بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

هم متناهی و متناهی بودن مدول های کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته

اساتید راهنما

دکتر رضا نقی پور

دکتر پرویز سهندی

استاد مشاور

دکتر حسن مهتدیفر

پژوهشگر

لیلا عبدی قزلقیه

۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادرم،

دو فرشته مهربان زندگیم، اسوه‌های صبر و بردباری که انیس دیروز و امید فردایم هستند و هر آنچه امروز دارم از وجود آن‌هاست.

همسر فداکارم،

تنها همسفر جاده پر پیچ و خم زندگی.

خواهران و برادرانم،

که بهترین های زندگیم هستند.

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

درود و سپاس یگانه جاوید را که آرام گیرد دلها با یاد او و آرامش پذیرد پریشان عالمی با نام او. سپاس و صدها سپاس به پاس بهترین نعمتی که به ما عطا فرمودی، نعمت خداوندیت.

حال که در پناه الطاف بیکران الهی، نگارش این پایان‌نامه به اتمام رسیده است، بر خود وظیفه می‌دانم قدردان کسانی باشم که راهگشای این تحقیق بوده‌اند و تحمل مشکلات را بر من آسان نمودند. امید است که سپاس و احترام بی‌دریغ اینجانب را پذیرا باشند.

در آغاز، از زحمات استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر **رضا نقی‌پور** که راهنمایی این پایان‌نامه را به عهده گرفتند و سوای علم در محضرشان درس اخلاق آموخته‌ام و از تدبیر خردمندانه و یاری بی‌دریغشان بهره‌مند بودم، کمال تشکر را دارم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید. پیش از همه برای ایشان آرزوی سلامتی، شادکامی، موفقیت و سربلندی دارم. همچنین از جناب آقای دکتر **پرویز سهندی** که زحمات مطالعه این پایان‌نامه را تقبل فرمودند وجناب آقای دکتر**حسن مهتدیفر** که از مشاوره‌ی ایشان در تمامی مراحل کار بهره گرفتم کمال امتنان را دارم. از سرکار خانم دکتر **منیره صدقی** که علی‌رغم مشغله‌ی کاری که داشتند، زحمت داوری این پایان‌نامه را عهده‌دار شدند تشکر و قدردانی می‌نمایم و امیدوارم همواره افتخار شاگردی این اساتید بزرگوار را داشته باشم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر فداکارم، خواهران و برادران عزیزم و خاله‌ی مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند. همچنین برای کلیه کسانی‌که در راه ارتقاء سطح علمی کشور و پیشبرد اهداف میهن عزیزمان تلاش و کوشش می‌نمایند آرزوی موفقیت و سلامتی دارم.

لیلا عبدی

۱۳۹۰

ای خدای بزرگ

آنقدر به ما عظمت روح و تقوا عطا کن که همه وجود خود را با عشق و رغبت قربانی حق کنیم.
خدایا ما را از گرداب خودخواهی و از گردباد هوا و هوس نجات ده و به ما قدرت ایثار عطا کن.
خدایا آنچنان تار و پود وجود ما را به عشق خود عجین کن که در وجودت محو شویم.
خدایا در این لحظات سخت امتحان نور ایمان را به قلب ما بتابان و ما را از لغزش نگاه دار.
خدایا ما را قدرت ده که طاغوت خودپرستی را به زیر افکنیم و حق و حقیقت را فدای منفعت های شخصی نکنیم.

(شهید دکتر مصطفی چمران)

نام خانوادگی: عبدی قزلقیه نام: لیلا

عنوان پایان‌نامه: هم‌متناهی و متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته

اساتید راهنما: دکتر رضا نقی‌پور و دکتر پرویز سهندی
استاد مشاور: دکتر حسن مهتدیفر

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش:جبر

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحه: ۱۰۰

کلیدواژه‌ها: کوهمولوژی موضعی، کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته، مدول با تولید متناهی، مدول آرتینی، رشته دقیق، مدول با طول متناهی، مدول هم‌متناهی.

چکیده:
فرض می‌کنیم R یک حلقه موضعی (نوتری) و جابجایی، I یک ایده‌آلی از R و M، N دو $R-$ مدول با تولید متناهی باشند. پس از بررسی خواص اساسی مدول‌های $\mathrm{H}^i_I(M,N)$ نشان می‌دهیم که

$$\mathbf{f-depth}(I+\mathrm{Ann}_R(M),N)=\mathbf{inf}\{i\in\mathbb{N}_0 \mid \text{آرتینی نیست } \mathrm{H}^i_I(M,N)\}.$$

سپس فرض می‌کنیم t یک عدد صحیح مثبت باشد. نشان می‌دهیم:
(۱) اگر برای هر $i<t$، $R-$ مدول $\mathrm{H}^i_I(M,N)$، مینیماکس باشد، در این‌صورت برای هر $i<t$، $\mathrm{H}^i_I(M,N)$ $I-$ هم‌متناهی است.
(۲) اگر $\mathbf{pd}(M)=d<\infty$ و $\mathbf{dim}N=n<\infty$، در این‌صورت $\mathrm{H}^{d+n}_I(M,N)$، $I-$ هم‌متناهی و آرتینی است.
همچنین با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم که هرگاه M یک $R-$ مدول دوری و غیرصفر، N یک $R-$ مدول با تولید متناهی و t یک عدد طبیعی باشد به‌قسمی‌که برای هر $i<t$، $R-$ مدول‌های $\mathrm{H}^i_I(N)$ و $R-$ مدول $\mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{H}^t_I(N))$، با تولید متناهی است، در این‌صورت $R-$ مدول $\mathrm{H}^t_I(N)$، لزوماً با تولید متناهی نیست. بعلاوه، به عنوان هدفی دیگر، تعمیمی از قضیه برادمن-لشگری ارائه می‌دهیم. در انتها، با ارائه قضیه زیر به نتایجی مفید می‌رسیم.
قضیه: فرض کنیم I ایده‌آلی از R و M,N دو $R-$ مدول با تولید متناهی و غیرصفر باشند. اگر t یک عدد طبیعی باشد، به‌قسمی‌که برای هر $i<t$، داشته باشیم:

$$\mathrm{Supp}_R(\mathrm{H}^i_I(M,N))\subseteq\mathbf{Max}(R),$$

آنگاه برای هر $i<t$، $R-$ مدول $\mathrm{H}^i_I(M,N)$ آرتینی است.

فهرست مطالب

مقدمه و پیشینه پژوهش

الکساندر گروتندیک

یورگن هرزوگ

الکساندر گروتندیک [۱] در سال ۱۹۶۰، در پاسخ به حدسی از پیر ساموئل پیرامون $U.F.D$ ها و همچنین برای اثبات قضایایی از نوع لفشتز در هندسه جبری، کوهمولوژی موضعی را ابداع نمود. امروزه، ارتباط وسیع با توپولوژی، هندسه، ترکیبات و دیگر شاخه‌های ریاضیات، کوهمولوژی موضعی را به‌صورت یک زمینه تحقیقاتی فعال درآورده است. در سال ۱۹۶۹، گروتندیک حدس زیر را مطرح کرد:

اگر I ایده‌آلی از حلقه R و M یک $\mathrm{R}-$ مدول با تولید متناهی باشد، آنگاه برای هر $\mathrm{i} \geqslant 0$، $R-$ مدول $\mathrm{Hom_R(R/I, H^i_I(M))}$ با تولید متناهی است.

اما بعداً هارتشورن [۲] در [۱۸]، موفق به ارائه‌ی مثال نقضی به‌صورت زیر برای حدس فوق شدند.

فرض کنیم K، یک میدان و $R = K[x,y,z,u]/(xy-zu)$. در این‌صورت با فرض $I = (x,y)R$، $R-$ مدول $\mathrm{Hom}_R(R/I, \mathrm{H}^i_I(M))$، با تولید متناهی نیست.

[۱] Alexander Grothendieck
[۲] Hartshorne

او در همین مقاله، یک $R-$ مدول مانند L را $I-$ هم‌متناهی نامید، درصورتی‌که اولاً: $\mathrm{Supp}_R(L) \subseteq \mathrm{V}(I)$ و ثانیاً: برای هر $j \geqslant 0$، $R-$ مدول $\mathrm{Ext}^i_R(R/I, L)$ با تولید متناهی باشد که در آن $\mathrm{V}(I)$ عبارتست از مجموعه همه ایده‌آل‌های اولی از R که شامل I هستند.

یکی از شیوه‌های معمول پژوهش، تعمیم مسأله از یک حالت به حالت کلی‌تر است. در سال ۱۹۷۰، یورگن هرزوگ [3] با ارائه‌ی مقاله [۱۹]، کوهمولوژی موضعی را برای دو مدول تعمیم داد و پایان‌نامه حاضر بیان تفصیلی مقاله‌های [۲]، [۱۱]، [۱۲] و تعمیم برخی نتایج این مقالات در حالتی که R را غیرموضعی فرض کردیم می‌باشد. یکی از اهداف این پایان‌نامه بررسی مسأله زیر است:

مسأله: فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه نوتری R و M، N دو $R-$ مدول با تولید متناهی باشند. در این‌صورت چه زمانی $R-$ مدول $\mathrm{Hom}_R(R/I, \mathrm{H}^i_I(M,N))$، با تولید متناهی است.

اسداللهی، خشیارمنش و سالاریان در [۲]، پاسخ مثبتی به مسأله فوق به‌صورت زیر ارائه کرده‌اند:

فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه نوتری R، $t \in \mathbb{N}$ و M، N دو $R-$ مدول با تولید متناهی باشند. اگر برای هر $i < t$، $R-$ مدول $\mathrm{H}^i_I(M,N)$، با تولید متناهی باشد، آنگاه $R-$ مدول $\mathrm{Hom}_R(R/I, \mathrm{H}^t_I(M,N))$، با تولید متناهی است.

مسائل زیادی در نظریه مدول‌های کوهمولوژی موضعی وجود دارند که یکی از مهمترین این مسائل بررسی هم‌متناهی بودن آنهاست. به عنوان یک هدف اصلی دیگر در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم که اگر R یک حلقه نوتری (نه لزوماً موضعی)، $t \in \mathbb{N}$ و برای هر $i < t$، $R-$ مدول $\mathrm{H}^i_I(M,N)$ مینیماکس باشد، آنگاه برای هر $i < t$، $R-$ مدول $\mathrm{H}^i_I(M,N)$، $I-$ هم‌متناهی است و $\mathrm{Hom}_R(R/I, \mathrm{H}^t_I(M,N))$، با تولید متناهی است. این قضیه تعمیمی از قضیه ۵.۲ از مرجع [۲] است که اثبات را با روش ارائه شده توسط بهمن‌پور و نقی‌پور در برهان قضیه ۳.۲ از [۵] اثبات کرده‌ایم. لازم به‌ذکر است که بعد از بیان قضیه ملاحظه گردید که قضیه فوق به عنوان ارائه پاسخ مثبتی برای مسأله فوق توسط برنا، سهندی و یاسمی نیز در [۷]، به همین روش

[3] Jürgen Herzog

اثبات شده است. بعلاوه، در این پایان‌نامه به عنوان تعمیمی از ۲.۲ در [۴] بدست می‌آوریم که اگر M، N دو $R-$ مدول با تولید متناهی و غیرصفر و t، یک عدد طبیعی باشد، به‌قسمی‌که برای هر $i < t$، داشته باشیم:

$$\mathbf{Supp}_R(\mathrm{H}_I^i(M,N)) \subseteq \mathbf{Max}(R),$$

آنگاه برای هر $i < t$، $R-$ مدول $\mathrm{H}_I^i(M,N)$ آرتینی است. همچنین با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم که هرگاه M یک $R-$ مدول دوری و غیرصفر، N یک $R-$ مدول با تولید متناهی و t یک عدد طبیعی باشد به‌قسمی‌که برای هر $i < t$، $R-$ مدول‌های $\mathrm{H}_I^i(N)$ و $R-$ مدول $\mathbf{Hom}_R(M,\mathrm{H}_I^t(N))$، با تولید متناهی است، در این‌صورت $R-$ مدول $\mathrm{H}_I^t(N)$، لزوماً با تولید متناهی نیست. به عنوان آخرین هدف، در این پایان‌نامه ثابت خواهیم کرد که اگر $\mathbf{pd}(M) = d < \infty$ و $\mathbf{dim}(N) = n < \infty$، آنگاه، $\mathrm{H}_I^{d+n}(M,N)$ یک $R-$ مدول $I-$ هم‌متناهی است. این تعمیمی از قضیه زیر در [۱۳] است.

قضیه: فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ حلقه موضعی (نوتری) و I، یک ایده‌ال از R و M یک $R-$ مدول با تولید متناهی از بعد n باشد. در این صورت $\mathrm{H}_I^n(M)$، $I-$ هم متناهی است. در حقیقت برای هر $i \geqslant ۰$، $\mathbf{Ext}_R^i(R/I,\mathrm{H}_I^n(M))$، دارای طول متناهی است.

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

فصل نخست پایان‌نامه مروری بر منابع ذکر شده و بیان مفاهیم پایه و مورد نیاز در فصل‌های آتی می‌باشد. بیشتر مفاهیم و قضایای اولیه را بدون اثبات بیان می‌کنیم چرا که هدف یادآوری مفاهیمی است که بعداً به آنها نیاز خواهد شد. در سرتاسر این پایان‌نامه فرض می‌کنیم R یک حلقه جابجایی، نوتری و یکدار با عضو همانی غیرصفر باشد.

۱.۱ سیری در جبر جابجایی

تعریف ۱.۱.۱. حلقه R را موضعی گوییم، هرگاه R حلقه نوتری و تنها یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد. عبارت $(R, \mathfrak{m})$ نماد حلقه موضعی است، به این معناست که R حلقه نوتری و $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال یکتای آن است.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول [۱] R را با نماد $\mathrm{Spec}(R)$ نشان داده و به ازای هر ایده‌آل I از R مجموعه ایده‌آل‌های اول مینیمال I را با نماد $\mathrm{Min}(I)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)} \mathfrak{p}.$$

همچنین، مجموعه تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال R را با نماد $\mathrm{Max}(R)$ نشان می‌دهیم.

لم ۳.۱.۱. *فرض کنیم I ایده‌آلی از R باشد. در این‌صورت $n \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که*

$$(\sqrt{I})^n \subseteq I.$$

برهان. رجوع شود به [۳۰]، لم ۲۱.۸. □

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم I یک ایده‌آل از R باشد. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول R را که شامل ایده‌آل I هستند، واریته [۲] I نامیده و با نماد $\mathrm{V}(I)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$\mathrm{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

گزاره ۵.۱.۱. *فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) $M = 0$.

---
[۱] Prime Ideals
[۲] Variety

(۲) *به ازای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R، $M_{\mathfrak{p}} = 0$.*

(۳) *به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، $M_{\mathfrak{m}} = 0$.*

برهان. رجوع شود به [۳]، گزاره ۸.۳. $\square$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد. در این‌صورت مجموعه

$$(0 :_R M) = \{r \in R \mid rM = 0\}$$

را پوچساز [۳] M می‌نامیم و آن را با $\mathrm{Ann}_R(M)$ نمایش می‌دهیم. به وضوح $\mathrm{Ann}_R(M)$، یک ایده‌آل R می‌باشد.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد. M را باوفا [۴] گوییم هرگاه $\mathrm{Ann}_R(M) = 0$.

قضیه ۸.۱.۱. *فرض کنیم I ایده‌آلی از R و M یک $R-$ مدول با تولید متناهی باشد. در این‌صورت*

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/IM)} = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M) + I}.$$

برهان. رجوع شود به [۲۵]، صفحه ۱۳. $\square$

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد و $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. $\mathfrak{p}$ را یک ایده‌آل اول وابسته [۵] M گوییم، هرگاه عضو غیرصفری مانند m در M وجود داشته باشد به طوری‌که

$$\mathfrak{p} = (0 :_R m).$$

مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول وابسته M را با نماد $\mathrm{Ass}_R(M)$ ویا باختصار با نماد $\mathrm{Ass}(M)$ نشان می‌دهیم. اگر I یک ایده‌آل دلخواهی از R باشد، مجموعه $\mathrm{Ass}_R(R/I)$ را با علامت $\mathrm{ass}_R(I)$ نیز نشان می‌دهیم.

---
[۳] Annihilator
[۴] Faithful
[۵] Associated Prime Ideal

لم ۱۰.۱.۱. *فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد. در این‌صورت*

$$\mathrm{Ass}_R(M) \neq \varnothing \Leftrightarrow M \neq 0.$$

برهان. رجوع شود به [۳۰]، صفحه ۱۸۱. □

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. عنصر a از R را یک مقسوم علیه صفر روی M می‌نامیم، هرگاه وجود داشته باشد عضو ناصفری از M مانند x بطوری که $ax = 0$. مجموعه همه مقسوم علیه‌های صفر روی M را با نماد $\mathrm{Z}_R(M)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۲.۱.۱. *فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد. در این‌صورت*

$$\mathrm{Z}_R(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}.$$

برهان. رجوع شود به [۳۰]، نتیجه ۳۶.۹. □

قضیه ۱۳.۱.۱. *فرض کنیم*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

یک رشته دقیق کوتاه از $R-$ مدول‌ها و $R-$ همومورفیسم ها باشد. در این‌صورت

$$\mathrm{Ass}_R(M') \subseteq \mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M') \cup \mathrm{Ass}_R(M'').$$

برهان. رجوع شود به [۲۵]، قضیه ۳.۶. □

قضیه ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم M یک R -مدول و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R باشد. در این‌صورت*

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M) \Leftrightarrow \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}).$$

برهان. رجوع شود به [۲۵]، قضیه ۲.۶. □

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد. محمل یا تکیه‌گاه M [۶] را مجموعه

$$\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

تعریف می‌کنیم. این مجموعه را با نماد $\mathrm{Supp}_R(M)$ یا $\mathrm{Supp}(M)$ نشان می‌دهیم. به‌آسانی می‌توان دید که اگر

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

یک رشته دقیق از R -مدول‌ها و R -هومومورفیسم‌ها باشد، آنگاه

$$\mathrm{Supp}_R(M) = \mathrm{Supp}_R(L) \cup \mathrm{Supp}_R(N).$$

قضیه ۱۶.۱.۱. *فرض کنیم M یک $R-$ مدول با تولید متناهی و N یک $R-$ مدول دلخواه باشد. در این‌صورت*

$$\mathrm{Ass}_R(\mathrm{Hom}_R(M, N)) = \mathrm{Supp}_R(M) \cap \mathrm{Ass}_R(N).$$

برهان. رجوع شود به [۳۳]، صفحه ۲۹. □

لم ۱۷.۱.۱. *فرض کنیم M یک $R-$ مدول با تولید متناهی باشد. در این‌صورت*

$$\mathrm{Supp}_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \supseteq (0 :_R M)\} = \mathrm{V}(\mathrm{Ann}_R(M)).$$

برهان. رجوع شودبه [۳۰]، لم ۲۰.۹. □

[۶] Support

تبصره ۱.۱.۱۸. *فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد. در این‌صورت*

$$M \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Supp}_R(M) \neq \varnothing.$$

تبصره ۱.۱.۱۹. *فرض کنیم $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R باشد. در این‌صورت*

$$\mathrm{Supp}_R(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\} = \mathrm{V}(\mathfrak{p}).$$

لم ۱.۱.۲۰. *فرض کنیم M و N دو $R-$ مدول باتولید متناهی باشند. در این‌صورت*

$$\mathrm{Supp}_R(M \otimes_R N) = \mathrm{Supp}_R(M) \cap \mathrm{Supp}_R(N).$$

برهان. رجوع شود به [۳]، صفحه ۴۶. □

قضیه ۱.۱.۲۱. *فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد. در این‌صورت*

$$\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Supp}_R(M),$$

و اعضای می‌نیمال $\mathrm{Supp}_R(M)$ و $\mathrm{Ass}_R(M)$ یکسان هستند.

برهان. رجوع شود به [۳۰]، قضیه ۹.۳۹. □

لم ۱.۱.۲۲. *فرض کنیم M یک $R-$ مدول با تولید متناهی باشد. در این‌صورت*

$$M \text{ آرتینی است } \Leftrightarrow \mathrm{Ass}_R(M) = \mathrm{Supp}_R(M) \subseteq \mathrm{Max}(R).$$

برهان. رجوع شود به [۸]، صفحه ۲۷۴. □

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم M یک R -مدول باشد. در این‌صورت، زنجیر

$$0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_n = M$$

از زیر مدول‌های M را اشباع شده می‌نامند هرگاه، به ازای هر $0 \leqslant i \leqslant n$، $R-$ مدول M_i/M_{i-1}، ساده باشد. n راطول زنجیر اشباع شده فوق می‌نامند و ثابت می‌شود (قضیه ی جردن-هولدر) [۷] که همه زنجیرهای اشباع شده یک مدول دارای طول‌های یکسانند. این طول مشترک را طول [۸] مدول M نامیده و با نماد $\ell_R(M)$ و یا باختصار با نماد $\ell(M)$ نشان می‌دهیم. هرگاه M دارای چنین زنجیری باشد گوییم M با طول متناهی است و به‌صورت $\ell(M) \lneqq \infty$ نشان می‌دهیم. اگرM دارای چنین زنجیری نباشد گوییم M با طول متناهی نیست و می‌نویسیم $\ell_R(M) = \infty$.

قضیه ۲۴.۱.۱ (قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول). *فرض کنیم $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌های اولی از R باشند. همچنین فرض کنیم I یک ایده‌آل از R باشد به‌طوری‌که $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. در این‌صورت $1 \leq i \leq n$ موجود است به‌طوری‌که $I \subseteq \mathfrak{p}_i$.*

برهان. رجوع شود به [۳]، قضیه ۱۱.۱. □

قضیه ۲۵.۱.۱. *فرض کنیم M یک R -مدول باشد. در این‌صورت، M با طول متناهی است اگر وتنها اگر نوتری و آرتینی باشد.*

برهان. رجوع شود به [۳۰]، قضیه ۳۶.۷. □

قضیه ۲۶.۱.۱. *فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *M نوتری است.*

(۲) *هر زیر مدول M متناهی مولد است.*

[۷] Jordan-Holder
[۸] Length

برهان. رجوع شود به [۳۰]، قضیه ۱۳.۷. □

قضیه ۲۷.۱.۱. *فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد بطوریکه توسط حاصلضرب تعداد متناهی از ایده‌آل‌های ماکسیمال (نه لزوماً متمایز) صفر شود. در این‌صورت M نوتری است اگر و تنها اگر M آرتینی باشد.*

برهان. رجوع شود به [۸]، قضیه ۳۰.۷. □

قضیه ۲۸.۱.۱. *فرض کنیم M یک $R-$ مدول و I یک ایده‌آل از R باشد. اگر $0 :_M I$ آرتینی و*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0 :_M I^n).$$

در این‌صورت M نیز $R-$ مدول آرتینی است.

برهان. رجوع شود به [۲۷]، قضیه ۳.۱. □

قضیه ۲۹.۱.۱. *فرض کنیم M یک R -مدول با تولید متناهی و غیرصفر باشد. در این‌صورت، یک زنجیری به‌شکل*

$$0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_n = M$$

موجود است به‌طوری‌که به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$، که $\mathfrak{p}_i$ها ایده‌آل‌های اولی از R هستند.

برهان. رجوع شود به [۲۹]، تمرین ۴۰.۹. □

قضیه ۳۰.۱.۱ (قضیه گراسون [۹]). *فرض کنیم R یک حلقه نوتری، M یک $R-$ مدول با تولید متناهی و باوفا باشد. در این‌صورت به ازای هر $R-$ مدول N یک زنجیر مانند*

$$0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_k = N,$$

[۹] Gruson's theorem

از زیر مدول‌های N موجود است به‌طوری‌که به ازای هر $k \leq i \leq ۱$ ، $N_i/N_{i-۱}$ یک تصویر هomomorفیک جمع مستقیم تعداد متناهی از M است.

برهان. رجوع شود به [۳۳]، قضیه ۴.۱. □

قضیه ۳۱.۱.۱. *فرض کنیم R یک حلقه نوتری و M ، N دو $R-$ مدول با تولید متناهی باشند به‌طوری‌که $\mathrm{Supp}_R(N) \subseteq \mathrm{Supp}_R(M)$. در این‌صورت یک زنجیر مانند*

$$\circ = N_\circ \subseteq N_۱ \subseteq ... \subseteq N_k = N,$$

از زیر مدول‌های N موجود است به‌طوری‌که به ازای هر $k \leq i \leq ۱$ ، $N_i/N_{i-۱}$ تصویر همومورفیک جمع مستقیم تعداد متناهی از M است.

برهان. رجوع شود به [۲۱]، نتیجه ۵.۱. □

تعریف ۳۲.۱.۱. بعد کرول [۱۰] یا به اختصاربعد حلقه R را با علامت $\mathrm{dim}R$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{dim}R := \mathrm{Sup}\{n \in \mathbb{N}_\circ \mid \exists \ \mathfrak{p}_\circ \subsetneqq \mathfrak{p}_۱ \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_n, \ \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

اگر چنین عددی موجود نباشد، آن را ∞ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۳۳.۱.۱ (قضیه بعد). *فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد. در این‌صورت*

$$\mathrm{dim}R := \mathrm{Min}\{n \in \mathbb{N}_\circ \mid \sqrt{(x_۱, \ldots, x_n)} = \mathfrak{m} \text{ وجود دارند که } x_۱, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}\}.$$

برهان. رجوع شود به [۳۰]، قضیه ۱۸.۱۵. □

[۱۰] Krull Dimension

تعریف ۳۴.۱.۱. بعد کرول R- مدول M را با نماد $\dim_R M$ یا $\dim M$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\dim M := \mathrm{Sup}\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists\ \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Supp}_R(M)\}.$$

و اگر سوپریمم موجود نباشد، قرار می‌دهیم $\dim M = \infty$. همچنین اگر $M = 0$، بعد کرول آن را ۱- تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی با بعد d باشد. منظور از یک دستگاه پارامتری [11] برای R، مجموعه‌ای متشکل از d عضو R است که یک ایده‌آل $\mathfrak{m}-$ اولیه است. از قضیه ۳۳.۱.۱ نتیجه می‌شود که هر حلقه موضعی حداقل دارای یک دستگاه پارامتری است.

تعریف ۳۶.۱.۱. کاتگوری $\mathcal{C}$ از $R-$ مدول‌ها و $R-$ همومورفیسم‌ها را یک کاتگوری سر [12] می‌نامیم، هرگاه برای هر دنباله دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

مدول M در $\mathcal{C}$ است، اگر و تنها اگر L و N در $\mathcal{C}$ باشند.

تبصره ۳۷.۱.۱. *تمامی $R-$ مدول‌های نوتری و آرتینی عضو کاتگوری سر هستند.*

قضیه ۳۸.۱.۱. *فرض کنیم*

$$N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} L,$$

یک دنباله دقیق از $R-$ مدول‌ها و $R-$ همریختی‌ها باشد. هرگاه N و L مدول‌های نوتری (آرتینی) باشند، آنگاه M نیز نوتری (آرتینی) است.

[11] System of parameter
[12] Serre