فهرست مطالب

⋆ ⋆ ⋆

چکیده
نگاشت‌های طولپای خطی بین فضاهای توابع لیپشیتس

توسط حدیث پازنده

فضاهای باناخ توابع لیپشیتس در سال ۱۹۶۱ توسط دی‌لییو معرفی شدند. سپس د.شربرت در سال ۱۹۶۳ نشان داد که همریختی‌های یکانی بین جبرهای لیپشیتس به‌صورت همریختی‌های ترکیبی هستند. مطالعه‌ی نگاشت‌های طولپای خطی بین فضاهای توابع لیپشیتس توسط روی در سال ۱۹۶۸ آغاز شد و او ثابت کرد که این نگاشت‌ها وقتی که X همبند و قطرش حداکثر ۱ است به‌صورت ترکیبی هستند. در سال ۲۰۰۸ جیمنز وارگاس و ویلگاس والسیوس حالتی را بررسی کردند که T یک نگاشت طولپای خطی از $Lip(X,d)$ به $Lip(Y,\rho)$ است و $T1_X$ یک انقباض است و نشان دادند دراین‌صورت زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از Y مثل Y_0، یک تابع لیپشیتس مانند φ از Y_0 بروی X با شرط $L(\varphi) \leqslant max\{1, diam(X)\}$ و یک تابع $\tau \in Lip(Y,\rho)$ با شرایط $||\tau||_{Y,L} = 1$ و $|\tau(y)| = 1$ به‌ازای‌هر $y \in Y_0$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$Tf(y) = \tau(y)f(\varphi(y)) \quad (f \in Lip(X,d), \quad y \in Y_0).$$

سپس این قضیه را برای حالتی که T پوشا یا همبعد ۱ است، مورد بررسی قرار دادند.

در این پایان‌نامه نگاشت‌های طولپای خطی بین فضاهای توابع لیپشیتس بر اساس کارهای وارگاس و والسیلوس مورد بررسی قرار می‌گیرند.

تاریخچه

فضاهای باناخ توابع لیپشیتس [1] در سال ۱۹۶۱ توسط دی‌لیبو [2] معرفی شدند. سپس در سال ۱۹۶۳، د.شربرت [3] با معرفی جبرهای لیپشیتس، ساختار ایده‌آل‌ها و مشتق‌های نقطه‌ای آن‌ها را مورد مطالعه قرار داد و نشان داد که همریختی‌های یکانی بین جبرهای لیپشیتس به‌صورت همریختی‌های ترکیبی هستند.

مطالعه‌ی نگاشت‌های طولپای خطی بین فضاهای توابع لیپشیتس در سال ۱۹۶۸ توسط روی [4] در مقاله‌ی [۱۶] آغاز شد. او ثابت کرد هرگاه T یک نگاشت طولپای خطی پوشا از $Lip(X,d)$ به $Lip(Y,\rho)$ باشد وقتی که X همبند و قطرش حداکثر ۱ است، داریم

$$Tf(y) = \tau f(\varphi(y)) \quad (f \in Lip(X,d), \quad y \in Y),$$

که φ یک نگاشت طولپا از Y بروی X و τ یک اسکالر در $S_{\mathbb{K}}$ است.

نوینگر [5] در سال ۱۹۷۵ و در مقاله‌ی [۱۵] نتایج روی را برای حالتی که T یک نگاشت طولپای خطی از $Lip(X,d)$ بروی $Lip(Y,\rho)$ است که X و Y فضاهای همبند با قطر حداکثر ۱ هستند، بدست آورد.

در سال ۱۹۶۹ واسوادا [6] در رساله‌ی دکتریش [۲۰] نتایج فوق را برای حالتی که X و Y، $\beta-$همبند هستند و $\beta < 1$ و قطر X و Y حداکثر ۲ است، تعمیم داد.

قضیه‌ی کلاسیک استون [7]—باناخ [8] بیان می‌کند که اگر T یک نگاشت طولپای خطی از $C(X)$ بروی $C(Y)$ باشد آن‌گاه یک همانریختی مانند φ از Y بروی X و یک تابع پیوسته مانند τ از Y

[1] Lipschitz
[2] K. de Leeuw
[3] D. Sherbert
[4] Roy
[5] Novinger
[6] Vasvada
[7] Stone
[8] Banach

به $S_{\mathbb{K}}$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$Tf(y) = \tau f(\varphi(y)) \quad (f \in C(X), \quad y \in Y).$$

تعمیم مهم این قضیه را هولزتینسکی [1] در سال ۱۹۶۶ و در مقاله‌ی [۹] بدست آورد. او ثابت کرد که اگر T یک نگاشت طولپای خطی از $C(X)$ به $C(Y)$ باشد، آن‌گاه یک زیرمجموعه‌ی بسته مانند $Y_\circ$ از Y، یک تابع پیوسته مانند φ از $Y_\circ$ بروی X و یک تابع $\tau \in C(Y)$ با شرایط $||\tau||_Y = ۱$ و $|\tau(y)| = ۱$ به‌ازای‌هر $y \in Y_\circ$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$Tf(y) = \tau(y) f(\varphi(y)) \quad (f \in C(X), \quad y \in Y_\circ).$$

در سال ۲۰۰۸، جیمنز وارگاس [2] و ویلگاس والسیلوس [3] در مقاله‌ی [۱۱] قضیه‌ی هولزتینسکی را در فضاهای توابع لیپشیتس نیز به صورت زیر تعمیم داد:
اگر T یک نگاشت طولپای خطی از $Lip(X,d)$ به $Lip(Y,\rho)$ باشد به‌طوری‌که $T۱_X$ انقباض است و ۱_X تابع ثابت 1 روی X است، آن‌گاه یک زیرمجموعه‌ی بسته مانند $Y_\circ$ از Y، یک تابع لیپشیتس مانند φ از $Y_\circ$ بروی X با شرط $L(\varphi) \leqslant \{۱, diam(X)\}$ و یک تابع $\tau \in Lip(Y,\rho)$ با شرایط $||\tau||_{Y,L} = ۱$ و $|\tau(y)| = ۱$ به‌ازای‌هر $y \in Y_\circ$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$Tf(y) = \tau(y) f(\varphi(y)) \quad (f \in Lip(X,d), \quad y \in Y_\circ).$$

در اثبات این قضیه از تکنیک نقطه‌ی نهایی استفاده شده‌است همان‌طورکه در [۱۲]، [۱۵]، [۱۶] و [۲۰] از این روش استفاده شده‌بود. دانفورد [4] و شوارتز[5] در کتاب عملگرهای خطی [۵] نیز با استفاده از این تکنیک قضیه‌ی استون—باناخ را اثبات می‌کنند.

[1] Holsztynski
[2] A. Jimenez Vargas
[3] M. Vilegas Vallecillos
[4] Dunford
[5] Schwartz

جیمنز وارگاس و ویلگاس والسیلوس، قضیه مذکور را در حالتی که T یک نگاشت طولپای خطی از $Lip(X,d)$ بروی $Lip(Y,\rho)$ و $T1_X$ یک انقباض است، مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که

$$Tf(y) = \tau(y)f(\varphi(y)) \quad (f \in Lip(X,d), \quad y \in Y)$$

که φ یک همانریختی لیپشیتس از Y بروی X و τ یک تابع لیپشیتس از Y به $S_{\mathbb{K}}$ است. در پایان نیز این قضیه را در حالتی که T همبعد ۱ است مورد بررسی قرار داده و نتایج جالبی بدست آوردند. ما در این پایان‌نامه این مقاله و موضوعات مورد بحث در آن را کاملاً باز کرده و در سه فصل تدوین نموده‌ایم. در فصل اول مباحثی از آنالیز تابعی، توپولوژی و نظریه‌ی اندازه‌ها را بیان می‌کنیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. فصل دوم از سه بخش تشکیل شده است. در بخش اول فشرده‌سازی استون ـچخ[۳] را برای فضاهای توپولوژیک کاملاً منظم مطرح می کنیم. در بخش دوم این فصل نقاط نهایی گوی واحد بسته‌ی فضای دوگان فضاهای تابعی یکنواخت را بدست می آوریم. در بخش سوم با استفاده از دو بخش قبل، ساختار نقاط نهایی گوی واحد بسته‌ی فضای دوگان فضاهای توابع لیپشیتس را تعیین می‌کنیم. فصل سوم مشتمل بر سه بخش است. در بخش اول ساختار نگاشت‌های طولپای خطی بین فضاهای توابع لیپشیتس را تعیین می‌کنیم. در بخش‌های دوم و سوم، به‌ترتیب، وضعیت ساختار نگاشت‌های مذکور را در حالتی که پوشا و همبعد 1 هستند، مورد بررسی قرار می‌دهیم .

[۳] Cech

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که مقدمات و پیش‌نیازهایی برای فصل‌های بعد هستند.

۱.۱ فضاهای برداری توپولوژیک

در این بخش با معرفی فضاهای برداری توپولوژیک و نگاشت‌های خطی کراندار به بیان مقدماتی در زمینه‌ی دوگان یک فضای برداری توپولوژیک، الحاقی یک نگاشت و نگاشت‌های طولپا می‌پردازیم. در سراسر این مقاله منظور از $\mathbb{K}$، یا میدان اقلیدسی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یا میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ است.

۱.۱.۱ تعریف.

فضای برداری $\mathfrak{X}$ روی میدان $\mathbb{K}$ را یک فضای نرمدار گوییم هرگاه به‌ازای‌هر عضو x از $\mathfrak{X}$ یک عدد حقیقی نامنفی $||x||$ (نرم x) نظیر شود به‌طوری‌که

(الف) $(x, y \in \mathfrak{X}) \quad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$؛

(ب) $(x \in \mathfrak{X}, a \in \mathbb{K}) \quad ||ax|| = |a|.||x||$؛

(ج) $(x \in \mathfrak{X}) \quad x = 0 \Leftrightarrow ||x|| = 0$.

اگر در فضای نرمدار $(\mathfrak{X}, ||.||)$ به‌ازای‌هر $x, y \in \mathfrak{X}$ تعریف کنیم: $d(x,y) := ||x-y||$، دراین‌صورت d یک متریک بر $\mathfrak{X}$ است که آن را متریک حاصل از نرم $||.||$ بر $\mathfrak{X}$ می‌نامیم.

۲.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ و τ یک توپولوژی بر $\mathfrak{X}$ باشد به‌طوری‌که

(الف) به‌ازای‌هر $x \in \mathfrak{X}$، مجموعه تک‌عضوی $\{x\}$ بسته باشد؛

(ب) اعمال جمع و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند؛

دراین‌صورت $\mathfrak{X}$ را یک فضای برداری توپولوژیک می‌نامیم. به‌عنوان مثال فضاهای نرمدار، فضاهایی برداری توپولوژیک هستند.

۳.۱.۱ تعریف.

فضای برداری توپولوژیک $(\mathfrak{X}, \tau)$ را مترپذیر نامیم هرگاه τ با متریکی بر $\mathfrak{X}$ مانند d سازگار باشد.

۴.۱.۱ تعریف.

نگاشت T از فضای برداری $\mathfrak{X}$ به‌توی فضای برداری $\mathcal{Y}$ را یک تبدیل خطی (نگاشت خطی) گوییم، هرگاه

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y) \quad (x, y \in \mathfrak{X}\ ,\ \alpha \in \mathbb{K})$$

هر تبدیل خطی از فضای برداری $\mathfrak{X}$ به میدان $\mathbb{K}$ را یک تابعک خطی می‌نامیم.

۵.۱.۱ تعریف.

زیرمجموعه‌ی E از فضای برداری توپولوژیک $\mathfrak{X}$ را کراندار گوییم هرگاه به‌ازای‌هر همسایگی V از 0 در $\mathfrak{X}$ عددی مانند $s > 0$ یافت شود به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $t > s$؛ $E \subseteq tV$.

۶.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای برداری توپولوژیک روی میدان $\mathbb{K}$ باشند، نگاشت خطی T از $\mathfrak{X}$ به $\mathcal{Y}$ را کراندار گوییم هرگاه تصویر هر مجموعه‌ی کراندار در $\mathfrak{X}$ تحت T، یک مجموعه‌ی کراندار در $\mathcal{Y}$ باشد.

۷.۱.۱ قضیه.

فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار باشند، نگاشت خطی T از $\mathfrak{X}$ به $\mathcal{Y}$ کراندار است اگروتنهااگر عدد مثبت ثابتی مانند M وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $x \in \mathfrak{X}$؛

$$||Tx|| \leq M||x||.$$

۸.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای برداری توپولوژیک روی میدان $\mathbb{K}$ باشند. دراین‌صورت گردایه‌ی تمام نگاشت‌های خطی کراندار از $\mathfrak{X}$ به $\mathcal{Y}$ را به $\mathfrak{B}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ نشان می‌دهیم. اگر $\mathcal{Y} = \mathfrak{X}$، آن‌گاه $\mathfrak{B}(\mathfrak{X},\mathfrak{X})$ را به‌اختصار به $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ نشان می‌دهیم.

۹.۱.۱ قضیه.[17:1,32]

فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای برداری توپولوژیک روی میدان $\mathbb{K}$ باشند و $\Lambda : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ یک نگاشت خطی باشد. هم‌چنین $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از نقاط $\mathfrak{X}$ باشد. دراین‌صورت استلزام‌های

(پ) $\Rightarrow$ (ب) $\Rightarrow$ (الف) برقرارند. هرگاه $\mathfrak{X}$ مترپذیر باشد استلزام‌های (الف) $\Rightarrow$ (ت) $\Rightarrow$ (پ) نیز برقرارند. درنتیجه دراین حالت چهار خاصیت زیر هم‌ارز می‌باشند.

(الف) Λ پیوسته است؛

(ب) Λ کراندار است؛

(ج) اگر $x_n \to 0$، آن‌گاه $\{\Lambda x_n \ : \ n = 1, 2, 3, ...\}$ یک مجموعه‌ی کراندار در Y است؛

(د) اگر $x_n \to 0$، آن‌گاه $\Lambda x_n \to 0$.

۱۰.۱.۱ قضیه.

فرض کنیم $(\mathfrak{X}, ||.||_1)$ و $(\mathcal{Y}, ||.||_2)$ دو فضای توپولوژیک نرمدار و $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ دنباله‌ای از نقاط $\mathfrak{X}$ باشند. دراین‌صورت نگاشت خطی $\Lambda : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ پیوسته است اگروتنهااگر از $||x_n - x||_1 \to 0$ نتیجه شود

$$||\Lambda x_n - \Lambda x||_2 \to 0.$$

۱۱.۱.۱ قضیه.

فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای توپولوژیک باشند و $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ دنباله‌ای از نقاط $\mathfrak{X}$ باشد و $a \in A$ به‌طوری‌که $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ در $\mathfrak{X}$. اگر $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ یک تابع پیوسته باشد، آن‌گاه $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$ در $\mathcal{Y}$.

۱۲.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیک روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. مجموعه‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی پیوسته بر $\mathfrak{X}$ را فضای دوگان $\mathfrak{X}$ نامیده و آن را به $\mathfrak{X}^*$ نشان می‌دهیم. اگر $\mathfrak{X}$ مترپذیر باشد، آن‌گاه $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{B}(\mathfrak{X}, \mathbb{K})$.

۱۳.۱.۱ **تعریف.**

یک فضای باناخ عبارت است از یک فضای نرمدار که تحت متریک حاصل از نرمش تمام باشد، به‌عبارت دیگر هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

۱۴.۱.۱ قضیه. [17:4,1]

فرض کنیم $(\mathfrak{X},||.||_1)$ و $(\mathcal{Y},||.||_2)$ دو فضای نرمدار باشند.

(الف) به هر $\Lambda \in \mathfrak{B}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ عدد حقیقی نامنفی $||\Lambda|| := \sup\{||\Lambda x|| : x \in \mathfrak{X}, ||x|| \leq 1\}$ را مربوط می‌کنیم و آن را نرم عملگری Λ می‌نامیم. این تعریف فضای $\mathfrak{B}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ را به یک فضای نرمدار تبدیل می‌کند. اگر $\mathcal{Y}$ یک فضای باناخ باشد، آن‌گاه $\mathfrak{B}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ نیز فضایی باناخ است؛

(ب) اگر $\Lambda \in \mathfrak{B}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$، آن‌گاه $||\Lambda x||_2 \leqslant ||\Lambda||\ ||x||_1$.

۱۵.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از تابعک‌ها روی فضای برداری $\mathfrak{X}$ باشد. گوییم $\mathcal{F}$ نقاط $\mathfrak{X}$ را جدا می‌کند هرگاه به‌ازای‌هر $x,y \in \mathfrak{X}$ که $x \neq y$، $f \in \mathcal{F}$ی یافت شود به‌طوری‌که $f(x) \neq f(y)$.

۱۶.۱.۱ قضیه. [17:3,10]

فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری بوده و $\mathfrak{X}'$ یک فضای برداری از تابعک‌های خطی بر $\mathfrak{X}$ باشد به‌طوری‌که نقاط $\mathfrak{X}$ را جدا کند. دراین‌صورت $\mathfrak{X}'$—توپولوژی (ضعیف‌ترین توپولوژی بر $\mathfrak{X}$ که تحت آن اعضای $\mathfrak{X}'$ پیوسته می‌شوند)، $\mathfrak{X}$ را به یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب تبدیل می‌کند که فضای دوگانش $\mathfrak{X}'$ است.

۱۷.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$، $x \in \mathfrak{X}$ و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از تابعک‌ها روی $\mathfrak{X}$ باشد. نگاشت $e_x : A \longrightarrow \mathbb{K}$ با ضابطه‌ی $e_x(f) = f(x)$ را نگاشت مقداری بر $\mathcal{F}$ در نقطه‌ی x می‌نامیم.

۱۸.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیک روی میدان $\mathbb{K}$ و $\mathfrak{X}^*$ دوگان $\mathfrak{X}$ باشد. دراین‌صورت $\{e_x : x \in \mathfrak{X}\}$—توپولوژی بر $\mathfrak{X}^*$، یعنی، کوچک‌ترین توپولوژی بر $\mathfrak{X}^*$ که به‌ازای‌هر $x \in \mathfrak{X}$، نگاشت e_x نسبت به آن توپولوژی پیوسته باشد، را توپولوژی ضعیف—ستاره بر $\mathfrak{X}^*$ می‌نامیم.

یک مجموعه‌ی زیرپایه‌ای باز برای توپولوژی ضعیف—ستاره به‌شکل زیر است:

$$U(\Lambda_0, x_0, \varepsilon) = \{\Lambda \in \mathfrak{X}^* : |e_x(\Lambda) - e_x(\Lambda_0)|\} = \{\Lambda \in \mathfrak{X}^* : |\Lambda x - \Lambda_0 x| < \varepsilon\}$$

که در آن $x \in \mathfrak{X}$، $\Lambda_0 \in \mathfrak{X}^*$ و $\varepsilon > 0$. یک مجموعه‌ی پایه‌ای برای توپولوژی ضعیف—ستاره به‌شکل زیر است:

$$(\Lambda_0, x_1, ..., x_n \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = \{\Lambda \in \mathfrak{X}^* : |\Lambda(x_i) - \Lambda_0(x_i)| < \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n\},$$

که در آن $x_1, ..., x_n \in \mathfrak{X}$ و اعداد $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ مثبت هستند.

۱۹.۱.۱ قضیه (قضیه باناخ — آلوگلو).[17:3,15]

هرگاه V یک همسایگی 0 در فضای برداری توپولوژیک $\mathfrak{X}$ بوده و

$$K = \{\Lambda \in \mathfrak{X}^* : |\Lambda x| \leq 1, \forall x \in V\},$$

آن‌گاه K در $\mathfrak{X}^*$ با توپولوژی ضعیف—ستاره فشرده است.

۲۰.۱.۱ قضیه. [17:4,10]

فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار باشند. به‌هر $T \in \mathfrak{B}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ یک $T^* \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y}^*,\mathfrak{X}^*)$ منحصربه‌فرد نظیر است که در رابطه‌ی

$$< Tx, y^* >=< x, T^*y^* >$$

به‌ازای‌هر $x \in \mathfrak{X}$ و هر $y^* \in Y^*$ صدق می‌کند. درواقع به‌ازای‌هر $y^* \in \mathcal{Y}^*$؛ $T^*y^* = y^*oT$. به‌علاوه، T^* در $||T|| = ||T^*||$ صدق می‌نماید. T^* را الحاقی T می‌نامیم.

۲۱.۱.۱ قضیه **(قضیه جداسازی)**. [17:3,4]

فرض کنیم A و B دو مجموعه‌ی از هم جدا، ناتهی و محدب در فضای برداری توپولوژیک $\mathfrak{X}$ باشند.

(الف) اگر A باز باشد، آن‌گاه $\Lambda \in \mathfrak{X}^*$ و $\gamma \in \mathbb{R}$یی وجود دارند به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $x \in A$ و هر $y \in B$؛

$$Re\Lambda x < \gamma < Re\Lambda y.$$

(ب) اگر A فشرده، B بسته و $\mathfrak{X}$ موضعاً محدب باشد، آن‌گاه $\Lambda \in X^*$، $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ و $\gamma_2 \in \mathbb{R}$یی وجود دارند به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $x \in A$ و هر $y \in B$؛

$$Re\Lambda x < \gamma_1 < \gamma_2 < Re\Lambda y.$$

۲۲.۱.۱ نتیجه.

هرگاه $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب باشد، $\mathfrak{X}^*$ نقاط $\mathfrak{X}$ را جدا می‌کند.

۲۳.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم (X,d) و (Y,ρ) دو فضای متریک باشند. نگاشت $h: X \longrightarrow Y$ را طولپا نامیم هرگاه به‌ازای‌هر $x_1, x_2 \in X$؛

$$\rho(h(x_1), h(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

۲۴.۱.۱ قضیه.

فرض کنیم (X,d) و (Y,ρ) دو فضای متریک باشند. اگر نگاشت $h: X \longrightarrow Y$ طولپا باشد، آن‌گاه h نگاشتی پیوسته و یک‌به‌یک است.

۲۵.۱.۱ قضیه.

فرض کنیم $(\mathfrak{X}, ||.||)$ و $(\mathcal{Y}, |||.|||)$ دو فضای نرمدار بوده، d متریک حاصل از $||.||$ بر $\mathfrak{X}$ و ρ متریک حاصل از $|||.|||$ بر $\mathcal{Y}$ باشند. به‌علاوه فرض کنیم $h: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ نگاشتی خطی باشد. دراین‌صورت h یک نگاشت طولپا از فضای متریک $(\mathfrak{X}, d)$ به فضای متریک $(\mathcal{Y}, \rho)$ است اگروتنهااگر به‌ازای‌هر $x \in \mathfrak{X}$؛

$$|||h(x)||| = ||x||.$$

برهان. باتوجه‌به تعریف متریک حاصل از نرم و خطی بودن h به‌راحتی اثبات می‌شود.□

۲۶.۱.۱ قضیه.

فرض کنیم (X,d) و (Y,ρ) دو فضای متریک باشند. اگر h یک نگاشت طولپای خطی از X بروی Y باشد، آن‌گاه h^{-1} نیز یک نگاشت طولپای خطی از Y بروی X است.

برهان. چون h طولپا است، بنابراین یک‌به‌یک است. پس کافی است ثابت کنیم h^{-1} نگاشتی طولپا است. فرض کنیم $y_1, y_2 \in Y$. پس $x_1, x_2 \in X$ وجود دارند به‌طوری‌که $x_1 = h^{-1}(y_1)$ و $x_2 = h^{-1}(y_2)$. بنابراین طولپا بودن h ایجاب می‌کند

$$d(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)) = d(x_1, x_2) = \rho(h(x_1), h(x_2)) = \rho(y_1, y_2),$$

بنابراین h^{-1} نگاشتی طولپا است.$\square$

۲.۱ جبرهای باناخ

دراین قسمت، با معرفی جبرهای باناخ به بیان مقدماتی درباره‌ی این جبرها و همریختی‌های مختلط می‌پردازیم.

۱.۲.۱ تعریف.

فرض کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان و A یک مجموعه‌ی ناتهی باشد به‌طوری‌که روی آن دو عمل جمع و ضرب و یک ضرب اسکالر (تابعی از $F \times A$ به‌توی A) تعریف شده‌باشند به‌طوری‌که

(الف) A با جمع و ضرب اسکالر یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد؛

(ب) عمل ضرب نسبت به عمل جمع توزیع‌پذیر باشد؛

(ج) به‌ازای‌هر $\alpha \in \mathbb{K}$ و $a, b \in A$، $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$؛

(د) عمل ضرب شرکت‌پذیر باشد،

در این‌صورت A را یک جبر بر میدان $\mathbb{K}$ گوییم.

جبر A را تعویض‌پذیر گوییم هرگاه تحت عمل ضرب عناصر A جابه‌جا شوند.

جبر A را واحددار گوییم هرگاه عضوی از A مانند e وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $a \in A$؛ $ea = ae = a$. e را واحد جبر A می‌نامیم.

یک زیرمجموعه از جبر A را زیرجبر A نامیم هرگاه تحت همان اعمال جمع و ضرب روی A خود یک جبر باشد.

هرگاه جبر مورد نظر بر میدان اعداد مختلط (حقیقی) تعریف شود، آن را یک جبر مختلط (حقیقی) می‌نامیم.

۲.۲.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک جبر بر میدان $\mathbb{K}$ باشد و $||.|| : A \longrightarrow R$ یک نرم بر فضای برداری A روی میدان $\mathbb{K}$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $a, b \in A$؛

$$||ab|| \leq ||a|| \ . \ ||b||$$

دراین‌صورت $||.||$ را یک نرم جبری بر A و $(A, ||.||)$ را یک جبر نرمدار بر میدان $\mathbb{K}$ می‌نامیم.

۳.۲.۱ تعریف.

فرض کنیم $(A, ||.||)$ یک جبر نرمدار بر میدان $\mathbb{K}$ باشد. اگر $(A, ||.||)$ یک فضای باناخ باشد، آن‌گاه $(A, ||.||)$ را یک جبر باناخ بر میدان $\mathbb{K}$ می‌نامیم.

۴.۲.۱ مثال.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک فشرده‌ی هاسدورف بوده و $C(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع مختلط پیوسته بر X باشد. دراین‌صورت $C(X)$ تحت اعمال جمع و ضرب نقطه به نقطه و ضرب اسکالر یک جبر مختلط واحددار است که واحد آن تابع ثابت 1_X بر X می‌باشد. به هر $f \in C(X)$ نرم یکنواخت

$$||f||_X := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

را مربوط می‌کنیم. دراین‌صورت $(C(X), ||.||_X)$ یک جبر باناخ تعویض‌پذیر واحددار است.

۳.۱ تبدیلات گلفاند و فضای ایده‌آل ماکسیمال جبرهای باناخ تعویض‌پذیر

در این قسمت، با بیان تبدیلی به نام تبدیل گلفاند، فضای ایده‌آل ماکسیمال یک جبر باناخ را معرفی می‌کنیم.

۱.۳.۱ تعریف.

فرض کنیم A و B دو جبر باشند. نگاشت خطی $T : A \longrightarrow B$ را یک همریختی از A به B گوییم هرگاه به‌ازای‌هر $a, b \in A$؛ $T(ab) = T(a)T(b)$. همریختی یک‌به‌یک را یکریختی گوییم.

۲.۳.۱ تعریف.

فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای توپولوژیکی باشند. نگاشت $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ را یک همانریختی نامیم هرگاه f یک‌به‌یک، پوشا و پیوسته بوده و $f^{-1} : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ نیز پیوسته باشد.

۳.۳.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک جبر مختلط و φ یک تابعک خطی بر A باشد که متحد 0 نیست. هرگاه به‌ازای‌هر $a, b \in A$؛ $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$، آن‌گاه φ را یک همریختی مختلط بر A می‌نامیم.
مجموعه‌ی همه‌ی همریختی‌های مختلط A را به M_A نشان می‌دهیم.
هرگاه $\varphi \in M_A$، آن‌گاه مجموعه‌ی $\{x \in A \ : \ \varphi(x) = 0\}$ را هسته‌ی φ نامیده و به $\ker(\varphi)$ نشان می‌دهیم.

۴.۳.۱ قضیه.

فرض کنیم A یک جبر باناخ با واحد e بوده به‌طوری‌که $\|e\| = 1$ و φ یک همریختی مختلط بر A باشد. دراین‌صورت

(الف) $\varphi(e) = 1$.

(ب) اگر $x \in A$ یک عنصر وارون‌پذیر A باشد، آن‌گاه $\varphi(x) \neq 0$ و $\varphi(x^{-1}) \neq 0$ و $\varphi(x^{-1}) = \frac{1}{\varphi(x)}$.

(ج) φ پیوسته است و $\|\varphi\| = 1$.

۵.۳.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویض‌پذیر با واحد e باشد. زیرمجموعه‌ی I از A را یک ایده‌آل A نامیم هرگاه I یک زیرفضای برداری A بوده و به‌ازای‌هر $x \in A$ و هر $y \in I$؛ $xy \in I$.
واضح است که $\{0\}$ و A ایده‌آل‌های A هستند که آن‌ها را ایده‌آل‌های بدیهی A می‌نامیم. هرگاه I یک ایده‌آل A بوده و $I \neq A$، آن‌گاه I را یک ایده‌آل واقعی A نامیم.
ایده‌آل واقعی M از A را ایده‌آل ماکسیمال A نامیم هرگاه به‌ازای‌هر ایده‌آل I از A که $A \subseteq I \subseteq M$ داشته‌باشیم $I = M$ یا $I = A$.

۶.۳.۱ قضیه.

فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویض‌پذیر با واحد e باشد. دراین صورت

(الف) اگر $\varphi \in M_A$، آن‌گاه $\ker(\varphi)$ یک ایده‌آل ماکسیمال A است.

(ب) اگر $\varphi, \psi \in M_A$ و $\ker\varphi \subseteq \ker\psi$، آن‌گاه $\varphi = \psi$.

(ج) اگر M یک ایده‌آل کسیمال A باشد، آن‌گاه عنصر منحصربه‌فردی از M_A مانند φ وجود دارد به‌طوری‌که $M = \ker(\varphi)$.

(د) اگر $\mathcal{M}$ مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال A باشد، آن‌گاه تابع $F : M_A \longrightarrow \mathcal{M}$ با ضابطه‌ی $F(\varphi) = \ker(\varphi)$ یک نگاشت دوسویی است.

۷.۳.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویض‌پذیر با واحد e باشد. به‌ازای‌هر $a \in A$ تابع $\hat{a} : M_A \longrightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطه‌ی $\hat{a}(h) = h(a)$ تعریف می‌کنیم و آن را تبدیل گلفاند a می‌نامیم.

۸.۳.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک جبر باناخ مختلط تعویض‌پذیر و $\hat{A}$ مجموعه‌ی تمام تبدیلات گلفاند اعضای A باشد. توپولوژی ضعیف القاشده توسط $\hat{A}$ روی M_A را توپولوژی گلفاند می‌نامیم. در واقع توپولوژی گلفاند ضعیف‌ترین توپولوژی بر M_A است که هر $\hat{a} \in \hat{A}$ نسبت به آن پیوسته‌اند.

۹.۳.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک جبر باناخ مختلط تعویض‌پذیر باشد. دراین صورت M_A (مجموعه‌ی تمام همریختی‌های مختلط بر A) به‌انضمام توپولوژی گلفاند آن را فضای ایده‌آل ماکسیمال A می‌نامیم.

۱۰.۳.۱ قضیه.

فرض کنیم A یک جبر باناخ مختلط تعویض‌پذیر باشد. دراین‌صورت توپولوژی گلفاند بر M_A با توپولوژی زیرفضایی بر M_A بدست آمده از توپولوژی ضعیف ستاره بر A^* منطبق است.