بسم الله الرحمن الرحیم

هو الفتّاح العلیم

مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان

نظریهٔ میدان‌های همدیس و لگاریتمی همدیس با ابر تقارن کسری در دو بعد

پایان‌نامهٔ دکتری

فردین خیراندیش

استاد راهنما: دکتر محمد خرمی

بهمن ۱۳۷۹

تقدیم به

همسر مهربانم

تقدیر

از استاد گرامی جناب آقای دکتر محمّد خرمی که مرا با این شاخه از فیزیک آشنا نمود و همواره در مدت مطالعه و تحقیق اینجانب، با راهنمائیهای اساسی و ارزندهٔ خویش موانع را از سر راهم بر می‌داشت، سپاسگزارم. وظیفهٔ خود می‌دانم از اساتید بزرگوار، جناب آقای استاد یوسف ثبوتی و دکتر محمّد رضا حیدری خواجه پور که با بنیانگذاری این مرکز موجبات رُشد و ترقیِ علمی را در محیطی آرام و دوستانه فراهم آورده‌اند، تشکر و قدردانی کنم.

چکیده

در این رساله نظریهٔ میدانهای همدیس و لگاریتمی همدیس با ابر تقارن کسری در دو بُعد را بررسی می‌کنیم. فصل‌های اول تا سوم به مرور مفاهیم اساسی نظریهٔ میدانهای همدیسِ بدون ابر تقارن اختصاص یافته است. فصل چهارم که موضوع اصلی این رساله است را می‌توان به سه قسمت تقسیم کرد. در قسمت اول، نظریهٔ میدانهای همدیس با ابر تقارن کسری در حالت خاص اسپین $s = 1/3$ بررسی شده و توابع دو نقطه‌ای این نظریه‌ها را به دست آورده‌ایم. در قسمت دوم، نظریهٔ میدانهای همدیس لگاریتمی با اسپین $s = 1/3$ بررسی شده و برای این نظریه‌ها نیز توابع دو نقطه‌ای را تعیین کرده‌ایم. در قسمت سوم، نتایج قسمتهای اول و دوم را برای نظریهٔ میدانهای همدیس و لگاریتمی همدیس با اسپین دلخواهِ $s = 1/(F+1)$، $(F \geq 2)$ تعمیم داده و توابع دو نقطه‌ای این نظریه‌ها را به دست آورده‌ایم.

مقدمه

نظریه‌های میدان همدیس دو بُعدی در سالهای اخیر بعد از کار بلاوین [۱]، پولیاکوف [۲] و زامولودچیکوف [۳] [۱]، به دو دلیل عمده بسیار مورد توجه و مطالعه قرار گرفته‌اند [۲]. دلیل اول اینست که نظریه‌های میدانِ همدیسِ دو بُعدی، رفتار بحرانی سیستمهای آماری دو بُعدی را در نقطهٔ بحرانی ـبا گذار فاز مرتبهٔ دوم ـ توصیف می‌کنند. نظریه‌های میدان همدیس روش ساده و نیرومندی را برای محاسبهٔ نماهای بحرانی و توابع همبستگی این سیستمها ارائه می‌دهند [۵ـ۲].

دلیل دومِ توجه به این نظریه‌ها، کاربرد آنها در نظریهٔ ریسمانها است. نظریهٔ ریسمان ابتدا در فضاـزمان بیست و شش بُعدیِ تخت برای بوزونها و فضاـزمان ده بُعدی تخت برای فرمیون‌ها ـ بعنوان نظریه ابر ریسمان ـ فرمول‌بندی شد. اکنون معلوم شده است که بخش اصلی نظریهٔ ریسمانها، یک نظریهٔ میدان همدیس دو بُعدی است. همچنین معلوم شده که دامنهٔ درختی در نظریهٔ ریسمان را می‌توان بر حسب توابع همبستگی نظریهٔ میدانِ همدیسِ متناظر آن روی صفحه، به دست آورد. دامنه‌های حلقه‌ای ریسمان را نیز می‌توان از همان نظریهٔ میدانِ همدیسِ متناظر، بر حسب توابع همبستگی روی سطوح ریمانی با جنس [۴] بالاتر، بدست آورد [۱۱ـ۷].

ابر تقارن یک گسترش Z_2 برای جبر پوانکاره است [۱۲، ۱۳]. اما جبر همدیس را هم می‌توان به یک جبر ابر همدیس گسترش داد [۱۴]. اگر فضاـزمان دو بُعدی باشد، می‌توان جبر همدیس را به جبر همدیسِ ابر متقارنِ کسری تعمیم داد [۱۸ـ۱۵]. ابر تقارن کسری یک گسترش Z_n برای جبر پوانکاره است.

نظریه‌های میدان همدیس که در آنها توابع همبستگی رفتار لگاریتمی دارند، به نظریه‌های همدیسِ لگاریتمی معروفند [۱۹]. در بعضی از نظریه‌های جالب فیزیکی مانند پلیمرها [۲۰]، مدلهای WZNW [۲۴ـ۲۱]، پرکولاسیون [۲۵]، حالت هال کوانتومی هالدین‌ـرضائی [۵][۲۶] و برانگیختگیهای مرزی در اثر کوانتومی هال کسری [۲۷]، رفتار توابع همبستگی لگاریتمی است.

---

[۱] Belavin

[۲] Polyakov

[۳] Zamolodchikov

[۴] Genus

[۵] Haldane-Rezai

اپراتورهای لگاریتمی در آشفتگی هیدرومغناطیسی دو بُعدی [۲۸_۳۰]، آشفتگی دو بُعدی [۳۱، ۳۲] و تعدادی مدلهای بی‌نظم در نقطهٔ بحرانی [۳۳، ۳۴] هم ظاهر می‌شوند. نظریه‌های میدان همدیس و ابرهمدیس لگاریتمی دو بُعدی برای حالت $F = 0, 1$ بررسی شده‌اند [۳۵، ۳۶، ۳۷]. برای بُعد فضا_زمان بزرگتر از دو هم $(d > 2)$ این نظریه‌ها برای حالت $F = 0$ بررسی شده‌اند [۳۸].

در این رساله ابتدا نظریهٔ میدانهای همدیس را مرور می‌کنیم. با معرفی متغیرهای ابر گراسمانی با خاصیت $\theta^3 = \bar{\theta}^3 = 0$، نظریهٔ میدان ابر همدیس متناظر را بررسی می‌کنیم و توابع دو نقطه‌ای آن را به دست می‌آوریم [۳۹]. سپس نظریهٔ میدان ابر همدیس لگاریتمی را بررسی می‌کنیم و توابع دو نقطه‌ای این نظریه‌ها را نیز تعیین می‌کنیم [۴۰]. در نهایت با تعمیم این نظریه‌ها به حالتی که در آن متغیرهای ابر گراسمانی θ و $\bar{\theta}$ در شرط $\theta^n = \bar{\theta}^n = 0$ $(n > 3)$ صدق می‌کنند، نظریه‌های میدانِ ابر همدیس و ابرهمدیس لگاریتمیِ متناظر را بررسی می‌کنیم و توابع دو نقطه‌ای آنها را بدست می‌آوریم [۴۱].

فهرست مطالب

۱ تبدیلات همدیس ۳

۱.۱ گروه همدیس ۳

۱.۲ گروه همدیس در$d \neq 2$ ۴

۱.۳ تبدیلات بینهایت کوچک و قضیهٔ نوتر ۵

۱.۴ جبر مولدهای گروه همدیس $(d \neq 2)$ ۱۰

۱.۵ نمایش گروه همدیس $(d \neq 2)$ ۱۱

۱.۶ توابع همبستگی ۱۳

۱.۷ اتحادهای وارد ۱۴

۱.۸ تانسور انرژی_تکانه ۱۵

۱.۹ ناوردائی همدیس در نظریه میدان کوانتومی ۱۸

۱.۱۰ اتحادهای وارد حاصل از ناوردائی همدیس ۱۹

۲ ناوردائی همدیس در دو بُعد ۲۱

۲.۱ گروه همدیس در دو بُعد ۲۱

۲.۲ تبدیلات موبیوس ۲۳

۲.۳ مولدهای تبدیل همدیس در دو بُعد ۲۳

۲.۴ میدانهای اولیه ۲۵

۲.۵ توابع همبستگی در دو بُعد ۲۵

۲.۶ شکل هولومرفیک اتحادهای وارد در دو بُعد ۲۷
۲.۷ بسط حاصلضرب اپراتوری ۲۹
۲.۸ بار مرکزی ۳۳
۲.۹ تبدیل تانسور انرژی-تکانه ۳۳

۳ فرمولبندی اپراتوریِ‌نظریهٔ میدان همدیس ۳۷
۳.۱ کوانتش شعاعی ۳۷
۳.۲ بسط بر حسب مُدها ۳۸
۳.۳ ترتیب نرمال و بسط حاصلضرب اپراتوری ۴۰
۳.۴ جبر ویراسورو ۴۱
۳.۵ ساختن فضای هیلبرت ۴۲
۳.۶ بوزون آزاد در نمایش اپراتوری ۴۴
۳.۷ اپراتورهای رأس ۴۷
۳.۸ فضای فوک ۴۹
۳.۹ اعمال شرط مرزی پاد متناوب ۵۱
۳.۱۰ فرمیون آزاد در نمایش اپراتوری ۵۳
۳.۱۱ انرژی خلأ ۵۶
۳.۱۲ ترتیب نرمال ۵۸
۳.۱۳ خانوادهٔ میدانهای اولیه ۶۱

۴ نظریهٔ میدان همدیس و لگاریتمی همدیس با تقارن کسری در دو بُعد ۶۶
۴.۱ گسترش فراگراسمانی جبر ویراسورو ۶۶
۴.۲ مولدهای تبدیلات ابر همدیس کسری $(F = 3)$ ۷۱
۴.۳ توابع دو-نقطه‌ای برای اسپین $s = 1/3$ ۷۵
۴.۴ نظریهٔ میدان همدیس لگاریتمی ۷۹
۴.۵ توابع دو-نقطه‌ای بلوکهای جردنی ۸۲

۴.۶ تعمیم به اسپین دلخواه ۸۴
۴.۷ مولدهای بینهایت کوچک ۸۴
۴.۸ مولدهای جبر ابر همدیس با اسپین دلخواه ۸۶
۴.۹ توابع دونقطه‌ای برای اسپین دلخواه ۸۹
۴.۱۰ توابع دو نقطه‌ای لگاریتمی برای اسپین دلخواه ۹۲

۵ نتیجه گیری **۹۸**

الف **۱۰۰**

۱.الف متقارن کردن تانسور انرژی_تکانه ۱۰۰
۲.الف اثبات رابطهٔ $< T^{\mu}_{\mu} >= 0$ ۱۰۱
۳.الف اثبات رابطهٔ (۲_۴۴) ۱۰۳
۴.الف اثبات روابط (۲_۵۴) ۱۰۴

ب **۱۰۷**

۱.ب اثبات روابط (۴_۳۴) و (۴_۳۵) ۱۰۷
۲.ب اثبات روابط (۴_۳۹) ۱۰۸
۳.ب اثبات روابط (۴_۵۳) ۱۰۹
۴.ب اثبات روابط (۴_۵۶) ۱۱۰

فصل ۱

تبدیلات همدیس

۱.۱ گروه همدیس

تانسور متریک فضا_زمان d بُعدی را با $g_{\mu\nu}$ نشان میدهیم.طبق تعریف یک تبدیل همدیس یک نگاشت معکوس پذیر $x \to x'$ است که تانسور متریک تحت آن بصورت زیر تبدیل می‌شود [۲، ۴]:

$$g'_{\mu\nu}(x) = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) \qquad (۱\_۱)$$

مجموعه تبدیلات همدیس تشکیل یک گروه میدهند. گروه پوانکاره یک زیر گروه آن است و متناظر با انتخاب $\Lambda(x) = 1$ می‌باشد.

برای تبدیل بینهایت کوچک $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$، تانسور متریک تا مرتبهٔ اول بر حسب ϵ بصورت زیر تغییر می‌کند:

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} - (\epsilon_{\mu;\nu} + \epsilon_{\nu;\mu}) \qquad (۲\_۱)$$

$\epsilon_{\mu;\nu}$ به معنی مشتق هموردای ϵ_μ نسبت به x^ν است. برای اینکه این تبدیل همدیس باشد، باید عبارت داخل پرانتز ضریبی از $g_{\mu\nu}$ باشد:

$$\epsilon_{\mu;\nu} + \epsilon_{\nu;\mu} = f(x) g_{\mu\nu} \qquad (۳\_۱)$$

از اینجا به بعد فضا_زمان را تخت فرض می‌کنیم. ($(g_{\mu\nu} = Diag(1, -1, \cdots, -1)$)

عامل $f(x)$ را می‌توان با گرفتن رَدّ از فرمول (۱ـ۳) به دست آورد:

$$f(x) = \frac{2}{d}\partial_\rho \epsilon^\rho \qquad (۱ـ۴)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۱ـ۳) نسبت به مختصهٔ x^ρ و جایگشت اندیسها و ترکیب خطی آنها معادله زیر حاصل می‌شود

$$2\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho = \eta_{\mu\rho}\partial_\nu f + \eta_{\nu\rho}\partial_\mu f - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho f \qquad (۱ـ۵)$$

با ادغام طرفین معادله (۱ـ۵) با $\eta^{\mu\nu}$ داریم

$$2\partial^2\epsilon_\mu = (2-d)\partial_\mu f \qquad (۱ـ۶)$$

با اثر ∂_ν روی معادله (۱ـ۶) و ∂^2 روی معادله (۱ـ۳) داریم

$$(2-d)\partial_\mu\partial_\nu f = \eta_{\mu\nu}\partial^2 f \qquad (۱ـ۷)$$

با ادغام معادله (۱ـ۷) با $\eta^{\mu\nu}$ داریم

$$(d-1)\partial^2 f = 0 \qquad (۱ـ۸)$$

اگر $d = 1$ ، معادله بالا قیدی روی تابع f نمی‌گذارد. اصولاً هر تبدیل هموار در یک بعد $(d = 1)$، همدیس است.

۱.۲ گروه همدیس در $d \neq 2$

از معادلات (۱ـ۷) و (۱ـ۸) داریم $\partial_\mu\partial_\nu f = 0$ یعنی تابع f بر حسب مختصات خطی است:

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu, \qquad (A, B_\mu \quad \text{ثابت}) \qquad (۱ـ۹)$$

با جایگذاری (۱ـ۹) در (۱ـ۵) مشاهده می شود که $\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho$ ثابت است یعنی ϵ_μ بر حسب مختصات حداکثر از درجهٔ دوم است:

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\mu + c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho \qquad (۱ـ۱۰)$$

چون قیدهای (۱_۳) و (۱_۵) برای تمام x ها برقرار هستند، می‌توانیم جملاتِ با درجهٔ متفاوت در رابطهٔ (۱_۱۰) را، جداگانه در نظر بگیریم. جمله ثابت a_μ یک انتقال بینهایت کوچک را نمایش میدهد. با جایگذاری جمله خطی رابطه (۱_۱۰) در رابطه (۱_۳) داریم :

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d} b^{\lambda}{}_{\lambda} \eta_{\mu\nu} \qquad (۱\_۱۱)$$

بنابراین $b_{\mu\nu}$ مجموع یک قسمت پادمتقارن ویک قسمت متناسب با $\eta_{\mu\nu}$ است

$$b_{\mu\nu} = r\eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}, \qquad m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu} \qquad (۱\_۱۲)$$

قسمت متناسب با $\eta_{\mu\nu}$ یک تبدیل مقیاس بینهایت کوچک و قسمت پاد متقارن یک دوران بینهایت کوچک را نمایش میدهد. با جایگذاری جمله درجه دوم (۱_۱۰) در رابطه (۱_۵) داریم

$$c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\rho} b_\nu + \eta_{\mu\nu} b_\rho - \eta_{\nu\rho} b_\mu, \qquad b_\mu = \frac{1}{d} c^{\sigma}{}_{\sigma\mu} \qquad (۱\_۱۳)$$

و تبدیل بینهایت کوچک متناظر بصورت زیر است :

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + 2(a.b)x^{\mu} - b^{\mu} x^2 \qquad (۱\_۱۴)$$

این تبدیل را تبدیل خاص همدیس (SCT) می‌نامند. تبدیلات متناهی متناظر با تبدیلات بالا بصورت زیر اند:

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= x^{\mu} + a^{\mu} \\ x'^{\mu} &= cx^{\mu} \\ x'^{\mu} &= M^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \\ x'^{\mu} &= \frac{x^{\mu} - b^{\mu} x^2}{1 - 2b.x + b^2 x^2} \end{aligned} \qquad (۱\_۱۵)$$

۱.۳ تبدیلات بینهایت کوچک و قضیهٔ نوتر

یک مجموعه از میدانها را که بصورت Φ نمایش میدهیم در نظر بگیرید. تابع کُنش در حالت کلی به Φ و مشتقات مرتبهٔ اول آن بستگی دارد:

$$S = \int d^d x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \qquad (۱\_۱۶)$$

تبدیلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' \\ \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) \end{aligned} \qquad (۱\_۱۷)$$

در این تبدیلات مختصات جدید x' تابعی از مختصات قدیم x و میدان جدید Φ' در نقطه x' بر حسب تابعی از میدان قدیم Φ در نقطه x بیان می شود:

$$\Phi'(x') = \Gamma(\Phi(x)) \qquad (۱\_۱۸)$$

کُنش جدید بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} S' &= \int d^d x \mathcal{L}(\Phi'(x), \partial_\mu \Phi'(x)) \\ &= \int d^d x' \mathcal{L}(\Phi'(x'), \partial_\mu \Phi'(x')) \\ &= \int d^d x' \mathcal{L}(\Gamma(\Phi(x)), \partial'_\mu \Gamma(\Phi(x))) \\ &= \int d^d x \mid \frac{\partial x'}{\partial x} \mid \mathcal{L}(\Gamma(\Phi(x)), (\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \Gamma(\Phi(x))) \end{aligned} \qquad (۱\_۱۹)$$

اکنون چند مثال در نظر می‌گیریم.

برای انتقال داریم

$$\begin{aligned} x' &= x + a \\ \Phi'(x+a) &= \Phi(x) \end{aligned} \qquad (۱\_۲۰)$$

در این حالت Γ یک تابع همانی است و $S' = S$. بنابراین کُنش تحت انتقال ناورداست مگر اینکه لاگرانژی بطور صریح وابسته به مختصات باشد.

برای تبدیل لورنتس داریم :

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ \Phi'(\Lambda x) &= L_\Lambda \Phi(x) \end{aligned} \qquad (۱\_۲۱)$$

Λ ماتریسی است که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \qquad (۱\_۲۲)$$

L_Λ ماتریس دیگری است که روی میدان Φ اثر می کند بطوریکه ماتریسهای L_Λ یک نمایش برای گروه لورنتس تشکیل می‌دهند. برای میدان اسکالر Φ نمایش بدیهی است $(L_\Lambda = 1)$ و کنش تحت تبدیلات لورنتس ناورداست بشرطی که مشتقات ∂_μ در لاگرانژی بصورت لورنتس ناوردا، ظاهر شوند. کلیترین شکلِ لاگرانژیِ لورنتس ناوردایِ شاملِ حداکثر دو مشتق، بصورت زیر است

$$L(\varphi, \partial_\mu\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi)\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi \qquad (۱\_۲۳)$$

در این رابطه f و g توابعی اختیاری هستند و تنها قیدی که روی آنها می‌گذاریم این است که نظریهٔ حاصل باز بهنجار پذیر باشد.

تبدیلات مقیاس اهمیت خاصی دارند و به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x \\ \Phi'(\lambda x) &= \lambda^{-\Delta}\Phi(x) \end{aligned} \qquad (۱\_۲۴)$$

λ را عامل مقیاس و Δ را بُعد مقیاس یا وزن میدان Φ می نامند. دترمینان یاکوبی این تبدیل برابر است با $|\frac{\partial x'}{\partial x}| = \lambda^d$ بنابراین برای کنش جدید داریم

$$S' = \lambda^d \int d^dx \mathcal{L}(\lambda^{-\Delta}\Phi, \lambda^{-1-\Delta}\partial_\mu\Phi) \qquad (۱\_۲۵)$$

در حالت خاص برای میدان اسکالر بدون جرم φ در فضا_زمان d بُعدی داریم

$$S[\varphi] = \int d^dx \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi \qquad (۱\_۲۶)$$

و می‌توان با توجه به رابطهٔ (۱_۲۵) نشان داد که این کنش با شرط زیر تحت تبدیل مقیاس ناورداست

$$\Delta = \frac{1}{2}d - 1 \qquad (۱\_۲۷)$$