{۲}b^۲)jh + b\sqrt{h}\sum_{i=۱}^{j} g_i) = exp((a - \frac{۱}{۲}b^۲)h + b\sqrt{h}g_j) Y(t_{j-۱}).$$

فصل ۲

حسابان تصادفی

۲—۱ مقدمه

در این فصل تعاریف اساسی و نتایج اصلی مربوط به حسابان تصادفی را مرور می کنیم که حسابان تصادفی شامل نظریهٔ احتمال، فرآیندهای تصادفی، فر آیند وینر، اغتشاش خالص و انتگرالهای تصادفی می باشد. همچنین فرمول ایتو که در نظریهٔ معادلات تصادفی بسیار مهم است، بیان می شود.

۲—۲ نظریه احتمال

تعریف ۲.۲.۱:(فضای احتمال) سه تایی مرتب $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$، که شامل فضای نمونه Ω(که مجموعه تمام حالات ممکن است)، یک سیگما—جبر$\mathcal{A}$ از زیر مجموعه های Ω بنام پیشامد، و یک اندازه احتمال P روی $\mathcal{A}$ می باشد، فضای احتمال نامیده می شود.

تعریف ۲.۲.۲:(اندازه احتمال) تابع $P : \mathcal{A} \to [۰, \infty]$ را یک اندازه احتمال گویند هر گاه:

(۱) $P(\Omega) = ۱$؛

(۲) اگر $A \in \mathcal{A}$ آنگاه $۰ \leq P(A) \leq ۱$؛

(۳) اگر $A_۱, A_۲, ...A_n, ...$، پیشامدهای دوبدو مجزا از هم باشند (یعنی برای $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$) آنگاه؛

$$P(\bigcup_{n=۱}^{\infty}) = \sum_{n=۱}^{\infty} P(A_n).$$

تعریف ۲.۲.۳:(متغیر تصادفی) تابع $X : \Omega \to R$ یک متغیر تصادفی است هر گاه بازای هر $a \in R$؛

$$X^{-۱}((-\infty,]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A}.$$

تعریف ۲.۲.۴:(تابع توزیع) رفتار احتمالی $X(\omega)$ بطور کامل و یکتا با تابع توزیع زیر مشخص می شود:

$$F_X(x) = P((-\infty, x]) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$