دانشگاه اراک

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش آنالیز)

فشردگی و فشردگی ضعیف تبدیل گلفاند در جبرهای باناخ تعویض‌پذیر

پژوهشگر

ریحانه باقری

استاد راهنما

دکتر داود علیمحمدی

استاد مشاور

دکتر سیروس مرادی

تابستان ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا تبدیل گلفاند فشرده جبرهای باناخ تعویض‌پذیر را معرفی نموده و برخی از خواص آن را بیان می‌کنیم. سپس یک شرط کافی برای فشردگی تبدیل گلفاند جبرهای تابعی باناخ بدست می‌آوریم. هم‌چنین یک شرط لازم و کافی برای فشردگی تبدیل گلفاند یک جبر تابعی باناخ طبیعی ارائه می‌دهیم. در ادامه، نشان می‌دهیم که ضرب تانسوری تصویری دو جبر باناخ با تبدیل گلفاند فشرده، یک جبر باناخ با تبدیل گلفاند فشرده است. به علاوه، اگر ضرب تانسوری تصویری دو جبر باناخ یک جبر باناخ با تبدیل گلفاند فشرده باشد آن‌گاه هر یک از آن‌ها یک جبر باناخ با تبدیل گلفاند فشرده است. سپس نشان می‌دهیم که هر جبر تابعی باناخ با تبدیل گلفاند فشرده را می‌توان در یک جبر لیپشیتس بر یک فضای متریک فشرده نشاند. در انتها، تبدیل گلفاند ضعیفاً فشرده جبرهای باناخ تعویض‌پذیر را معرفی نموده و برخی از خواص آن را بیان می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که یک جبر باناخ تعویض‌پذیر میانگین‌پذیر با تبدیل گلفاند ضعیفاً فشرده است اگر و فقط اگر فضای ایده‌آل ماکسیمال آن جبر متناهی باشد.

واژه‌های کلیدی : تبدیل گلفاند، جبر باناخ تعویض‌پذیر، تبدیل گلفاند ضعیفاً فشرده، عملگر خطی فشرده، عملگر خطی ضعیفاً فشرده، همریختی فشرده، همریختی ضعیفاً فشرده.

پیش گفتار

در اوایل دهه‌ی ۱۹۵۰ پس از مطرح شدن نظریه‌ی گلفاند شاخه‌ی جدیدی از جبرهای باناخ تعویض‌پذیر به نام جبرهای تابعی به وجود آمد که بعدها به جبرهای یکنواخت معروف شد. در دهه‌ی ۱۹۷۰—۱۹۶۰ تئوری جبرهای تابعی باناخ که توسیعی از جبرهای یکنواخت است، مطرح شد. شربرت[1] در سال‌های ۱۹۶۳ و ۱۹۶۴ میلادی اولین بار جبرهای لیپشیتس را معرفی نموده و خواصی از آن‌ها را مورد بررسی قرار داد که از نتایج تحقیقات وی مقالات [21] و [22] بدست آمده است. پس از آن در سال ۱۹۷۶ ساوون[2][20] همریختی‌های فشرده و ضعیفاً فشرده بین جبرهای باناخ را مورد مطالعه قرار داد و نشان داد که اگر X یک فضای فشرده‌ی هاسدورف باشد آن‌گاه هر همریختی از $C^1([0,1])$ به $C(X)$ فشرده است. در سال ۱۹۹۴ کاموویتز[3] و شینبرگ[4][14] این نتیجه را توسیع دادند و نشان دادند که هر همریختی از $C^1([0,1])$ بتوی هر جبر یکنواخت فشرده است. سپس در سال ۲۰۰۲ بهروزی [2] شرایط کافی برای فشردگی همریختی‌های بین جبرهای تابعی باناخ معینی را بدست آورد. در سال ۲۰۰۳ بهروزی و ماهیار [3] همریختی فشرده بین جبرهای تابعی باناخ معینی را مورد بررسی قرار دادند و در سال ۲۰۰۴ [5] درونریختی‌های فشرده‌ی زیر جبرهای معینی از جبر قرصی را مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۰۹ بهروزی و ماهیار [4] فشردگی و ضعیفاً فشردگی تبدیل گلفاند جبرهای باناخ تعویض‌پذیر را بدست آوردند. در این پایان نامه به بررسی مقاله [4] پرداخته‌ایم و آن مقاله را تقریباً به طور کامل باز کرده‌ایم.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل است. در فصل اول تعاریف، قضایا و نتایج مقدماتی را بیان می‌کنیم که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند.

فصل دوم از چهار بخش تشکیل شده است. در بخش اول به معرفی تبدیل گلفاند فشرده

[1] Sherbert

[2] sawon

[3] Kamowitz

[4] Sheinberg

پرداخته و برخی از خواص این تبدیل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش دوم نشان می‌دهیم که ضرب تانسوری تصویری دو جبر باناخ با تبدیل گلفاند فشرده، یک جبر باناخ با تبدیل گلفاند فشرده است. به علاوه، اگر ضرب تانسوری تصویری دو جبر باناخ یک جبر باناخ با تبدیل گلفاند فشرده باشد آن‌گاه هر یک از آن‌ها یک جبر باناخ با تبدیل گلفاند فشرده است. در بخش سوم نشان می‌دهیم که همریختی‌های پیوسته بین جبرهای باناخ تعویض‌پذیر، فشردگی تبدیل گلفاند را حفظ می‌کنند. در بخش چهارم نشان می‌دهیم که اگر A یک جبر تابعی باناخ با تبدیل گلفاند فشرده بر فضای فشرده‌ی هاسدورف X باشد، آن‌گاه متریکی بر X مانند d_{A^*} سازگار با توپولوژی مفروض بر X وجود دارد به طوری که A زیر جبری از جبر لیپشیتس $Lip(X, d_{A^*})$ است.

فصل سوم مشتمل بر سه بخش است. در بخش اول علاوه بر معرفی تبدیل گلفاند ضعیفاً فشرده، به بیان برخی خواص این تبدیل می‌پردازیم. در بخش دوم نشان می‌دهیم که همریختی‌های پیوسته بین جبرهای باناخ تعویض‌پذیر، ضعیفاً فشردگی تبدیل گلفاند را حفظ می‌کنند. در بخش سوم به بیان برخی نتایج دیگر درباره‌ی جبرهای باناخ تعویض‌پذیر با تبدیل گلفاند ضعیفاً فشرده می‌پردازیم. بالاخص نشان می‌دهیم که یک جبر باناخ تعویض‌پذیر میانگین‌پذیر، با تبدیل گلفاند ضعیفاً فشرده است اگر و فقط اگر فضای ایده‌آل ماکسیمال آن جبر متناهی باشد.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این فصل که مشتمل بر نه بخش است به بیان مباحثی از فضاهای توپولوژیکی، فضاهای برداری توپولوژیکی، جبرهای باناخ، همریختی‌های مختلط و خواص اساسی طیف‌ها،تبدیل گلفاند و فضای ایده‌ال ماکسیمال جبرهای باناخ تعویض‌پذیر، جبرهای تابعی باناخ، جبرهای لیپشیتس، ضرب‌های تانسوری و میانگین‌پذیری جبرهای باناخ می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند.

۱.۱ فضاهای توپولوژیکی

در این بخش به بیان برخی تعاریف و قضایا درباره‌ی فضاهای توپولوژیکی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد نیاز است.

تعریف ۱.۱.۱ . یک مجموعه‌ی جهت‌دار مانند J مجموعه‌ای است با یک ترتیب جزئی مانند $\leq$، به طوری که به ازای هر زوج α و β از اعضای J، عضوی از J مانند γ موجود باشد با این خاصیت که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

تعریف ۲.۱.۱ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. یک تور در X تابعی است مانند f از مجموعه‌ی جهت‌داری مانند J به توی X. اگر $\alpha \in J$، معمولاً $f(\alpha)$ را با x_α نمایش

می‌دهیم. خود تور f را با نماد $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$، و یا اگر مجموعه‌ی اندیس از سیاق مطلب فهمیده شود، به اختصار با $\{x_\alpha\}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۱.۱ $[16, Exercise\ 8.3.7]$. فرض کنیم $f : X \to Y$، در این صورت f پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر تور همگرا مانند $\{x_\alpha\}$ در X که به $x \in X$ همگرا است، تور $\{f(x_\alpha)\}$ به $f(x)$ همگرا باشد.

تعریف ۴.۱.۱ . فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیکی باشند. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را یک همانریختی می‌نامیم هرگاه f دوسویی بوده و f و f^{-1} هردو پیوسته باشند.

قضیه ۵.۱.۱ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی فشرده بوده و Y یک فضای توپولوژیکی هاسدورف باشد. اگر $F : X \longrightarrow Y$ نگاشتی یک به یک، پوشا و پیوسته باشد آن‌گاه $F^{-1} : Y \longrightarrow X$ نگاشتی پیوسته است، یعنی F همانریختی است.

برهان . فرض کنیم $C \subseteq X$ یک مجموعه‌ی بسته باشد. بنابراین C در X فشرده است. از این که F پیوسته است نتیجه می‌شود که $F(C)$ در Y فشرده است و چون Y یک فضای توپولوژیکی هاسدورف است نتیجه می‌شود $F(C)$ در Y بسته است و چون $F(C) = (F^{-1})^{-1}(C)$. بنابراین $(F^{-1})^{-1}(C)$ در Y بسته است. لذا $F^{-1} : Y \longrightarrow X$ یک نگاشت پیوسته است. □

تعریف ۶.۱.۱ . فضای توپولوژیکی X را یک فضای مترپذیر می‌نامیم هرگاه متریکی مانند d بر X وجود داشته باشد، به طوری که توپولوژی القایی توسط متریک d با توپولوژی مفروض بر X یکی باشد.

قضیه ۷.۱.۱ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی مترپذیر و Y یک فضای توپولوژیکی باشد. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت احکام زیر معادلند:

(الف) f یک نگاشت پیوسته است.

(ب) برای هر $x \in X$، اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط X باشد به طوری که $\lim_{n\to\infty} x_n = x$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

تعریف ۸.۱.۱ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی فشرده‌ی هاسدورف باشد. در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی توابع مختلط پیوسته بر X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱ . زیرمجموعه‌ی $\mathcal{F}$ از توابع مختلط پیوسته بر X را نقطه به نقطه کراندار گوییم در صورتی که به ازای هر $x \in X$، مجموعه‌ی $\mathcal{F}_x = \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ زیرمجموعه‌ی کرانداری از $\mathbb{C}$ باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ .فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی فشرده باشد و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع مختلط پیوسته بر X باشد. گوییم $\mathcal{F}$ بر X همپیوسته است هرگاه به ازای هر $x \in X$ و $\varepsilon > 0$ یک همسایگی از x مانند V_x یافت شوند به طوری که به ازای هر $f \in \mathcal{F}$ و هر $y \in V_x$ ؛ $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

قضیه ۱۱.۱.۱ (قضیه‌ی آرزلا)[$16, Exercise\ 3.7.5$]. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی فشرده بوده و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ گردایه‌ای از توابع مختلط پیوسته بر X باشد. اگر گردایه‌ی $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ نقطه به نقطه کراندار و همپیوسته باشد آن‌گاه دنباله‌ی $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای دارد که همگرای یکنواخت است.

تعریف ۱۲.۱.۱ . گوییم خانواده‌ی $\mathcal{F}$ از توابع بر مجموعه‌ی ناتهی X، نقاط X را جدا می‌کند هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، عضوی از $\mathcal{F}$ مانند f موجود باشد به طوری که،

$$f(x) \neq f(y).$$

تعریف ۱۳.۱.۱ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد. یک جداسازی برای X عبارت است از زوج U و V از زیرمجموعه‌های باز ناتهی جدا از هم X که اجتماعشان مساوی X است.

با توجه به تعاریف فوق، به آسانی دیده می‌شود که فضای توپولوژیکی X همبند است اگر و فقط اگر هیچ جداسازی برای X وجود نداشته باشد.

لم ۱۴.۱.۱ . اگر مجموعه‌های C و D تشکیل یک جداسازی برای X را بدهند و Y زیرمجموعه‌ی همبندی از X باشد آن‌گاه Y تماماً یا در C و یا در D واقع است.

برهان. چون C و D هر دو در X بازند، مجموعه‌های $C \cap Y$ و $D \cap Y$ در Y بازند. این دو مجموعه جدا از هم هستند و اجتماع آن‌ها Y است. حال اگر هردو ناتهی باشند، تشکیل یک جداسازی برای Y می‌دهند. پس یکی از آن‌ها تهی است. بنابراین Y باید تماماً در C و یا در D قرار گیرد. □

تعریف ۱۵.۱.۱ . در فضای مفروض X، رابطه‌ی هم ارزی $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم که $x \sim y$ هرگاه زیرمجموعه‌ی همبندی وجود داشته باشد که شامل هردوی x و y باشد.
رده‌های هم ارزی حاصل از آن را مؤلفه‌های X می‌نامیم.
در واقع، بزرگترین مجموعه‌ی همبند را مؤلفه گوییم.

تعریف ۱۶.۱.۱ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد. گوییم X یک فضای موضعاً فشرده است هرگاه هر $x \in X$ یک همسایگی در X مانند V داشته باشد به طوری که $\overline{V}$ فشرده باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی موضعاً فشرده‌ی هاسدورف باشد.

الف) فرض کنیم $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابع باشد. دراین صورت بستار $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ در X را محمل f نامیده و آن را به $Supp(f)$ نشان می‌دهیم.

ب)مجموعه‌ی همه‌ی توابع مختلط پیوسته بر X را که محمل فشرده دارند، با $C_c(X)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $0 \in C_c(X)$. (۰ تابع ثابت بامقدار صفربر X است.)

تعریف ۱۸.۱.۱ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد. گوییم تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ در بی‌نهایت به صفر می‌رود، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی X مانند K یافت شود به طوری که

$$|f(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in X \setminus K) .$$

تعریف ۱.۱.۱۹ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی موضعاً فشرده‌ی هاسدورف باشد. در این صورت مجموعه‌ی $\{f \in C(X)$: در بی‌نهایت به صفر می‌رود $f\}$ را با $C_0(X)$ نشان می‌دهیم.

به آسانی دیده می‌شود که اگر X فشرده نباشد آن‌گاه $1_X \notin C_0(X)$.

تعریف ۱.۱.۲۰ . فرض کنیم که X یک فضای توپولوژیکی با توپولوژی τ باشد و $\emptyset \neq Y \subseteq X$. در این صورت $\tau_Y := \{U \cap Y \ : \ U \in \tau\}$ یک توپولوژی بر Y است که به آن توپولوژی زیرفضایی یا توپولوژی نسبی بر Y به دست آمده از توپولوژی τ بر X می‌نامیم.

قضیه ۱.۱.۲۱ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی موضعاً فشرده‌ی هاسدورف باشد. اگر $f \in C_0(X)$ آنگاه f بر X کراندار است.

۱.۲ فضاهای برداری توپولوژیکی

در این بخش ضمن معرفی فضاهای برداری توپولوژیکی و فضاهای باناخ، به بیان مقدماتی در زمینه‌ی دوگان یک فضای برداری توپولوژیکی، عملگر و عملگرهای فشرده و طیف یک عملگر می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱ . فرض کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان باشد. یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ مجموعه‌ای مانند $\mathfrak{X}$ است که عناصرش را بردار می‌نامیم و در آن دو عمل دوتایی به نام‌های جمع و ضرب اسکالر (تابعی از $\mathbb{F} \times \mathfrak{X}$ بتوی $\mathfrak{X}$) تعریف شده است به طوری که از خواص زیر برخوردار می‌باشد:

(الف) عمل جمع جابه جایی و شرکت پذیر است، یعنی برای هر $x, y, z \in \mathfrak{X}$ ،

$$x + y = y + x \ \ , \ \ x + (y + z) = (x + y) + z.$$

(ب) $\mathfrak{X}$ شامل بردار منحصر به فردی مانند 0(بردار صفر یا مبدا $\mathfrak{X}$) است به طوری که به ازای هر $x \in \mathfrak{X}$، $x + 0 = x$.

(ج) به ازای هر $x \in \mathfrak{X}$، بردار منحصر به فردی مانند $-x$ موجود است به طوری که

$$x + (-x) = 0.$$

(د) به ازای هر $x \in \mathfrak{X}$، $1x = x$.

(ه) به ازای هر $x \in \mathfrak{X}$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$، $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

(و) دو قانون توزیع پذیری

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{X}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F},$$

و

$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \qquad \forall x \in \mathfrak{X}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},$$

برقرارند.

تعریف ۲.۲.۱ . فضای برداری مختلط $\mathfrak{X}$ را یک فضای نرمدار می‌گوییم هرگاه به ازای هر عضو x از $\mathfrak{X}$، یک عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$ (نرم x) نظیر شود به طوری که

(الف) $(x, y \in \mathfrak{X}) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

(ب) $(x \in \mathfrak{X}, \alpha \in \mathbb{C}) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$،

(ج) $(x \in \mathfrak{X}) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

در این صورت $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ را یک فضای نرمدار(مختلط) می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱ . فرض کنیم $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ یک فضای نرمدار باشد. تابع $d : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $d(x,y) = \|x-y\|$ یک متر بر $\mathfrak{X}$ است که آن را متریک حاصل از نرم $\|\cdot\|$ بر $\mathfrak{X}$ می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱ . یک فضای باناخ عبارت است از یک فضای نرمدار که تحت متریک حاصل از نرمش تمام باشد، به عبارت دیگر هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۵.۲.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری مختلط و τ یک توپولوژی بر $\mathfrak{X}$ باشد به طوری که

(الف) به ازای هر $x \in \mathfrak{X}$، مجموعه‌ی تک عضوی $\{x\}$ بسته باشد،

(ب) اعمال جمع و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند.

در این صورت τ را یک توپولوژی برداری بر $\mathfrak{X}$ و $\mathfrak{X}$ را یک فضای برداری توپولوژیکی می‌نامیم. به عنوان مثال فضاهای نرمدار، فضاهای برداری توپولوژیکی هستند.

قضیه ۶.۲.۱ [$17, Theorem$ 12.1]. هر فضای برداری توپولوژیکی یک فضای هاسدورف است.

تعریف ۷.۲.۱ . نگاشت T از فضای برداری $\mathfrak{X}$ بتوی فضای برداری $\mathcal{Y}$ را یک تبدیل خطی (نگاشت خطی) گوییم، هرگاه

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \qquad (x, y \in \mathfrak{X}\ ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}).$$

مجموعه‌ی همه‌ی تبدیلات خطی از $\mathfrak{X}$ به $\mathcal{Y}$ را با $\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$ نشان می‌دهیم.

به علاوه، هر تبدیل خطی از فضای برداری $\mathfrak{X}$ بتوی میدان $\mathbb{F}$ را یک تابعک خطی می‌نامیم.

قضیه ۸.۲.۱ [$17, Theorem$ 41.1]. فرض کنیم N زیرفضای بسته‌ای از فضای برداری توپولوژیکی $\mathfrak{X}$ باشد. در این صورت نگاشت خارج قسمتی $\pi : \mathfrak{X} \to \frac{\mathfrak{X}}{N}$ خطی، پیوسته و باز است.

تعریف ۹.۲.۱ . فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) دو فضای متریک باشند. نگاشت $h : X \longrightarrow Y$ را طولپای (یکمتری) می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in X$، داشته باشیم

$$\rho(h(x_1), h(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

قضیه ۱۰.۲.۱ . فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ و $(Y, |||\cdot|||)$ دو فضای نرمدار باشند و d متریک حاصل از $\|\cdot\|$ بر X و ρ متریک حاصل از $|||\cdot|||$ بر Y باشند. هم‌چنین فرض کنیم

$T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت T یک نگاشت طولپای از فضای متریک (X, d) به فضای متریک (Y, ρ) است اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in X$،

$$|||T(x)||| = \|x\|.$$

برهان . با توجه به تعریف متریک حاصل از نرم و خطی بودن T به راحتی اثبات می‌شود. □

قضیه ۱۱.۲.۱ **(قضیه‌ی نگاشت باز برای فضاهای باناخ)**[17, $Theorem$ 12.2]. فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای باناخ بوده و $\Lambda : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ یک نگاشت خطی پیوسته و یک به یک از $\mathfrak{X}$ بروی $\mathcal{Y}$ باشد. در این صورت

(الف) $\Lambda^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathfrak{X}$ یک نگاشت خطی پیوسته است.

(ب) اعداد حقیقی و مثبت مانند a و b موجودند به طوری که برای هر $x \in \mathfrak{X}$ داریم

$$a\|x\| \leq \|\Lambda x\| \leq b\|x\|$$

تعریف ۱۲.۲.۱ . متریک d بر فضای برداری مختلط X را پایا می‌گوییم هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم

$$d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

تعریف ۱۳.۲.۱ . فضای برداری توپولوژیکی مختلط X را یک $F-$فضا می‌گوییم هرگاه توپولوژی τ آن به وسیله‌ی یک متر پایای تمام مانند d القا شده باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو مجموعه‌ی ناتهی بوده و $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ یک تابع باشد. در این صورت مجموعه‌ی $\{(x, f(x));\ x \in \mathfrak{X}\}$ را نمودار f یا گراف f نامیده و آن را با $\mathrm{Graph}(f)$ یا به اختصار با $G(f)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۵.۲.۱ **(قضیه‌ی گراف بسته)**[17, $Theorem$ 2.15]. فرض کنیم

(الف) $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو $F-$فضا باشند؛

(ب) $\Lambda : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ یک نگاشت خطی باشد؛

(ج) $G_\Lambda = \{(x, \Lambda x) \ : \ x \in \mathfrak{X}\}$ یک مجموعه‌ی بسته در $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ با توپولوژی حاصل‌ضربی باشد.

در این صورت Λ پیوسته است.

تبصره ۱.۲.۱۶ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو F−فضای مختلط بوده و $\Lambda : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت احکام زیر معادلند:

(الف) مجموعه‌ی $G_\Lambda = \{(x, \Lambda x) \ : \ x \in \mathfrak{X}\}$ یک مجموعه‌ی بسته در $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ با توپولوژی حاصل‌ضربی است.

(ب) اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از نقاط $\mathfrak{X}$ باشد به طوری که $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $\mathfrak{X}$ همگرا به $x \in \mathfrak{X}$ و $\{\Lambda x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $\mathcal{Y}$ همگرا به $y \in \mathcal{Y}$ باشند، آن‌گاه $y = \Lambda x$.

تعریف ۱.۲.۱۷ . زیر مجموعه‌ی E از فضای برداری توپولوژیکی $\mathfrak{X}$ را کراندار می‌گوییم هرگاه به ازای هر همسایگی V از 0 در X، عددی مانند $s > 0$ چنان نظیر باشد که به ازای هر $t > s$، $E \subseteq tV$.

مثال ۱.۲.۱۸ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. در این صورت $\{0\}$ یک مجموعه‌ی کراندار در $\mathfrak{X}$ است. زیرا $\{0\}$ زیر مجموعه‌ای از هر همسایگی صفر است.

تعریف ۱.۲.۱۹ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای برداری توپولوژیکی مختلط باشند. نگاشت خطی $\Lambda : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ را یک نگاشت خطی کراندار می‌نامیم هرگاه تصویر هر مجموعه‌ی کراندار در $\mathfrak{X}$، مجموعه‌ای کراندار در $\mathcal{Y}$ باشد. به عبارت دقیق‌تر، اگر $E \subseteq \mathfrak{X}$ یک مجموعه‌ی کراندار در $\mathfrak{X}$ باشد آن‌گاه $\Lambda(E)$ یک مجموعه‌ی کراندار در $\mathcal{Y}$ باشد.

قضیه ۱.۲.۲۰ [17, *Theorem* 32.1]. فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای برداری توپولوژیکی و $\Lambda : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$، یک نگاشت خطی باشند. اگر $\mathfrak{X}$ متر‌پذیر باشد، آن‌گاه احکام ذیل معادلند:

(الف) Λ پیوسته است.

(ب) Λ کراندار است.

قضیه ۲۱.۲.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار باشند، نگاشت خطی $T:\mathfrak{X}\longrightarrow\mathcal{Y}$ کراندار است اگر و فقط اگر عدد مثبت ثابتی مانند M موجود باشد به طوری که به ازای هر $x\in\mathfrak{X}$؛

$$\|T(x)\|\leq M\|x\|.$$

تعریف ۲۲.۲.۱ . فرض کنیم$\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار باشند. مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای خطی و کراندار از $\mathfrak{X}$ به $\mathcal{Y}$ را با $\mathcal{BL}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ نشان می‌دهیم. اگر $\mathfrak{X}=\mathcal{Y}$، آن‌گاه $\mathcal{BL}(\mathfrak{X},\mathfrak{X})$ را به اختصار با $\mathcal{BL}(\mathfrak{X})$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۳.۲.۱ [17, *Theorem* 4.1]. فرض کنیم $(\mathfrak{X},\|\cdot\|)$ و $(\mathcal{Y},|||\cdot|||)$ دو فضای نرمدار باشند.

(الف) به هر $\Lambda\in\mathcal{BL}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ عدد $\|\Lambda\|=\sup\{|||\Lambda(x)|||\ :\ x\in\mathfrak{X},\|x\|\leq 1\}$ را مربوط می‌کنیم و آن را نرم عملگری Λ می‌نامیم. این تعریف فضای $\mathcal{BL}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ را به یک فضای نرمدار تبدیل می‌کند. اگر $\mathcal{Y}$ فضای باناخ باشد آن‌گاه $\mathcal{BL}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ نیز فضایی باناخ است.

(ب) اگر $\Lambda\in\mathcal{BL}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$، آن‌گاه $|||\Lambda x|||\leq\|\Lambda\|\|x\|$.

قضیه ۲۴.۲.۱ (قضیه‌ی اول یکریختی برای فضاهای باناخ)[15, *Theorem* 1.7]. اگر T یک عملگر خطی کراندار از یک فضای باناخ $\mathfrak{X}$ بروی یک فضای باناخ $\mathcal{Y}$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{Y}$ و $\frac{\mathfrak{X}}{ker(T)}$ به عنوان فضاهای باناخ یکریختند.

تعریف ۲۵.۲.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. مجموعه‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی پیوسته بر $\mathfrak{X}$ را فضای دوگان $\mathfrak{X}$ نامیده و آن را به $\mathfrak{X}^*$ نشان می‌دهیم. اگر $\mathfrak{X}$ یک فضای نرمدار باشد آن‌گاه $\mathfrak{X}^*=\mathcal{BL}(\mathfrak{X},\mathbb{C})$. هرگاه $\mathfrak{X}$ یک فضای نرمدار باشد، دوگان $\mathfrak{X}^*$ را دوگان دوم $\mathfrak{X}$ نامیده و آن را به $\mathfrak{X}^{**}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۶.۲.۱ . فرض کنیم $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد. در این صورت نگاشت $\pi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{**}$ با ضابطه‌ی $\pi(x)(\Lambda) = \Lambda x \ (\Lambda \in \mathfrak{X}^* \ , \ x \in \mathfrak{X})$، یک نگاشت خطی طولپای است. نگاشت $\pi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{**}$ را نشاننده‌ی متعارف $\mathfrak{X}$ در $\mathfrak{X}^{**}$ می‌نامیم.

تعریف ۲۷.۲.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی با توپولوژی برداری τ باشد به طوری که $\mathfrak{X}^*$، فضای دوگان $\mathfrak{X}$، نقاط $\mathfrak{X}$ را جدا کند. در این صورت توپولوژی تولید شده بوسیله‌ی $\mathfrak{X}^*$ بر $\mathfrak{X}$، یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی τ_w بر $\mathfrak{X}$ که هر $\Lambda \in \mathfrak{X}^*$ نسبت به τ_w پیوسته باشد، توپولوژی ضعیف بر $\mathfrak{X}$ می‌نامیم. اگر x_0 عنصری دلخواه از $\mathfrak{X}$ و $0 < \varepsilon$ و $\Lambda \in \mathfrak{X}^*$، آن‌گاه

$$U(x_0, \Lambda, \varepsilon) = \{x \in \mathfrak{X} : |\Lambda x - \Lambda x_0| < \varepsilon\}, \qquad (۱.۱)$$

یک همسایگی باز پایه‌ای $x_0 \in \mathfrak{X}$ نسبت به توپولوژی ضعیف است. در حقیقت دسته‌ی تمام مجموعه‌های $U(x_0, \Lambda, \varepsilon)$ وقتی که بر $x_0 \in \mathfrak{X}$، Λ در $\mathfrak{X}^*$ و ε در مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت تغییر می‌کنند، تشکیل یک زیرپایه برای توپولوژی ضعیف می‌دهند و تمام اشتراک‌های متناهی از مجموعه‌های به شکل (۱.۱)، تشکیل یک پایه برای توپولوژی ضعیف می‌دهند.

نماد گذاری . فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد و $E \subseteq X$. در این صورت بستار E در X با توپولوژی ضعیف را با نماد $\overline{E^w}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۸.۲.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی بوده و $\mathfrak{X}^*$ دوگان $\mathfrak{X}$ باشد، برای هر $x \in \mathfrak{X}$، نگاشت $f_x : \mathfrak{X}^* \to \mathbb{C}$ را به صورت $f_x(\Lambda) = \Lambda x$ که $\Lambda \in \mathfrak{X}^*$، تعریف می‌کنیم. در این صورت $\{f_x : x \in \mathfrak{X}\}$—توپولوژی بر $\mathfrak{X}^*$، یعنی کوچکترین توپولوژی بر $\mathfrak{X}^*$ که برای هر $x \in \mathfrak{X}$ نگاشت f_x نسبت به آن پیوسته باشد، توپولوژی ضعیف—ستاره بر $\mathfrak{X}^*$ می‌نامیم.
یک مجموعه‌ی زیر پایه‌ای باز برای توپولوژی ضعیف—ستاره $\mathfrak{X}^*$ به شکل زیر است:

$$U(\Lambda_0, x, \varepsilon) = \{\Lambda \in \mathfrak{X}^* : |f_x(\Lambda) - f_x(\Lambda_0)|\} = \{\Lambda \in \mathfrak{X}^* : |\Lambda x - \Lambda x_0| < \varepsilon\},$$

که در آن $x \in \mathfrak{X}$،$\Lambda_0 \in \mathfrak{X}^*$ و $\varepsilon > 0$.

همچنین یک مجموعه‌ی پایه‌ای باز برای توپولوژی ضعیف—ستاره $\mathfrak{X}^*$ به شکل زیر است

$$(\Lambda_0, x_1, ..., x_n, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = \{\Lambda \in \mathfrak{X}^* : |\Lambda(x_i) - \Lambda_0(x_i)| < \varepsilon_i, \ \ 1 \leq i \leq n\},$$

که در آن $\Lambda_0 \in \mathfrak{X}^*$، $x_1, ..., x_n \in \mathfrak{X}$ و $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ اعداد حقیقی مثبت هستند.

نماد گذاری . فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد و $E \subseteq X$. در این صورت بستار E در X با توپولوژی ضعیف—ستاره را بانماد $\overline{E^{w^*}}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۹.۲.۱ (قضیه‌ی توسیع هان باناخ)[17, *Theorem* 6.3]. فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی موضعاً محدب باشد. هم‌چنین فرض کنیم M یک زیرفضای برداری $\mathfrak{X}$ باشد و $f : M \to \mathbb{C}$ یک تابعک خطی پیوسته بر M باشد. در این صورت $\Lambda \in \mathfrak{X}^*$ی هست که به ازای هر $x \in M$ ؛ $\Lambda x = f(x)$.

قضیه ۳۰.۲.۱ [19, *Theorem* 12.3]. فرض کنیم E زیرمجموعه‌ی محدبی از فضای موضعاً محدب $\mathfrak{X}$ باشد. در این صورت بستار ضعیف $\overline{E^w}$ از E مساوی بستار اصلی آن، $\overline{E}$، می‌باشد.

قضیه ۳۱.۲.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ یک فضای برداری توپولوژیکی باشد به طوری که $\mathfrak{X}^*$ نقاط $\mathfrak{X}$ را جدا می‌کند.

(الف) اگر $x \in \mathfrak{X}$ و $\pi(x) : \mathfrak{X}^* \to \mathbb{C}$ به صورت $\pi(x)(\Lambda) = \Lambda x$ تعریف شود، آن‌گاه $\pi(x) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^*, \mathbb{C})$.

(ب) مجموعه‌ی $\pi(\mathfrak{X}) = \{\pi(x) : x \in \mathfrak{X}\}$ یک زیرفضای خطی $\mathcal{L}(\mathfrak{X}^*, \mathbb{C})$ است که نقاط $\mathfrak{X}^*$ را جدا می‌کند.

قضیه ۳۲.۲.۱ [17, *Theorem* 10.4]. فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار باشند. به هر $T \in \mathcal{BL}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$ یک $T^* \in \mathcal{BL}(\mathcal{Y}^*, \mathfrak{X}^*)$ منحصر به فرد نظیر است که در رابطه‌ی

$$< Tx, y^* >=< x, T^*y^* >$$

به ازای هر $x \in \mathfrak{X}$ وهر $y^* \in \mathcal{Y}^*$ صدق می‌کند. در واقع، $T^*y^* = y^*oT \ (y^* \in Y^*)$. به علاوه، T^* در $\|T\| = \|T^*\|$ صدق می‌نماید. T^* را الحاقی T می‌نامیم.

تعریف ۳۳.۲.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای باناخ باشند و $T \in \mathcal{BL}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$. اگر $T(\mathfrak{X})$ در $\mathcal{Y}$ با توپولوژی اصلی بسته باشد، گوییم T با برد بسته است.

تعریف ۳۴.۲.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای باناخ باشند و U گوی واحد باز در $\mathfrak{X}$ باشد $T \in \mathcal{BL}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$ را فشرده گوییم هرگاه بستار $T(U)$ در $\mathcal{Y}$ فشرده باشد. به عبارت دیگر T فشرده است اگر و فقط اگر بستار تصویر هر مجموعه‌ی کراندار در $\mathfrak{X}$ تحت T فشرده باشد.

قضیه ۳۵.۲.۱ $[5, Theorem\ 8.2.1]$. فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای باناخ باشند. $T \in \mathcal{BL}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$ فشرده است اگر وتنها اگر هر دنباله‌ی کراندار $\{x_n\}$ در $\mathfrak{X}$ شامل زیردنباله‌ای مانند $\{x_{n_k}\}$ باشد به طوری که $\{Tx_{n_k}\}$ به نقطه‌ای از $\mathcal{Y}$ همگرا باشد.

تعریف ۳۶.۲.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار باشند. مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای خطی و فشرده از $\mathfrak{X}$ به $\mathcal{Y}$ رابه $\mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$ نمایش می‌دهیم و در حالت خاص $\mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ را به $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۷.۲.۱ $[17, Theorem\ 18.4]$. فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و$\mathcal{Y}$ دو فضای باناخ باشند. در این صورت

(الف) اگر $T \in \mathcal{BL}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$ و $dim\mathcal{R}(T) < \infty$، آن‌گاه T فشرده است.

(ب) $\mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$ یک زیر فضای برداری بسته‌ی $\mathcal{BL}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$ است.

قضیه ۳۸.۲.۱ $[17, Theorem\ 19.4]$. فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای باناخ بوده و $T \in \mathcal{BL}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$. در این صورت T فشرده است اگر و تنها اگر T^* فشرده باشد.

تعریف ۳۹.۲.۱ . فرض کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای باناخ باشند و $T \in \mathcal{BL}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$. در این صورت T را ضعیفاً فشرده می‌نامیم هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی کراندار در $\mathfrak{X}$ مانند E بستار $T(E)$ در $\mathcal{Y}$ با توپولوژی ضعیف یک مجموعه‌ی فشرده در $\mathcal{Y}$ با توپولوژی ضعیف باشد.

مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای خطی ضعیفاً فشرده از $\mathfrak{X}$ به $\mathcal{Y}$ را با $\mathcal{K}_w(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$ نشان می‌دهیم.

۳.۱ جبرهای باناخ

در این بخش با معرفی جبرهای باناخ به بیان مفاهیم و قضایایی درباره‌ی این جبرها می‌پردازیم که در بخش‌های بعد مورد نیاز هستند.

تعریف ۱.۳.۱ . فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و یک عمل ضرب روی آن تعریف شده باشد به طوری که در خواص زیر صدق کند:

(الف) عمل ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر باشد، یعنی، برای هر $a, b, c \in A$ داشته باشیم

$$a(b+c) = ab + ac, \qquad\qquad (a+b)c = ac + bc.$$

(ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ و هر $a, b \in A$،

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b).$$

(ج) عمل ضرب شرکت‌پذیر باشد.

در این صورت A را یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم.

اگر $\mathbb{F}$ میدان اعداد مختلط باشد، A را جبر مختلط می‌نامیم.

تعریف ۲.۳.۱ . فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، در این صورت

(الف) جبر A را تعویض‌پذیر می گوییم، هر گاه عمل ضرب در A تعویض‌پذیر (جابه جایی) باشد، یعنی به ازای هر $a, b \in A$،

$$ab = ba.$$

(ب) جبر A را واحد دار می گوییم، هرگاه عضوی از A مانند 1 وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$،

$$a1 = 1a = a.$$

در این صورت عنصر $1 \in A$ را واحد جبر می‌نامیم.