بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

عنوان :

زیرگروه خودجابجاگر یک گروه

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش جبر

استاد راهنما :

دکتر محمدرضا رجب‌زاده مقدم

استاد مشاور :

دکتر احمد عرفانیان

نگارنده :

حسام صفا

شهریور ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

پیشگفتار

زیرگروه خودجابجاگر[۱]، ریشه در نظریه گروه‌های متناهی دارد و حالت خاص آن زیرگروه مشتق است. مفهوم زیرگروه خودجابجاگر به صورت اساسی در مقاله‌ای به وسیله هگارتی[۲] در سال ۱۹۹۴ مطرح شد.

فرض کنید $g \in G$ و $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ دلخواه باشند. خودجابجاگر g و α را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$[g, \alpha] = g^{-1}\alpha(g)$$

مرکز و زیرگروه مشتق گروه G را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$Z(G) = \{g \in G |\ [g, \alpha] = 1, \forall \alpha \in \mathrm{Inn}(G)\}$$

$$G' = \langle\ [g, \alpha] |\ g \in G, \alpha \in \mathrm{Inn}(G)\rangle$$

---

[۱] Autocommutator subgroup

[۲] P. V. Hegarty

حال با تعمیم تعاریف بالا، مرکز مطلق[۳] و زیرگروه خودجابجاگر گروه G را تعریف می‌کنیم،

$$L(G) = \{g \in G|\ [g,\alpha] = 1, \forall \alpha \in \mathrm{Aut}(G)\}$$
$$K(G) = \langle\ [g,\alpha]|\ g \in G, \alpha \in \mathrm{Aut}(G)\rangle$$

شور[۴] در سال ۱۹۰۴ ثابت کرد که برای گروه دلخواه G، اگر گروه خارج‌قسمتی $G/Z(G)$ متناهی باشد، آنگاه G' هم متناهی است. هگارتی این نتیجه را تعمیم داد و ثابت کرد، اگر $G/L(G)$ متناهی باشد، آنگاه $K(G)$ هم متناهی است.
در سال ۱۹۹۷ تعاریف و محاسباتی با جزئیات بیشتر درباره زیرگروه خودجابجاگر در مقاله دیگری از هگارتی به چاپ رسید.
دیکانسکو[۵] و والز[۶] در سال ۲۰۰۷ طی مقاله‌ای به بررسی ساختار گروه G در حالی که $K(G) \cong \mathbb{Z}$ و $K(G) \cong \mathbb{Z}_p$ است پرداختند.
در سال ۲۰۰۸، مفهوم زیرگروه خودجابجاگر در حیطه گروه‌های آبلی متناهی در مقاله‌ای تحت عنوان «گروه‌های آبلی به عنوان گروه‌های خودجابجاگر» مورد بررسی قرار گرفت (به [۵] مراجعه کنید).
این پایان‌نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول، پیش‌نیازها و مقدماتی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم. در فصل دوم نتیجه معروف شور را تعمیم داده و همچنین برای $|\mathrm{Aut}(G)|$ و $|K(G)|$ برحسب $|G/L(G)|$ کران تعیین می‌کنیم. در فصل سوم جواب‌های معادله $K(X) \cong \mathbb{Z}$ را می‌یابیم، به این معنی که تمام گروه‌هایی مانند X (با

[۳] Absolute centre
[۴] I. Schur
[۵] M. Deaconescu
[۶] G. L. Walls

تقریب یکریختی) را که زیرگروه خودجابجاگر آن‌ها با گروه دوری نامتناهی $\mathbb{Z}$ یکریخت هستند را پیدا می‌کنیم. در ادامه جواب‌های آبلی و متناهی معادله $K(X) \cong \mathbb{Z}_p$ (که p عددی اول است) را می‌یابیم.

در فصل چهارم ثابت می‌شود که هرگروه آبلی متناهی، زیرگروه خودجابجاگر گروهی آبلی و متناهی است.

فصل ۱

پیش‌نیازها

مقدمه

در این فصل تعاریف، گزاره‌ها، قضایا و نتایجی را که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز داریم، بیان خواهیم کرد. بیشتر مطالب از جبر پایه، دانسته فرض می‌شوند، بجز تعاریف و قضایای مهم و پرکاربرد. در ضمن برهان برخی از قضایا و نتایج که ساختاری، است و اثبات کوتاهی دارد را بیان می‌کنیم و بقیه را به منابع، ارجاع خواهیم داد.

۱.۱ مقدماتی از نظریه گروه‌ها

فرض کنیم G یک گروه و x و y عناصر دلخواهی از گروه G باشند. جابجاگر x و y را با نماد $[x,y]$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$$

به طور کلی به ازای هر x_1، x_2، ... و x_n از گروه G، یک جابجاگر از وزن n را به طور استقرایی، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[x_1,x_2,\ldots,x_n]=[[x_1,\ldots,x_{n-1}],x_n] \quad (n\geq 3)$$

گزاره ۱.۱.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. به ازای هر $x,y,z\in G$ اتحادهای زیر را داریم:

۱) $x^y=x[x,y]$

۲) $xy=yx[x,y]$

۳) $[x,y]^{-1}=[y,x]$

۴) $[x,y]^z=[x^z,y^z]$

۵) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$

۶) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$

۷) $[x, y, z^x][z, x, y^z][y, z, x^y] = 1$

۸) $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$ (اتحاد هال—ویت[1])

۹) $[x, y]^z = [x, y][x, y, z]$

۱۰) $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{-1})^{y^{-1}}$

۱۱) $[x^{-1}, y] = ([x, y]^{-1})^{x^{-1}}$

برهان. به [۱۹] مراجعه شود. □

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو زیرمجموعه (نه لزوماً زیرگروه) از گروه G باشند. در این صورت زیرگروه جابجاگر X و Y را با $[X, Y]$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[X, Y] = \langle\, [x, y] \mid x \in X, y \in Y \rangle$$

به علاوه هرگاه X_1، X_2، ... و X_n $(n \geq 2)$ زیرمجموعه‌های گروه G باشند، به استقرا روی n تعریف می‌کنیم:

$$[X_1, X_2, \ldots, X_n] = [[X_1, \ldots, X_{n-1}], X_n] \quad (n \geq 3)$$

[1] The Hall-Witt identity

زیرگروه $[G,G]$ از G را زیرگروه جابجاگر (یا مشتق) G می‌نامیم و با نماد G' نشان می‌دهیم و ثابت می‌شود G' زیرگروهی نرمال از G است وگروه خارج قسمتی G/G' گروهی آبلی است.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید G یک گروه و $\{G_i\}_{1\leq i\leq n}$ خانواده‌ای متناهی از زیرگروه‌های G باشد. G حاصلضرب مستقیم داخلی G_iها نامیده می‌شود هرگاه:

الف) $G_i \trianglelefteq G$ به ازای هر i، که $1 \leq i \leq n$،

ب) هر عضو $g \in G$ به طور منحصر به فردی به شکل $g = g_1g_2\dots g_n$ نوشته شود، که $g_i \in G_i$ ، $1 \leq i \leq n$.

گزاره ۴.۱.۱ اگر G یک گروه و H و K زیرگروه‌های نرمال آن باشند به طوری که $H \cap K = \langle 1 \rangle$، آن‌گاه به ازای تمام $h \in H$ و $k \in K$ داریم $hk = kh$.

برهان. به [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۵.۱.۱ اگر گروه G حاصلضرب مستقیم داخلی خانواده‌ی $\{G_i\}_{1\leq i\leq n}$ از زیرگروه‌هایش باشد، آنگاه

$$G \cong \prod_{i=1}^{n} G_i$$

برهان. به [۱] مراجعه شود. □

در فصل‌های بعدی ما نیاز به استفاده از برخی از نتایج و کاربردهای قضایای سیلو داریم، تعریف و قضایای اول، دوم و سوم سیلو دانسته فرض می‌شوند و فقط به بیان برخی نتایج آنها اکتفا می‌کنیم.

نتیجه ۶.۱.۱ فرض کنید G گروهی متناهی و H یک p—زیرگروه سیلوی G باشد. در این صورت H یک p—زیرگروه سیلوی یکتای G است، اگر و فقط اگر H زیرگروه نرمال G باشد.

برهان. به [۱] مراجعه شود. □

نتیجه ۷.۱.۱ اگر G یک گروه آبلی و متناهی باشد، آنگاه G با حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلویش، یکریخت است.

برهان. به [۲] مراجعه شود. □

لم ۸.۱.۱ فرض کنید G یک گروه متناهی و $H \trianglelefteq G$. اگر $|H|$ و $[G:H]$ نسبت به هم اول باشند، آنگاه H زیرگروه مشخصه[۲] G می‌باشد.

[۲] Characteristic subgroup

برهان. به [۱] مراجعه شود. □

نتیجه ۹.۱.۱ اگر گروه متناهی G دارای یک p—زیرگروه سیلوی یکتا باشد، آنگاه این p—زیرگروه سیلو، زیرگروه مشخصه G است.

برهان. با توجه به نتیجه ۶.۱.۱ و لم بالا، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. □

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. نمای[۳] گروه G کوچکترین عدد طبیعی k است به قسمی که برای هر عضو g از G داشته باشیم $g^k = ۱$. اگر چنین عددی موجود نباشد نمای G را بی‌نهایت تعریف می‌کنیم. نمای گروه G را با نماد $\exp(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ یک گروه آبلی از نمای p (p اول) را p—گروه آبلی مقدماتی[۴] گویند.

در ادامه به بیان قضایا و نتایجی کاربردی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

قضیه ۱۲.۱.۱ فرض کنید G یک گروه دلخواه و H زیرگروهی از G، مشمول در مرکز G باشد. اگر گروه خارج قسمتی G/H دوری باشد، آنگاه G آبلی است.

[۳] Exponent

[۴] Elementary abelian p-gruop

برهان. فرض کنید x و y دو عنصر دلخواه از G باشند. با توجه به این که G/H دوری است پس به ازای عضوی از G مانند g داریم

$$G/H \cong \langle gH \rangle$$

پس دو عنصر h_1 و h_2 از H و دو عدد صحیح مانند m و n موجودند به طوری که

$$x = g^n h_1 \ , \ y = g^m h_2$$

با توجه به این که $h_1, h_2 \in Z(G)$ خواهیم داشت

$$[x, y] = 1$$

و چون x و y دلخواه بودند، G آبلی است. □

قضیه ۱۳.۱.۱ فرض کنید G_1 و G_2 دو گروه دلخواه و $f : G_1 \longrightarrow G_2$ یک تکریختی[5] گروه‌ها باشد، در این صورت، به ازای هر عنصر x از G_1، مرتبه x با مرتبه $f(x)$ $(f(x) \in G_2)$ برابر است.

برهان. به فصل ششم [۱] مراجعه شود. □

[5] Monomorphism

قضیه ۱۴.۱.۱ (شور[۶]). فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه مرکزی (مشمول در مرکز) G باشد. اگر گروه خارج قسمتی G/H متناهی باشد، آنگاه G' نیز متناهی است.

برهان. به [۱۷] مراجعه شود. □

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از G با اندیس n باشد. همچنین فرض کنید $X = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ یک مجموعه تراگرد راست[۷] برای H در G باشد. (در طول تعریف X را ثابت در نظر می‌گیریم). $g \in G$ را در نظر بگیرید، سپس برای هر g_i، که $1 \leq i \leq n$، $h_i \in H$ و g_j که $1 \leq j \leq n$ وجود دارند به طوری که

$$g_i g = h_i g_j$$

نگاشت

$$\begin{cases} G \longrightarrow H/H' \\ g \longmapsto h_1 h_2 \ldots h_n H' \end{cases}$$

همریختی است که آن را همریختی انتقال[۸] می‌نامند. می‌توان نشان داد که همریختی انتقال، مستقل از انتخاب مجموعه X است. همریختی انتقال به ما این امکان را می‌دهد که قضیه زیر را ثابت کنیم.

[۶] Schur

[۷] Right transversal

[۸] Transfer homomorphism

قضیه ۱۶.۱.۱ فرض کنید G یک گروه دلخواه و H زیرگروهی از G با اندیس n باشد و همچنین فرض کنید $f : G \longrightarrow H/H'$ همریختی انتقال باشد.

الف) اگر z عنصری از مرکز گروه G باشد، آنگاه $f(z) = z^n H'$.

ب) اگر H زیرگروه مرکزی گروه G باشد و همچنین اگر $z \in G' \cap H$ ، آنگاه $z^n = ۱$.

برهان. به [۱۷] مراجعه شود. □

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنید G یک گروه و Ω مجموعه‌ای غیرتهی باشد. نگاشت $f : \Omega \times G \longrightarrow \Omega$ را یک عمل[۹] G روی Ω می‌نامیم هرگاه:

۱) $f(\omega, ۱) = \omega \ , \quad \forall \omega \in \Omega$

۲) $f(f(\omega, g), h) = f(\omega, gh) \ , \quad \forall \omega \in \Omega \ , \ \forall g, h \in G$

(در تعریف بالا به جای $f(\omega, g)$ مختصراً می‌نویسیم ω^g).

قضیه ۱۸.۱.۱ فرض کنید Ω مجموعه‌ای غیر تهی باشد و G یک گروه که روی Ω عمل می‌کند. در این صورت مجموعه $N = \{g \in G |\ \omega^g = \omega, \ \forall \omega \in \Omega\}$ زیرگروهی نرمال از G است و همچنین G/N با زیرگروهی از گروه متقارن مجموعه Ω (S_Ω) یکریخت است.

[۹] Action

برهان. به [۱] مراجعه شود. □

نتیجه ۱۹.۱.۱ (کیلی[۱۰]). هر گروه با زیرگروهی از گروه متقارن یکریخت است. به بیان دیگر به ازای هر گروه G مجموعه‌ای مانند Ω وجود دارد به طوری که G با زیرگروهی از S_Ω یکریخت است. به ویژه، هر گروه متناهی با زیرگروهی از S_n ، که $n = |G|$ ، یکریخت است.

برهان. با استفاده از قضیه ۱۸.۱.۱. □

تعریف ۲۰.۱.۱ یک زیرمجموعه از یک گروه را نرمال گوییم، هرگاه شامل تمام مزدوج‌های اعضایش باشد.

گزاره ۲۱.۱.۱ (لم دیکمن[۱۱]). در گروه دلخواه G یک زیرمجموعه نرمال متناهی، متشکل از اعضایی از مرتبه متناهی، یک زیرگروه نرمال متناهی از G تولید می‌کند.

برهان. به [۱۹] مراجعه کنید. □

[۱۰] Cayley

[۱۱] Dicman's lemma

تعریف ۲۲.۱.۱ به گروه G ، کامل[۱۲] گفته می‌شود، هرگاه مرکز G ، بدیهی و هر خودریختی G ، خودریختی داخلی باشد.

با توجه به تعریف بالا می‌توان نشان داد $S_۳$ کامل است (به بخش ۱۵.۳ مرجع [۲۳] مراجعه شود) ما از این موضوع در فصل‌های بعدی استفاده خواهیم کرد.

[۱۲] Complete

۲.۱ گروه‌های آزاد و آبلی آزاد

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X یک زیرمجموعه غیر تهی از گروه F باشد، در این صورت F را گروه آزاد[۱۳] روی مجموعه X می‌گوییم هرگاه هر $f \in F$ دارای نمایش منحصر به فرد $f = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ باشد که برای هر i، که $1 \leq i \leq n$، $x_i \in X$ و $x_{i+1} \neq x_i$ و $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. X را پایه آزاد گروه F گویند، اگر X مجموعه تهی باشد،آنگاه F گروه بدیهی است. اگر Y پایه آزاد دیگری برای F باشد، آنگاه $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$ و رتبه F را عدد اصلی[۱۴] مجموعه X تعریف می‌کنند.

قضیه ۲.۲.۱

الف) فرض کنید F یک گروه آزاد روی مجموعه X و G گروهی دلخواه باشد. همچنین فرض کنید $\varphi : X \longrightarrow G$ یک نگاشت دلخواه باشد. در این صورت همریختی منحصر به فرد $\overline{\varphi} : F \longrightarrow G$ وجود دارد به طوری که

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) \quad (\forall x \in X)$$

ب) برای هر مجموعه X، گروه آزاد با مجموعه مولد X وجود دارد، که تا حد یکریختی منحصر به فرد است.

[۱۳] Free group

[۱۴] Cardinal number