بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

دامنه های تقریباً شبه ارزیابی
و
دامنه های شبه تقریباً ارزیابی

مؤلف:

سیّد محمّدجواد حسینی

استاد راهنما:

دکتر رضا نکویی

بهمن ماه ۹۰

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: سیّد محمّدجواد حسینی	امضاء:
استاد راهنما: دکتر رضا نکویی	امضاء:
داور اول : دکتر سینا هدایت	امضاء:
داور دوم: دکتر حسین مؤمنایی	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر ندا ابراهیمی	امضاء:

تقدیم به

دکتر ایون هستون

و

دکتر ایمن بدوی

تشکر و قدردانی

در اینجا لازم می دانم از دکتر رابرت گیلمر، دکتر محمد ظفراله، دکتر ایون هستون، دکتر ایمن بدوی و دکتر شاهین موسوی بخاطر کمک‌هایشان در روند تحقیق و تکمیل این پایان نامه سپاس گذاری کنم.

جواد حسینی

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

فرض کنید R یک قلمرو صحیح با میدان کسرهای K و $\bar{R}$ بستار صحیح R در K باشد. ابتدا ایده‌آل‌های قوی و قویاً اولیه را به عنوان دو تعمیم از ایده‌آل قویاً اول معرفی کرده و نشان می‌دهیم این ایده‌آل‌ها با هر ایده‌آل اول از R مقایسه‌پذیرند. سپس به کمک ایده‌آل‌های قویاً اولیه، دامنه‌های تقریباً شبه ارزیابی ($APVDs$) را تعریف می‌کنیم. ویژگی‌های حلقه R را به عنوان یک $APVD$ بررسی کرده و به ارتباط R با حلقه‌های بالایی خودش، به خصوص $\bar{R}$ می‌پردازیم. همچنین به ارتباط ایده‌آل‌های قوی و قویاً اولیه در دامنه‌های مساعد اشاره خواهیم کرد.

در ادامه ایده‌آل‌های شبه قویاً اول را تعریف کرده و سپس به کمک این ایده‌آل‌ها، یک دسته جدید از قلمروهای صحیح موضعی به نام دامنه‌های شبه تقریباً ارزیابی ($PAVDs$) را معرفی می‌کنیم. همچنین، در ضمن بررسی ویژگی‌های $PAVD$ ها، ارتباط آنها را با دامنه‌های ارزیابی، PVD ها، AVD ها، $APVD$ ها و دامنه‌های موضعی (با ایده‌آل‌های اول خطی مرتب) مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در پایان $PAVD$ های $D+M-$ ساختار را مشخص کرده و به چگونگی ارتباط حلقه R به عنوان یک $PAVD$ با حلقه‌های بالایی خودش، به خصوص $\bar{R}$ می‌پردازیم.

کلید واژه: دامنه شبه ارزیابی، دامنه تقریباً شبه ارزیابی، دامنه تقریباً ارزیابی، دامنه شبه تقریباً ارزیابی، ایده‌آل قویاً اول، ایده‌آل قوی، ایده‌آل قویاً اولیه، ایده‌آل شبه قویاً اول.

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه ارزیابی جایگاه ویژه‌ای در جبر جابجایی و به خصوص حلقه‌های جابجایی موضعی دارد. بخشی از تحقیقات صورت گرفته در این زمینه به تعمیم حلقه‌های ارزیابی در میدان کسرهای این حلقه‌ها اختصاص می‌یابد. مطالب این پایان‌نامه برگرفته شده از دو مرجع [۱۱] و [۱۲] می‌باشند. هدف این پایان نامه معرفی و مطالعه دامنه‌های تقریباً شبه ارزیابی و دامنه‌های شبه تقریباً ارزیابی به عنوان دو تعمیم از حلقه‌های ارزیابی می‌باشد، بطوریکه این حلقه‌های تعمیم‌یافته، موضعی بوده و ایده‌آل‌های اول این حلقه‌ها خطی مرتب می‌باشند. شایان ذکر است که در این مراجع، مشخص‌سازی این حلقه‌ها به کمک تعریف ایده‌آل قویاً اول به عنوان تعمیمی از ایده‌آل اول، تعریف ایده‌آل‌های قوی و قویاً اولیه به عنوان تعمیمی از ایده‌آل قویاً اول، تعریف ایده‌آل شبه قویاً اول و همچنین بررسی حلقه‌های بالایی این حلقه‌های تعمیم یافته به خصوص بستار صحیح این حلقه‌ها، انجام شده است.

در سال ۱۹۷۸ در مرجع [۲۲]، دامنه‌های شبه ارزیابی ($PVDs$) به عنوان یک دسته جدید از قلمروهای صحیح، که ارتباط بسیار نزدیکی با حلقه‌های ارزیابی دارند، معرفی شده‌اند. برای معرفی چنین قلمروهای صحیحی، ابتدا ایده‌آل قویاً اول معرفی شده است. بنابه [۲۲]، ایده‌آل اول P از قلمرو صحیح R با میدان کسرهای K را قویاً اول گویند، هرگاه برای $x, y \in K$ و $xy \in P$، $x \in P$ یا $y \in P$ باشد. حال اگر همه ایده‌آل‌های اول از R، قویاً اول باشند، آنگاه R را یک دامنه شبه ارزیابی می‌نامند. یکی از مشخص‌سازیهای PVD ها در [۲۲]، به این گونه است که حلقه موضعی (R, M) یک PVD است اگر و تنها $(M : M) = \{x \in K | xM \subseteq M\}$ یک دامنه ارزیابی با ایده‌آل بیشین M باشد. همچنین در [۲۲، قضیه ۵.۱(۳)]، نشان داده شده است که قلمرو صحیح R یک PVD است اگر و تنها اگر برای هر $0 \neq x \in K$، $x \in R$ یا برای هر عنصر غیر یکه $a \in R$، $ax^{-1} \in R$ باشد. پس به وضوح هر دامنه ارزیابی یک PVD است. علاوه بر این در [۲۲، گزاره ۲.۳]، ثابت شده است که اگر R یک PVD نوتری باشد،

آنگاه $dimR \leq ۱$ است. از طرفی در [۲۳، مثال ۱.۳]، نشان داده شده برای هر $n \geq ۱$، یک PVD مانند R با $dimR = n$ وجود دارد بطوریکه R دامنه ارزیابی نیست.

در مرجع [۱۲]، دو تعمیم از ایده‌آل‌های قویاً اول ارائه شده است. ما در بخش ۱.۲، ابتدا به معرفی ایده‌آل‌های قوی به عنوان نخستین تعمیم از ایده‌آل‌های قویاً اول پرداخته و در سرتاسر این بخش ویژگی‌های ایده‌آل‌های قوی، ارتباط این ایده‌آل‌ها با ایده‌آل‌های دیگر حلقه و ایده‌آل‌های قوی مشترک در یک حلقه و حلقه‌های بالایی آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ایده‌آل ناصفر I از R را قوی گوییم، هرگاه برای $x,y \in K$ و $xy \in I$، $x \in R$ یا $y \in R$ باشد. در گزاره ۶.۱.۲، ثابت می‌کنیم که اگر ایده‌آل I در R اول و قوی باشد، آنگاه I قویاً اول است. همچنین در گزاره‌های ۱۲.۱.۲، و ۱۷.۱.۲، به ترتیب نشان می‌دهیم اگر ایده‌آل I در R قوی و سره باشد، آنگاه $\sqrt{I}$ در R اول است و اگر R نیمه نرمال باشد، آنگاه $\sqrt{I}$ در R قویاً اول می‌باشد. علاوه بر این در قضیه ۸.۱.۲، نشان می‌دهیم ایده‌آل قوی I با هر ایده‌آل اول از R مقایسه‌پذیر بوده و در نتیجه ایده‌آل‌های اول مشمول در $\sqrt{I}$ خطی مرتب هستند.

در بخش ۲.۲، ایده‌آل قویاً اولیه را به عنوان تعمیم دوم از ایده‌آل قویاً اول تعریف می‌کنیم. به این صورت که ایده‌آل I از R را قویاً اولیه گوییم، هرگاه برای $x,y \in K$ و $xy \in I$، $x \in I$ یا برای بعضی $n \geq ۱$، $y^n \in I$ باشد. مثال ۱۳.۱.۲ و مطالب بعد از گزاره ۲.۲.۲، نشان می‌دهند که شرط قوی بودن و قویاً اولیه بودن برای یک ایده‌آل دو مفهوم کاملاً متفاوت هستند. به وضوح هر ایده‌آل قویاً اولیه سره، اولیه است و طبق گزاره ۲.۲.۲، عکس این مطلب نیز در دامنه‌های ارزیابی درست است. در قضیه ۱۱.۲.۲، نشان می‌دهیم ایده‌آل I از R قویاً اولیه است اگر و فقط اگر I در بعضی از حلقه‌های بالایی ارزیابی از R، اولیه باشد. همچنین در قضیه‌های ۸.۲.۲ و ۴.۲.۲، به ترتیب ثابت می‌کنیم که یک ایده‌آل قویاً اولیه از R با هر ایده‌آل رادیکال از R مقایسه‌پذیر بوده و ایده‌آل قویاً اولیه سره I در دامنه نیمه نرمال R، قوی است و $\sqrt{I}$ در R قویاً اول می‌باشد.

در بخش ۳.۲، به معرفی و بررسی ویژگی‌های دامنه‌های تقریباً شبه ارزیابی ($APVDs$) به

عنوان تعمیمی از PVD ها می‌پردازیم. گوییم دامنه R یک $APVD$ است، اگر هر ایده‌آل اول از R قویاً اولیه باشد. مثال ۱۲.۳.۲، نمونه‌ای از یک $APVD$ است که PVD نمی‌باشد. نتیجه اصلی این بخش مشخص‌سازی $APVD$ ها می‌باشد، بطوریکه ثابت می‌کنیم دامنه موضعی (R, M)، یک $APVD$ است اگر $(M : M) = \{x \in K | xM \subseteq M\}$ یک دامنه ارزیابی و M ایده‌آل اولیه‌ای از آن باشد که رادیکال آن ایده‌آل بیشین $(M : M) = \{x \in K | xM \subseteq M\}$ است. همچنین در قضیه ۶.۳.۲، ثابت شده است که قلمرو صحیح R یک $APVD$ است اگر و فقط اگر R یک دامنه موضعی با ایده‌آل بیشین M بوده، بطوریکه برای هر $0 \neq x \in K$، $n \geq 1$ موجود بوده بطوریکه $x^n \in M$ باشد یا برای هر عنصر غیر یکه $a \in R$، $ax^{-1} \in M$ باشد. پس به وضوح هر PVD یک $APVD$ است. در پایان این بخش به مطالعه حلقه‌های بالایی از یک $APVD$ پرداخته و در گزاره ۱۰.۳.۲، ثابت می‌کنیم که بستار صحیح یک $APVD$، یک PVD است.

در بخش ۴.۲، به ارتباط مطالب بیان شده در بخش‌های قبل به خصوص ایده‌آل‌های قوی و قویاً اولیه با دامنه‌های مساعد می‌پردازیم. در [۱۷]، دامنه مساعد چنین تعریف شده که قلمرو صحیح R با میدان کسرهای K یک دامنه مساعد است اگر برای هر حلقه بالایی $T \neq K$ از R، هادی $(R : T)$ ناصفر باشد. در قضیه ۳.۴.۲، نشان می‌دهیم که قلمرو صحیح R مساعد است اگر و تنها اگر بعضی از ایده‌آل‌های R قوی باشند اگر و تنها اگر بعضی از ایده‌آل‌های R قویاً اولیه باشند. در پایان این بخش با استفاده از مطالب بیان شده در بخش‌های قبل، در قضیه ۴.۴.۲، مشخص‌سازی ارائه شده در [۱۳]، را برای دامنه‌های مساعد نوتری و در قضیه ۵.۴.۲، مشخص‌سازی ارائه شده در [۱۷] را برای دامنه‌های مساعد پروفر بهبود می‌بخشیم.

دسته دیگری از قلمروهای صحیح موضعی با نام دامنه‌های تقریباً ارزیابی $(AVDs)$ در [۳]، معرفی شده‌اند. در این مرجع قلمرو صحیح R یک دامنه تقریباً ارزیابی است، اگر برای هر $0 \neq x \in K$، $n \geq 1$ موجود بوده بطوریکه $x^n \in R$ یا $x^{-n} \in R$ باشد.

در بخش ۱.۳، دامنه‌های شبه تقریباً ارزیابی $(PAVDs)$ رابه عنوان یک دسته جدید از

قلمروهای صحیح موضعی و بسیار نزدیک با AVD ها معرفی می‌کنیم. گوییم ایده‌آل اول P از R، شبه قویاً اول است، اگر برای $x, y \in K$ و $xyP \subseteq P$، عدد صحیح و مثبت $n \geq ۱$ موجود بوده بطوریکه $x^n \in R$ یا $y^nP \subseteq P$ باشد. اگر هر ایده‌آل اول از R شبه قویاً اول باشد، آنگاه R را یک دامنه شبه تقریباً ارزیابی گوییم. در قضیه ۹.۱.۳، نشان می‌دهیم که قلمرو صحیح R یک $PAVD$ است اگر و تنها اگر برای هر $0 \neq x \in K$، $n \geq ۱$ موجود بوده بطوریکه $x^n \in R$ یا برای هر عنصر غیر یکه $a \in R$، $ax^{-n} \in R$ باشد. بنابراین واضح است که هر AVD و هر $APVD$ یک $PAVD$ می‌باشد. همچنین در این بخش به بررسی برخی از ویژگی‌های $PAVD$ ها می‌پردازیم. از جمله، در گزاره ۳.۱.۳، ثابت می‌کنیم یک $PAVD$ موضعی بوده و ایده‌آل‌های اول آن تحت رابطه شمول ترتیب خطی دارند. اما در مثال ۴.۲.۳، حلقه R نمونه‌ای از یک دامنه موضعی است که ایده‌آل‌های آن تحت رابطه شمول ترتیب خطی دارند اما R یک $PAVD$ نیست. همچنین در قضیه ۱۸.۱.۳، نشان می‌دهیم دامنه موضعی (R, M) یک $PAVD$ است اگر و تنها اگر $V = (M : M) = \{x \in K | xM \subseteq M\}$ یک AVD با ایده‌آل بیشین $\sqrt{MV}$ باشد.

در بخش ۲.۳، به ویژگی‌های $PAVD$ های $D + M$ — ساختار و مثال‌هایی از آنها می‌پردازیم. در قضیه ۱.۲.۳، ثابت می‌کنیم اگر V یک دامنه ارزیابی به شکل $V = F + M$ و D زیر حلقه سره‌ای از F باشد، آنگاه $R = D + M$ یک $PAVD$ است اگر و تنها اگر D یک میدان یا D یک $PAVD$ با میدان کسرهای H بوده بطوریکه $H \subseteq F$ یک توسیع ریشه‌ای باشد. همچنین در مثال ۶.۲.۳، نشان می‌دهیم برای هر $n \geq ۱$، یک $PAVD$ مانند R با $dimR = n$ وجود دارد بطوریکه R، AVD یا $APVD$ نمی‌باشد.

در بخش ۳.۳، حلقه‌های بالایی یک $PAVD$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در قضیه ۱۰.۳.۳، ثابت می‌کنیم که بستار صحیح یک $PAVD$ با ایده‌آل بیشین M، یک دامنه ارزیابی است اگر و تنها اگر $(M : M) = \{x \in K | xM \subseteq M\}$ روی R صحیح باشد. همچنین در گزاره ۱۱.۳.۳، نشان می‌دهیم اگر R یک $PAVD$ نوتری باشد، آنگاه $\bar{R}$ یک دامنه ارزیابی است.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در سرتاسر این پایان‌نامه حلقه‌ها جابجایی و یکدار و مدول‌ها یکانی می‌باشند.

لم ۱.۱ فرض کنید R و T دو قلمرو صحیح بوده و $R \subseteq T$ باشد. اگر R و T ایده‌آل مشترک ناصفر داشته باشند، آنگاه R و T میدان کسرهای یکسانی دارند.

اثبات: [۶، لم ۱.۳].■

گزاره ۲.۱ فرض کنید $f : R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت $(\sqrt{I})^e \subseteq \sqrt{I^e}$ است، که در آن I^e، توسیع ایده‌آل I تحت همریختی فوق است.

اثبات: [۸، تمرین ۱۸.۱].■

گزاره ۳.۱ فرض کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت $S^{-1}\sqrt{I} = \sqrt{S^{-1}I}$ است.

اثبات: [۸، گزاره ۱۱.۳ (v)].■

قضیه ۴.۱ اگر R نوتری باشد، آنگاه $R[[x]]$ نیز نوتری است.

اثبات: [۲۴، قضیه ۷۱].■

فرض کنید R و S دو حلقه باشند. S را توسیعی از R گوییم، هرگاه $R \subseteq S$ بوده و $1_R = 1_S$ باشد. در این حالت R را زیرحلقه S می‌نامیم.

تعریف ۵.۱ فرض کنید S توسیعی از R باشد. عنصر $x \in S$ را روی R صحیح گوییم، هرگاه x ریشه یک چند جمله‌ای تکین با ضرایبی در R باشد. به عبارت دیگر عناصر $r_i \in R$ ($0 \leq i \leq n-1$) موجود بوده به قسمی که

$$x^n + r_{n-1}x^{n-1} + ... + r_0 = 0.$$

مجموعه همه عناصری از S که روی R صحیح باشند را بستار صحیح R در S نامیده و آن را با $\bar{R}$ نمایش می‌دهیم. بنابه [۸، نتیجه ۳.۵]، $\bar{R}$ زیرحلقه‌ای از S شامل R است. اگر $\bar{R} = R$ باشد، آنگاه گوییم R در S بطور صحیح بسته است. همچنین اگر $\bar{R} = S$ باشد، آنگاه گوییم S توسیع صحیحی از R است.

اگر R یک قلمرو صحیح و K میدان کسرهای R باشد، در این صورت منظور از $\bar{R}$، بستار

صحیح R در K می‌باشد. همچنین R را بطور صحیح بسته گوییم، در صورتی که R در K بطور صحیح بسته باشد.

تعریف ۶.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. پوچساز M را با $Ann_R(M)$ نمایش داده و به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$Ann_R(M)=\{r\in R|rM=\circ\}.$$

$R-$ مدول M را وفادار گوییم هرگاه $Ann_R(M)=\{\circ\}$ باشد.

گزاره ۷.۱ فرض کنید S توسیعی از R باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند.

الف) $x\in S$ روی R صحیح است.

ب) $R[x]$ یک $R-$ مدول با تولید متناهی است.

ج) زیرحلقه T از S شامل $R[x]$ موجود بوده بطوریکه T به عنوان $R-$ مدول با تولید متناهی است.

د) $R[x]-$ مدول وفادار M موجود بوده بطوریکه M به عنوان $R-$ مدول با تولید متناهی است.

اثبات: [۸، گزاره ۱.۵].■

گزاره ۸.۱ فرض کنید S توسیع صحیحی از R و Q ایده‌آل اولی از S بوده بطوریکه $P=Q^c=Q\cap R$ باشد. در این صورت، Q در S بیشین است اگر و تنها اگر P در R بیشین باشد.

اثبات: [۸، نتیجه ۸.۵].■

قضیه ۹.۱ فرض کنید S توسیعی صحیح و P ایده‌آل اولی از R باشند. در این صورت، ایده‌آل اول Q از S موجود بوده بطوریکه $P=Q\cap R$ است.

اثبات: [۸، قضیه ۱۰.۵].■

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید R یک قلمرو صحیح و K میدان کسرهای R باشد. گوییم R یک حلقه ارزیابی از K است اگر برای هر $\circ\neq x\in K$، $x\in R$ یا $x^{-1}\in R$ باشد (یا هر دو).

گزاره ۱۱.۱ فرض کنید R یک حلقه ارزیابی از میدان K باشد. در این صورت

الف) K میدان کسرهای R است.

ب) اگر S یک زیرحلقه از K شامل R باشد، آنگاه S نیز یک حلقه ارزیابی از K است.

ج) R یک حلقه موضعی است.

د) R بطور صحیح بسته است (یعنی در K، $\bar{R} = R$ است).

اثبات: [۲۱، گزاره ۳، بخش ۱.۵].■

گزاره ۱۲.۱ مجموعه همه ایده‌آل‌های یک حلقه ارزیابی کلاً مرتب است. به عبارت دیگر، اگر R یک حلقه ارزیابی، I و J ایده‌آل‌هایی از R باشند، آنگاه $I \subseteq J$ یا $J \subseteq I$ است. برعکس، اگر مجموعه همه ایده‌آل‌های یک قلمرو صحیح R با میدان کسرهای K، کلاً مرتب باشد، آنگاه R یک حلقه ارزیابی از K است.

اثبات: [۲۱، گزاره ۴، بخش ۱.۵].■

گزاره ۱۳.۱ فرض کنید R زیرحلقه‌ای از میدان K باشد. آنگاه $\bar{R}$ (بستار صحیح R در K) اشتراک همه حلقه‌های ارزیابی از K شامل R است.

اثبات: [۸، نتیجه ۲۲.۵].■

تعریف ۱۴.۱ فرض کنید K یک میدان و $K^* = K \setminus \{0\}$ گروه ضربی K باشد. یک ارزیابی گسسته روی K نگاشتی پوشا مانند $v : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ است بطوریکه v در شرایط زیر صدق می‌کند، برای هر $a, b \in K^*$

الف) $v(ab) = v(a) + v(b)$،

ب) $Min\{v(a), v(b)\} \leq v(a+b)$.

در این صورت $V = \{x \in K | v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ یک حلقه ارزیابی از K با ایده‌آل بیشین $m = \{x \in K | v(x) > 0\}$ است. V را حلقه ارزیابی متناظر با نگاشت v گوییم. در ضمن با تعریف $v(0) = \infty$ می توان نگاشت v را به K گسترش داد.

قلمرو صحیح R با میدان کسرهای K را یک حلقه ارزیابی گسسته (DVR) گوییم، هرگاه یک ارزیابی گسسته مانند v روی K موجود بوده بطوریکه R حلقه ارزیابی متناظر با v باشد.

قضیه ۱۵.۱ فرض کنید v یک ارزیابی گسسته روی K با حلقه ارزیابی گسسته R و m ایده‌آل بیشین منحصر به فرد R باشد. در این صورت

الف) m یک ایده‌آل اصلی است. همچنین $m = Rt$ است اگر و فقط اگر $v(t) = ۱$ باشد.

ب) اگر $v(t) = ۱$ باشد، آنگاه هر $x \in K$ را می‌توان به شکل منحصر به فردی به صورت $x = ut^n$ نوشت، که $u \in R$ یکه و $n \in \mathbb{Z}$ است. همچنین $K = \{\frac{r}{t^n} | r \in R, n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}\}$ می‌باشد.

ج) هر ایده‌آل ناصفر از R را می‌توان به طور منحصر به فردی به صورت m^n $(n \geq ۱)$، نوشت. به خصوص R یک دامنه ایده‌آل اصلی (PID) می‌باشد.

اثبات: [۲۱، قضیه ۱، بخش ۲.۵].■

قضیه ۱۶.۱ فرض کنید R یک قلمرو صحیح موضعی و نوتری با تنها ایده‌آل بیشین $m \neq ۰$ باشد. همچنین K میدان کسرهای حلقه R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

الف) R یک DVR است.

ب) R یک PID است.

پ) m یک ایده‌آل اصلی است.

ت) R به طور صحیح بسته بوده و هر ایده‌آل اول ناصفر R، بیشین است.

ث) هر ایده‌آل ناصفر R، توانی از ایده‌آل m است.

اثبات: [۲۱، قضیه ۲، بخش ۲.۵].■

تعریف ۱۷.۱ فرض کنید R یک قلمرو صحیح و K میدان کسرهای R باشد. $R-$ زیرمدول A از K را یک ایده‌آل کسری از R گوییم، هرگاه $۰ \neq x \in R$ موجود بوده به قسمی که $xA \subseteq R$ باشد. همچنین ایده‌آل کسری A را معکوس‌پذیر گوییم، هرگاه ایده‌آل کسری دیگری مانند B موجود بوده به قسمی که $AB = R$ باشد.

تعریف ۱۸.۱ قلمرو صحیح R را یک دامنه پروفر گوییم، هرگاه هر ایده‌آل ناصفر و با تولید متناهی R معکوس‌پذیر باشد.

گزاره ۱۹.۱ قلمرو صحیح R یک دامنه پروفر است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل بیشین P از R، R_P یک حلقه ارزیابی باشد.

اثبات: [۲۵، نتیجه ۷.۶].■

مجموعه همه ایده‌آل‌های اول R را با $Spec(R)$ نمایش داده و به آن طیف R گوییم.

تعریف ۲۰.۱ فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. بعد کرول حلقه R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$dimR = sup\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} | P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq ... \subsetneqq P_n \quad ; \quad P_i \in Spec(R)\}.$$

به شرط آنکه مجموعه فوق کران‌دار باشد. در غیر این صورت قرار می‌دهیم $dimR = \infty$.

تعریف ۲۱.۱ فرض کنید P یک ایده‌آل اول باشد. ارتفاع P را با $ht(P)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$ht(P) = sup\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} | P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq ... \subsetneqq P_n = P \quad ; \quad P_i \in Spec(R)\}.$$

به شرط آنکه مجموعه فوق کران‌دار باشد. در غیر این صورت قرار می دهیم $ht(P) = \infty$.

تعریف ۲۲.۱ فرض کنید R یک قلمرو صحیح با میدان کسرهای K باشد. حلقه T را یک حلقه بالایی از R گوییم، هرگاه $R \subseteq T \subseteq K$ باشد.

تعریف ۲۳.۱ فرض کنید R یک زیرحلقه از T باشد. بزرگترین ایده‌آل مشترک R و T را هادی R در T گوییم. به آسانی می‌توان دید که این ایده‌آل با مجموعه

$$\{x \in R | xT \subseteq R\}$$

برابر است. هادی R در T را با $(R : T)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۴.۱ فرض کنید V یک حلقه ارزیابی غیر بدیهی باشد (V میدان نباشد). حلقه ارزیابی V را $K + M -$ ساختار گوییم، اگر یک حلقه ارزیابی غیر بدیهی مانند W به صورت $W = K + M = \{x + y | x \in K \ , \ y \in M\}$ موجود بوده بطوریکه M ایده‌آل بیشین W، K

میدانی مشمول در W و $W \approx V$ باشد. همچنین حلقه R را $D+M$ — ساختار گوییم، هرگاه زیرحلقه $S = D+M = \{a+b | a \in D \ , \ b \in M\}$ از W موجود باشد بطوریکه D زیرحلقه‌ای از K بوده و $R \approx S$ باشد.

قضیه ۲۵.۱ فرض کنید $V = K+M$ یک حلقه ارزیابی غیر بدیهی (V میدان نباشد) با میدان کسرهای L باشد، بطوریکه K یک میدان و M ایده‌آل بیشین V است. همچنین فرض کنید D زیرحلقه سره‌ای از K باشد. قرار دهید $R = D+M$. در این صورت

الف) R یک قلمرو صحیح بوده و ایده‌آل M، هادی R در V می‌باشد.

ب) $\bar{R} = \bar{D} + M$ بوده بطوریکه $\bar{D}$ بستار صحیح D در K است.

ج) همه ایده‌آل‌های R تحت رابطه شمول با ایده‌آل M مقایسه‌پذیرند.

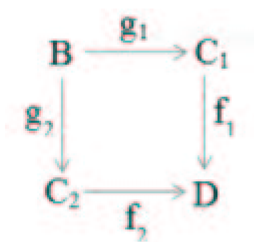
د) فرض کنید $\{J_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده همه ایده‌آل‌های D باشد. در این صورت $\{J_\alpha + M\}_{\alpha \in I}$ خانواده همه ایده‌آل‌های شامل M در R است. علاوه بر این برای هر $\alpha \in I$، $\frac{R}{J_\alpha + M} \approx \frac{D}{J_\alpha}$ بوده بطوریکه ایده‌آل $J_\alpha + M$ در R بیشین، اول و $(P_\alpha + M)$ — اولیه است اگر و تنها اگر J_α در D به ترتیب بیشین، اول و P_α — اولیه باشد.

ه) $dimR = dimD + dimV$.

و) R یک حلقه ارزیابی است اگر و تنها اگر D یک حلقه ارزیابی با میدان کسرهای K باشد.

اثبات: [۱۴، قضیه ۱.۲].■

تعریف ۲۶.۱ در نمودار جابجایی زیر در رسته $\mathcal{C}$،



شئ B به همراه ریخت‌های g_1 و g_2 را یک برگشت برای f_1 و f_2 گوییم، اگر برای هر زوج از ریخت‌های $h_1 : B' \to C_1$ و $h_2 : B' \to C_2$ که $f_1 h_1 = f_2 h_2$ است، ریخت منحصر به فرد $t : B' \to B$ موجود بوده بطوریکه $h_1 = g_1 t$ و $h_2 = g_2 t$ باشد. همچنین برگشت نمودار فوق را با $B = C_1 \times_D C_2$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۲۷.۱ فرض کنید P یک ایده‌آل اول از قلمرو صحیح نوتری R است. اگر $ht(P) \geq ۲$ باشد، آنگاه بی‌نهایت ایده‌آل اول از R مشمول در P و با ارتفاع یک وجود دارد.

اثبات: [۲۵، تمرین ۱، فصل ۷].■

تعریف ۲۸.۱ قلمرو صحیح R را نیمه نرمال گوییم، اگر $x \in R$ باشد، جائیکه $x \in K$ و برای هر عدد صحیح مثبت و به اندازه کافی بزرگ n، $x^n \in R$ است.

لم ۲۹.۱ فرض کنید R یک قلمرو صحیح با میدان کسرهای K باشد. در این صورت $\bar{R}$ نیمه نرمال است.

اثبات: فرض کنید $x \in K$ بوده و برای عدد صحیح، مثبت و به اندازه کافی بزرگ n، $x^n \in \bar{R}$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} x^n \in \bar{R} \;\; &\Rightarrow \;\; (x^n)^k + a_{n-۱}(x^n)^{k-۱} + ... + a_۱ x^n + a_۰ = ۰ \;,\; \exists a_i \in R \;,\; \exists k \geq ۱ \\ &\Rightarrow \;\; x^{nk} + a_{n-۱}x^{n(k-۱)} + ... + a_۱ x^n + a_۰ = ۰ \\ &\Rightarrow \;\; x \in \bar{R}. \end{aligned}$$

بنابراین $\bar{R}$ نیمه نرمال است.■

گزاره ۳۰.۱ فرض کنید F یک میدان و $V = F[[x]]$ باشد. در این صورت V یک DVR است.

اثبات: به آسانی از شکل عناصر V ثابت می‌شود که V یک دامنه موضعی با ایده‌آل بیشین منحصر به فرد $M = Vx$ است. حال فرض کنید P ایده‌آل ناصفری از V باشد. می‌دانیم $P \subseteq M$ است. عنصر $P \ni a = \sum_{i=۰}^{\infty} v_i x^i \neq ۰$ را در نظر بگیرید. چون P سره است، لذا a غیر یکه بوده و بنابراین $v_۰ = ۰$ می‌باشد. در نتیجه $n \geq ۱$ (یکتا) و $u \in U(V)$ موجود بوده بطوریکه $a = ux^n$ است. چون $ux^n = a \in P$ بوده و u یکه است، لذا $x^n \in P$ می‌باشد. پس $x \in P$ است. بنابراین $P = M$ بوده و لذا $dimV = ۱$ می‌باشد. از طرفی بنابه قضیه ۴.۱، V نوتری است. حال چون M اصلی است، لذا طبق قضیه ۱٦.۱ ((پ)⇐(الف))، V یک DVR می‌باشد.■

فصل ۲

دامنه‌های تقریباً شبه ارزیابی