فهرست مندرجات

پیشگفتار

بیش از دو قرن است که محققین به بررسی نقاط پرت می‌پردازند. در مراحل اولیه، بیشترین توجهات به بررسی نقاط پرت در نمونه‌های نرمال ساده بود. اولین مباحث را برنولی[۱] (۱۷۷۷)، با این فرض که خطاها مستقل و از توزیع نرمال پیروی می کنند، ارائه داد. برنولی حذف نقاط پرت، بدون اطلاع قبلی را رد کرده است. پیرس[۲] (۱۸۵۲) اولین کسی بود که از روش های آماری در بررسی نقاط پرت بهره گرفت. وی معیار ویژه‌ای را برای رد نقاط پرت پیشنهاد داده است. رایت[۳] (۱۸۸۴) کار پیرس را ادامه داد و بهترین قاعده را برای رد کردن نقاط پرت معرفی نمود. رایت پیشنهاد کرد که وقتی باقیماندهٔ هر مشاهده از ۳/۳۷ برابر انحراف معیار بزرگتر باشد آن مشاهده به عنوان نقطه‌ی پرت در نظر گرفته شود.

داده‌های سری زمانی همانند انواع داده‌های آماری اغلب تحت تأثیر نقاط پرت قرار می‌گیرند. گاهی اوقات مشاهدات سری‌های زمانی تحت تأثیر پیشامدهایی نظیر: اعتصاب‌ها، جنگ‌ها، بحران‌های سیاسی یا اقتصادی ناگهانی، موج‌های سرما و گرمای غیر

[۱] Bernoulli
[۲] Pierce
[۳] Wright

منتظره و یا اشتباه ناشی از چاپ و ثبت کردن، قرار گرفته و به‌صورت مصنوعی در اختیار محقق قرار می‌گیرند. مشاهدات مصنوعی که پیشامدهای بازدارنده به وجود می‌آورند، با بقیه‌ی مشاهدات سری زمانی سازگاری ندارند، این قبیل مشاهدات را نقاط پرت در سری زمانی می‌نامند. اگر زمان و علت بازدارندگی معلوم باشد این اثرات را می‌توان با استفاده از الگوی مداخله‌ای مورد توجه قرار داد. با این وجود معمولاً در عمل زمان این پیشامدها، معلوم نیست. اهمیت بررسی نقاط پرت در داده‌های سری زمانی از آن‌جاست که نقاط پرت در شناخت مدل‌های سری‌های زمانی، برآورد و پیش‌بینی آن مؤثر می‌باشند. این موارد از اثر نقاط پرت بر برآورد توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی‌جزئی منتج می‌شوند و باعث اریبی در براورد پارامترهای سری می‌شوند.

هتا[۴] (۱۹۹۳)، تریوز[۵] (۱۹۹۳)، داتسچ و همکاران[۶] (۱۹۹۰)، چن و تیائو[۷] (۱۹۹۰) و ... به مطالعه‌ی اثر نقاط پرت در سری‌های زمانی یک متغیره از جنبه‌های گوناگون پرداخته‌اند. همانند دیگر مباحث سری‌های زمانی که بسیاری از متغیرها ممکن است در تأخیرهای مختلف بر هم تأثیرگذار باشند مسأله یافتن و نحوه‌ی حذف اثر نقاط پرت نیز ممکن است در سری‌های زمانی چند متغیره با حالت یک متغیره متفاوت باشد.

از بررسی نقاط پرت در سری‌های زمانی چند متغیره مدت زمان زیادی نمی‌گذرد. در حقیقت اولین بار تسی و همکاران[۸] (۲۰۰۰) به این موضوع اشاره و یک الگوریتم تکراری

[۴] Hotta
[۵] Trivez
[۶] Deutsch et al.
[۷] Chen and Tiao
[۸] Tsay et al.

بر اساس آماره‌ی نسبت درست‌نمایی پیشنهاد کردند. در ادامه گالیانو[۹] و سپس ونگ و شن[۱۰] (۲۰۰۶) به صورت‌های مختلفی به این مسأله پرداخته‌اند.

در این رساله به معرفی الگوریتم تسی و همکاران (۲۰۰۰) جهت شناسایی نقاط پرت در سری‌های زمانی چند متغیره پرداخته و سپس این الگوریتم جهت تشخیص نقاط پرت در داده‌های قیمت سکه‌ی طلا (ربع سکه، نیم سکه و تمام سکه) به کار برده می‌شود.

[۹] Galeano
[۱۰] Weng and Shen

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اساسی

یک سری زمانی، دنباله‌ای مرتب شده از مشاهدات است که بر حسب زمان مرتب شده‌اند. داده‌های سری زمانی دارای این ویژگی هستند که هیچ مشاهده‌ای از مشاهدات قبل از خود مستقل نیست (اندرسون[۱]، ۱۹۸۹، ص ۱۴۴).

در کشاورزی مقدار محصول و قیمت‌های سالانه غله، در اقتصاد قیمت سهام در روزهای متوالی، کل صادرات در ماه‌های متوالی، در علوم جوی مقدار باران در روزهای متوالی، یا درجه حرارت هوا در ساعات متوالی، و... مثال‌هایی از سری‌های زمانی هستند.

۱.۱ سری‌های زمانی چند متغیره

مجموعه‌ای از مشاهدات مربوط به چند متغیر، در یک دوره خاص زمانی یا در n فاصله زمانی که براساس زمان مشاهده مرتب شده‌اند را سری‌های زمانی چند متغیره[۲] می‌گویند. در چنین شرایطی هر عضو مجموعه یک سری زمانی محسوب می‌شود. به عنوان مثال

[۱] Anderson
[۲] multivariate time series

بررسی ارزش افزوده‌ی بخش‌های مختلف اقتصاد ایران از جمله خدمات، کشاورزی، نفت، صنایع و معادن، به صورت سالانه، هزینه تبلیغات و میزان فروش سالانه مربوط به شرکت‌ها، یا قیمت سکه‌ی طلا و ارزش پوند و دلار، مثال‌هایی از سری‌های زمانی چند متغیره می‌باشند.سری‌های زمانی چند متغیره وقتی به وجود می‌آیند که چندین متغیر، با هم در زمان t مشاهده شوند.

از این جهت سری زمانی چند متغیره را یک سری زمانی برداری[۳] نیز می‌گویند. زیرا هر مشاهده برداری است مانند $\mathbf{Y}_t$ که طول آن برابر تعداد متغیرهاست. بردار مشاهده در زمان t به‌صورت:

$$\mathbf{Y}_t = [y_{1t}\ ,\ y_{2t}\ ,\ \dots\ ,\ y_{kt}]' \qquad t = 1, 2, \dots, n$$

و مجموعه‌ی n مشاهده با ماتریس Y به‌صورت:

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{k1} & y_{k2} & \cdots & y_{kk} \end{pmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. بدیهی است اگر فقط یک متغیر داشته باشیم سری زمانی چند متغیره به سری زمانی یک متغیره تبدیل می‌شود (چتفیلد[۴]، ۱۹۹۶ و کرایر[۵]، ۲۰۰۸).

در این فصل هرگاه از کلمه سری زمانی استفاده می‌شود منظور سری زمانی چند متغیره است.

[۳] vector (valued) time series
[۴] Chatfield
[۵] Cryer

۱.۱.۱ ایستایی سری‌های زمانی

سری زمانی $\{\mathbf{Y}_t\}$ را ایستای اکید[۶] گوییم هر گاه توزیع‌های احتمال بردارهای تصادفی $(\mathbf{Y}_{t_1}, \mathbf{Y}_{t_2}, \ldots, \mathbf{Y}_{t_m})$ و $(\mathbf{Y}_{t_1+l}, \mathbf{Y}_{t_2+l}, \ldots, \mathbf{Y}_{t_m+l})$ برای هر مجموعه دلخواه زمان‌های $t_1, t_2, \ldots, t_m$، به ازای هر m، برای همه تأخیرها[۷] یا تقدم‌ها[۸] یکسان باشد. $(l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ پس توزیع احتمال مشاهدات حاصل از یک فرآیند ایستای اکید(قوی[۹]) چند متغیره، نسبت به انتقال زمان ثابت است. یعنی:

$$F(y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}) = F(y_{t_1+l}, \ldots, y_{t_m+l})$$

هر گاه سری زمانی چند متغیره ایستا[۱۰] باشد، هر یک از مؤلفه‌های آن نیز ایستا خواهد بود، اما عکس این مطلب درست نیست (فولر[۱۱]، ۱۹۹۶). بنابراین برای ایستایی یک سری زمانی چند متغیره نمی‌توان از ایستایی تک تک متغیرهای آن استفاده کرد. ایستایی سری‌های زمانی از آن جهت دارای اهمیت است که نظریه‌ی سری‌های زمانی ایستا ساده‌تر است و پارامترها نیز در طول سری زمانی پایدار[۱۲] هستند. بنابراین اگر سری زمانی ناایستا[۱۳] باشد در صورت امکان برای تجزیه و تحلیل ساده‌تر آن را ایستا می‌کنند. ایستایی سری‌های زمانی را می‌توان از طریق آزمون‌های مختلفی مورد بررسی قرار داد.

چویی و آن[۱۴](۱۹۹۹) آزمون‌هایی را برای بررسی ایستایی سری‌های زمانی چند

[۶] strictly stationary
[۷] lag
[۸] lead
[۹] strong stationary
[۱۰] stationarity
[۱۱] Fuller
[۱۲] stable
[۱۳] nonstationary
[۱۴] Choi and Ahn

متغیره (با روند[۱۵] — بدون روند) معرفی کرده‌اند. در این رساله فرض می‌شود با سری‌های زمانی چند متغیره‌ی ایستا سروکار داریم که عوامل ناایستا در آن حذف شده‌اند.

۲.۱.۱ ایستایی ضعیف

سری $\{\mathbf{Y}_t\}$ را ایستای ضعیف[۱۶]، ایستای مرتبه دوم[۱۷] و یا ایستای کواریانسی گوییم هر گاه دارای اولین و دومین گشتاور متناهی باشد و $\mathrm{E}(\mathbf{Y}_t) = \boldsymbol{\mu}$ مستقل از t و $\mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_t\ ,\ \mathbf{Y}_{t+l}) = \mathrm{E}[(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y}_{t+l} - \boldsymbol{\mu})']$ نیز فقط به l بستگی داشته باشد.

به عبارت دیگر، سری $\{\mathbf{Y}_t\}$ را ایستای ضعیف گوییم هر گاه گشتاورهای مرتبه‌ی اول و دوم آن، به t بستگی نداشته باشد.

ایستایی ضعیف، حالت خاصی از ایستای اکید است. در ایستای اکید، همه گشتاورها مستقل از t هستند (برای مطالعه بیشتر در مورد ایستایی فرآیندهای تصادفی، پیبلس[۱۸]، ۱۹۸۰ را ملاحظه کنید). در این رساله، هر جا ذکری از ایستایی به میان آید، منظور(ایستایی ضعیف) است، با توجه به اینکه توزیع نرمال چند متغیره تنها از دو گشتاور اول آن (میانگین و ماتریس کواریانس متقابل[۱۹]) تشکیل شده است ایستایی ضعیف، ایستایی اکید را نتیجه می‌دهد (فولر، ۱۹۹۶).

برای یک سری چند متغیره‌ی ایستا، ساختار ماتریس کواریانس‌متقابل و ماتریس

[۱۵] trend
[۱۶] weakly stationary
[۱۷] second-order stationary stationary
[۱۸] Peebles
[۱۹] cross-covariance matrix

همبستگی‌های‌متقابل[۲۰]، اطلاعات مربوط به ارتباط‌های پویای[۲۱]درونی بین مؤلفه‌های فرآیند را فراهم می‌آورد، بنابراین ابزارهای مهمی در تشخیص مدل سری‌های زمانی محسوب می‌شوند، هر چند با افزایش بعد فرآیند، ماتریس همبستگی‌متقابل می‌تواند ساختار پیچیده‌ای داشته باشد که تفسیر آن را بسیار دشوارتر از حالت یک متغیره می‌کند.

۲.۱ مشخصات سری‌های زمانی چند متغیره

ساختار اطلاعات یک سری‌های زمانی چند متغیره $\{\mathbf{Y}_t\}$، کاملاً به وسیله‌ی توزیع همه‌ی زیر مجموعه‌های متناهی ار $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ مشخص می‌شود. با این حال، در اکثر موارد، شکل توزیع سری زمانی مشخص نیست، اما عمده‌ی اطلاعات مربوط به این توزیع، در گشتاورهای اول و دوم نهفته است. در این بخش به معرفی این گشتاورها پرداخته شده است.

۱.۲.۱ بردار میانگین

هر گاه سری $\{\mathbf{Y}_t\}$، ایستا باشد، با فرض وجود گشتاور اول متناهی، خواهیم داشت:

$$\mathrm{E}(\mathbf{Y}_t) = \boldsymbol{\mu}$$

که $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1\ ,\ \mu_2\ ,\cdots,\ \mu_k]'$ بردار میانگین سری نامیده می‌شود و به ازای هر t، ثابت است.

---
[۲۰] cross-correlation matrix
[۲۱] dynamics

۲.۲.۱ ماتریس کواریانس

هر گاه سری $\{\mathbf{Y}_t\}$ ایستا باشد، با فرض وجود گشتاور دوم متناهی، بردارهای $\mathbf{Y}_t$ دارای یک ماتریس کواریانس ثابت به ازای همه t ها خواهند بود که با $\sum_{\mathbf{Y}} = \Gamma(۰) = \mathrm{E}[(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu})']$ نشان داده می‌شود.

۳.۲.۱ ماتریس کواریانس‌متقابل

برای سری زمانی ایستای $\{\mathbf{Y}_t\}$، کواریانس بین y_{it} و $y_{j\ t+l}$ به ازای $i\ ,\ j = ۱\ ,\ ۲\ ,\ldots,k$ و $(l = ۰\ ,\ \pm۱\ ,\ \pm۲\ ,\ \pm۳\ ,\ldots)$ به‌صورت:

$$\gamma_{ij}(l) = \mathrm{E}[(y_{it} - \mu_i)(y_{j\ t+l} - \mu_j)]$$

که μ_i و μ_j به ترتیب میانگین‌های سری i ام و jام هستند. همچنین $\gamma_{ij}(-l) = \gamma_{ji}(l)$.

بنابراین ماتریس کواریانس‌متقابل در تأخیر l به ازای $l = (۰\ ,\ \pm۱\ ,\ \pm۲\ ,\ \pm۳\ ,\cdots)$ را، به‌صورت زیر نشان می‌دهند.

$$\begin{aligned}\Gamma(l) &= \mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t+l}) = \mathrm{E}[(\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y}_{t+l} - \boldsymbol{\mu})'] \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{۱۱}(l) & \gamma_{۱۲}(l) & \cdots & \gamma_{۱k}(l) \\ \gamma_{۲۱}(l) & \gamma_{۲۲}(l) & \cdots & \gamma_{۲k}(l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{k۱}(l) & \gamma_{k۲}(l) & \cdots & \gamma_{kk}(l) \end{pmatrix}_{K\times K}\end{aligned}$$

که درایه‌های روی قطر اصلی همان توابع اتوکواریانس[۲۲] مربوط به k مؤلفه‌ی سری هستند که به‌صورت:

$$\gamma_{ii}(l) = \mathrm{Cov}(y_{it}\ ,\ y_{i\ t+k}) = \mathrm{E}[(y_{it} - \mu_i)(y_{j\ t+l} - \mu_j)]$$

[۲۲] autocovariance functions

و $l = (\circ\ ,\ \pm ۱\ ,\ \pm ۲\ ,\ \pm ۳\ ,\cdots)$ و $i = ۱\ ,\ ۲\ ,\cdots,\ k$، تعریف می‌شوند. بقیه‌ی درایه‌ها همان کواریانس‌متقابل میان y_{it} و $y_{j\ t+l}$ می‌باشد.

چون سری را به صورت ایستا در نظر می‌گیرند پس کواریانس‌متقابل بین دو مؤلفه i و j در تأخیر l فقط تابعی از l می‌شود، و داریم $\gamma_{ij}(-l) = \gamma_{ji}(l)$ و همچنین $\Gamma(-l) = \Gamma'(l)$. در واقع $\gamma_{ji}(l) = \mathrm{E}[(y_{j\ t+l} - \mu_j)(y_{it} - \mu_i)] = \mathrm{E}[(y_{it} - \mu_i)(y_{j\ t-l} - \mu_j)] = \gamma_{ij}(-l)$ خواهد بود. در حالت خاص، به ازای $l = \circ$ خواهیم داشت:

$$\Gamma(\circ) = \begin{pmatrix} \gamma_{۱۱}(\circ) & \gamma_{۱۲}(\circ) & \cdots & \gamma_{۱k}(\circ) \\ \gamma_{۲۱}(\circ) & \gamma_{۲۲}(\circ) & \cdots & \gamma_{۲k}(\circ) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{k۱}(\circ) & \gamma_{k۲}(\circ) & \cdots & \gamma_{kk}(\circ) \end{pmatrix} \equiv \textstyle\sum_Y$$

که همان ماتریس‌کواریانس ثابت سری زمانی می‌باشد و درایه‌های روی قطر آن، واریانس‌های k مؤلفه‌ی سری را به دست می‌دهد؛ یعنی:

$$\gamma_{ii}(\circ) = \mathrm{Var}(y_{it}) = \mathrm{E}[(y_{it} - \mu_i)^۲] \quad , \quad i = ۱\ ,\ ۲\ ,\ldots,\ k$$

۴.۲.۱ ماتریس همبستگی‌متقابل

برای سری زمانی ایستای $\{\mathrm{Y}_t\}$، همبستگی‌متقابل میان y_{it} و $y_{j\ t+l}$ به ازای $i\ ,\ j = ۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳,\ldots$ و $l = \circ\ ,\ \pm ۱\ ,\ \pm ۲\ ,\ \pm ۳\ ,\ \ldots$

$$\rho_{ij}(l) = \mathrm{Corr}(y_{it}\ ,\ y_{j\ t+l}) = \frac{\gamma_{ij}(l)}{\sqrt{\gamma_{ii}(\circ)}\sqrt{\gamma_{jj}(\circ)}}$$

همچنین $\rho_{ij}(-l) = \rho_{ji}(l)$، به ازای $i = j$ تابع خودهمبستگی[۲۳] (ACF) سری یک متغیره‌ی $\mathbf{Y}_i$ یعنی $\rho_{ii}(l)$ به دست می‌آید. با در نظر گرفتن ماتریس قطری V به‌صورت:

$$V = \operatorname{diag}(\gamma_{۱۱}(۰)\ ,\ \gamma_{۲۲}(۰)\ ,\ \cdots\ ,\ \gamma_{kk}(۰))$$

ماتریس همبستگی‌متقابل در تأخیر l به ازای $l = ۰\ ,\ \pm۱\ ,\ \pm۲\ ,\ \cdots$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho(l) = V^{-(\frac{۱}{۲})}\Gamma(l)V^{-(\frac{۱}{۲})} = \begin{pmatrix} \rho_{۱۱}(l) & \rho_{۱۲}(l) & \cdots & \rho_{۱k}(l) \\ \rho_{۲۱}(l) & \rho_{۲۲}(l) & \cdots & \rho_{۲k}(l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{k۱}(l) & \rho_{k۲}(l) & \cdots & \rho_{kk}(l) \end{pmatrix}$$

که

$$V^{-(\frac{۱}{۲})} = \operatorname{diag}(\{\gamma_{۱۱}(۰)\}^{-(\frac{۱}{۲})}, \{\gamma_{۲۲}(۰)\}^{-(\frac{۱}{۲})}\ ,\ \ldots\ ,\ \{\gamma_{kk}(۰)\}^{-(\frac{۱}{۲})})$$

می‌باشد، زیرا سری ایستاست. ماتریس های $\Gamma(l)$ و $\rho(l)$ ماتریس‌های نیمه‌معین‌مثبت[۲۴] هستند؛ بدین معنی که به ازای مقدار صحیح مثبت m و همه‌ی بردارهای k بعدی $\mathbf{b}_۱, \mathbf{b}_۲, \ldots, \mathbf{b}_m$ داریم:

$$\textstyle\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{m}\mathbf{b}_i{}'\Gamma(i-j)\mathbf{b}_i \geq ۰$$

زیرا $\operatorname{Var}(\sum_{i=۱}^{m}\mathbf{b}_i{}'\mathbf{Y}_{t-i}) \geq ۰$ می‌باشد.

۳.۱ الگوهای برای سری‌های زمانی ایستا

بدیهی است هر سری زمانی $\mathbf{Y}_t$ با تفاضل گیری از $\boldsymbol{\mu}$ تبدیل به یک سری با میانگین صفر می‌شود و می‌توان آن را به عنوان یک سری جدید در نظر گرفت و مدلی «احتمالی» یا

[۲۳] AutoCorrelation Function
[۲۴] non-negative define

«تصادفی» برای آن جستجو کرد؛ یعنی هر گاه سری زمانی $\mathbf{Y}_t$ دارای میانگین باشد تعریف می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_t = \mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu}$$

نکته دیگر معرفی دو عملگر پس‌رو[۲۵] و تفاضلی[۲۶] می‌باشد که عملگر پس‌رو یا برگشت B به صورت $B\mathbf{Y_t} = \mathbf{Y_{t-1}}$ می‌باشد.

عملگر تفاضلی، $\nabla\mathbf{Y}_t = (۱ - B)\mathbf{Y}_t = \mathbf{Y}_t - \mathbf{Y}_{t-۱}$ و عملگر فصلی مرتبه‌s ام به‌صورت $\nabla^s\mathbf{Y}_t = (۱ - B^s)\mathbf{Y}_t$، می‌باشد. بسیاری از سری‌های زمانی را به‌صورت ترکیب‌هایی خطی از متغیرهای تصادفی ناهمبسته[۲۷] و یا مستقل $(۰, \sigma^۲)$، و در حالت چند متغیره، به‌صورت ترکیب‌هایی خطی از متغیرهای تصادفی ناهمبسته و یا مستقل $(۰, \Sigma)$ نمایش می‌دهند. در این قسمت به معرفی این نمایش‌ها پرداخته می‌شود.

۱.۳.۱ فرآیند اغتشاش خالص

بردار $\{\varepsilon_t\}$ را فرآیند K-متغیره‌ی اغتشاش خالص[۲۸] گویند هر گاه دنباله‌ای از بردارهای تصادفی ناهمبسته از توزیعی یکسان با میانگین ثابت باشند. به‌طوری‌که $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = \boldsymbol{\mu}_\varepsilon$، معمولاً صفر فرض می‌شود، یعنی $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = ۰$ و ماتریس کواریانس این فرآیند به‌صورت:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_s{}') = \begin{cases} \Sigma & t = s \\ ۰ & t \neq s \end{cases}$$

خواهد بود. Σ یک ماتریس $k \times k$ است. ایستایی این فرآیند بر حسب تعریف واضح است، زیرا گشتاورهای مرتبه‌ی اول و دوم و همچنین کواریانس آنها به t بستگی ندارد.

[۲۵] backward operator
[۲۶] difference operator
[۲۷] uncorrelated
[۲۸] white noise

یک فرآیند اغتشاش خالص، گوسی است هر گاه توزیع مشترک آن نرمال باشد. در این رساله، همواره $\{\varepsilon_t\}$ به عنوان یک فرآیند اغتشاش خالص گوسی[۲۹] با میانگین صفر در نظر گرفته می‌شود.

مثال ۱—۱: فرض کنید $\mathbf{Y}_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t-1} \end{pmatrix}$ که β یک مقدار ثابت و$\{\varepsilon_t\}$ یک فرآیند اغتشاش خالص است و بردار میانگین سری برابر $\boldsymbol{\mu}_t = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \mathrm{E}\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{1t} + \beta\varepsilon_{2t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ می‌باشد. کواریانس بین سری‌های زمانی تک متغیره‌ی y_{1t} و y_{2t} در تأخیرهای مختلف به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\gamma_{12}(0) = \mathrm{Cov}(y_{1t}, y_{2t}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_{1\ t}, \varepsilon_{1\ t} + \beta\varepsilon_{2\ t-1})$$

$$= \mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t}\ ,\ \varepsilon_{1t}) + \beta\mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t}\ ,\ \varepsilon_{2\ t-1}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t}\ ,\ \varepsilon_{1t}) = \sigma^2$$

$$\gamma_{12}(1) = \mathrm{Cov}(y_{1t}\ ,\ y_{2\ t+1}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t}\ ,\ \varepsilon_{1\ t+1} + \beta\varepsilon_{2t})$$

$$= \mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t}\ ,\ \varepsilon_{1\ t+1}) + \beta\mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t}\ ,\ \varepsilon_{2t}) = \beta\mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t}\ ,\ \varepsilon_{2t})$$

$$\gamma_{12}(-1) = \mathrm{Cov}(y_{1t}\ ,\ y_{2\ t-1}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_{1\ t}\ ,\ \varepsilon_{1\ t-1}+\beta\varepsilon_{2\ t-2})$$

$$= \mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t}\ ,\ \varepsilon_{1\ t-1}) + \beta\mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t}\ ,\ \varepsilon_{2\ t-2}) = 0$$

$$\gamma_{21}(1) = \mathrm{Cov}(y_{2t}\ ,\ y_{1\ t+1}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_{1\ t} + \beta\varepsilon_{2\ t-1}\ ,\ \varepsilon_{1\ t+1})$$

$$= \mathrm{Cov}(\varepsilon_{1\ t}\ ,\ \varepsilon_{1\ t+1}) + \beta\mathrm{Cov}(\varepsilon_{1\ t+1}\ ,\ \varepsilon_{2\ t-1}) = 0$$

$$\gamma_{21}(-1) = \mathrm{Cov}(y_{2t}\ ,\ y_{1\ t-1}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t}+\beta\varepsilon_{2\ t-1}\ ,\ \varepsilon_{1\ t-1})$$

$$= \mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t}\ ,\ \varepsilon_{2\ t-1}) + \beta\mathrm{Cov}(\varepsilon_{2\ t-1}\ ,\ \varepsilon_{1\ t-1}) = \beta\mathrm{Cov}(\varepsilon_{2\ t-1}\ ,\ \varepsilon_{1\ t-1})$$

$$= \beta\mathrm{Cov}(\varepsilon_{2\ t}\ ,\ \varepsilon_{1t})$$

[۲۹] Gussian

همچنین داریم:

$$\gamma_{21}(-1)=\gamma_{12}(1)=\beta\mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t}\,,\,\varepsilon_{2t})\ ,\ \ \gamma_{12}(-1)=\gamma_{21}(1)$$

$$\Gamma(l) \;=\; \begin{pmatrix}\gamma_{11}(l) & \gamma_{12}(l)\\ \gamma_{21}(l) & \gamma_{22}(l)\end{pmatrix} \qquad l=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

$$\Gamma(-l) \;=\; \begin{pmatrix}\gamma_{11}(-l) & \gamma_{12}(-l)\\ \gamma_{21}(-l) & \gamma_{22}(-l)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_{11}(l) & \gamma_{21}(l)\\ \gamma_{12}(l) & \gamma_{22}(l)\end{pmatrix}=\Gamma'(l)$$

مثال ۱–۲: در مثال ۱–۱ ماتریس کواریانس‌متقابل سری $\mathbf{Y}_t$ را $\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma^2 & 0\\ 0 & (1+\beta^2)\sigma^2\end{pmatrix}$ در نظر بگیرید. ماتریس همبستگی‌متقابل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\gamma_{11}(0)=\mathrm{Cov}(y_{1t},y_{1t})=\mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{1t})=\mathrm{Var}(\varepsilon_{1t})=\sigma^2$$

$$\gamma_{22}(0)=\mathrm{Cov}(y_{2t}\ ,\ y_{2t})=\mathrm{Cov}(\varepsilon_{1t}+\beta\varepsilon_{2\ t-1}\ ,\ \varepsilon_{1t}+\beta\varepsilon_{2\ t-1})$$

$$=\sigma^2+\beta\sigma^2=(1+\beta)\sigma^2$$

$$V=\begin{pmatrix}\gamma_{11}(0) & 0\\ 0 & \gamma_{22}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma^2 & 0\\ 0 & (1+\beta)\sigma^2\end{pmatrix}$$

$$\rho(l)=V^{-}(\tfrac{1}{2})\Gamma(l)V^{-(\frac{1}{2})}\quad\Longrightarrow$$

$$\rho(l)=\begin{pmatrix}\sigma^{-1} & 0\\ 0 & ((1+\beta^2)\sigma^2)^{-(\frac{1}{2})}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_{11}(l) & \gamma_{12}(l)\\ \gamma_{21}(l) & \gamma_{22}(l)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma^{-1} & 0\\ 0 & ((1+\beta^2)\sigma^2)^{-(\frac{1}{2})}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sigma^{-1}\gamma_{11}(l) & \sigma^{-1}\gamma_{12}(l)\\ ((1+\beta^2)\sigma^2)^{-(\frac{1}{2})}\gamma_{21}(l) & ((1+\beta^2)\sigma^2)^{-(\frac{1}{2})}\gamma_{22}(l)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma^{-1} & 0\\ 0 & ((1+\beta^2)\sigma^2)^{-(\frac{1}{2})}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^{-2}\gamma_{11}(l) & \sigma^{-2}\gamma_{12}(l)(1+\beta^2)^{-(\frac{1}{2})} \\ (1+\beta^2)^{-(\frac{1}{2})}\gamma_{21}(l)\sigma^{-2} & \sigma^{-2}(1+\beta^2)^{-1}\gamma_{22}(l) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & (1+\beta^2)^{-(\frac{1}{2})} \\ (1+\beta^2)^{-(\frac{1}{2})} & 0 \end{pmatrix} & l = 0 \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & \beta(1+\beta^2)^{-(\frac{1}{2})} \\ 0 & 1(1+1^2)^{-(\frac{1}{2})} \end{pmatrix} & l = 1 \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \mid l \mid > 1 \end{cases}$$

۲.۳.۱ فرآیند چند متغیره‌ی خودبازگشتی $VAR(p)$

فرآیند چند متغیره‌ی خودبازگشتی[30] مرتبه p یا $VAR(p)$[31]، به ازای k متغیر به‌صورت

$$\mathbf{Y}_t = \Phi_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \Phi_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \cdots + \Phi_p \mathbf{Y}_{t-p} + \varepsilon_t$$

تعریف می‌شود(رینسل[32]، ۱۹۹۷). که در آن ε_t فرآیند k متغیره‌ی اغتشاش خالص و Φ_jها، ماتریس‌هایی $k \times k$ با درایه‌هایی به‌صورت پارامترهای ثابت هستند، این فرآیند را می‌توان به‌صورت $\Phi(B)\mathbf{Y}_t = \varepsilon_t$ نوشت. که در آن $\Phi(B) = I - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \ldots - \Phi_p B^p$ را عملگر $VAR(p)$ می‌نامند.

شرط لازم و کافی برای آن‌که $VAR(p)$ ایستا باشد آن است که همه ریشه‌های معادله

$$\det\{\Phi(B)\} = 0$$

---

[30] multivariate autoregressive process

[31] Vector Autoregressive

[32] Reinsel

یا $\det(I - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - ... - \Phi_p B^p) = 0$، خارج از دایره‌ی واحد باشند.

در حالت خاص، به ازای $k = 1$ فرآیند $VAR(p)$ تبدیل به یک فرآیند یک متغیره‌ی $AR(p)$[۳۳]، با معادله‌ی $(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p) y_t = \varepsilon_t$ می‌شود.

به‌ازای $k = 2$ مدل $VAR(1)$، به‌صورت $\mathbf{Y}_t = \Phi \mathbf{Y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$ ، یا

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_{1t} = \phi_{11} y_{1\ t-1} + \phi_{12} y_{2\ t-1} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \phi_{21} y_{1\ t-1} + \phi_{22} y_{2\ t-1} + \varepsilon_{2t} \end{cases} \qquad (1-1)$$

می‌باشد. بنابراین، گذشته از ضربه‌های تصادفی، هر y_{it}، نه‌تنها مقادیر گذشته‌ی خود را در بردارد. بلکه مقادیر گذشته‌ی سایر متغیرهای y_{jt} را نیز شامل می‌شود($j \neq i$). برای مثال اگرy_{1t} وy_{2t} به ترتیب، میزان فروش و هزینه‌ی تبلیغات یک شرکت در زمان t باشند از معادله‌ی $(1-1)$ نتیجه می‌شود که فروش جاری، نه فقط به فروش قبلی وابسته است؛ بلکه به هزینه‌ی تبلیغات در دوره‌های گذشته نیز بستگی دارد. علاوه براین یک رابطه‌ی پس‌خورانی[۳۴] بین دو سری وجود دارد.

برای ایستا بودن $VAR(1)$، لازم است ریشه‌های معادله

$$\det\{I - \Phi_1 B\} = 0 \qquad (2-1)$$

بیرون از دایره‌ی واحد باشند، که این ریشه‌ها همان مقادیر ویژه‌ی ماتریس Φ_1 می‌باشند. پس اگر فرض شود که $\lambda_1\ ,\ \lambda_2\ ,\cdots,\ \lambda_k$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس Φ_1 باشند، معادله‌ی $\det\{I - \Phi_1 B\} = \Pi_{i=1}^{k}(1 - \lambda_i B)$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس Φ_1 را خواهد داد.

[۳۳] Autoregressive
[۳۴] feedback

بنابراین، ریشه‌های معادله (۱—۲) بیرون از دایره واحد هستند اگر و تنها اگر همه‌ی مقادیر ویژه(λ_iها) درون دایره‌ی واحد باشند. از این رو، یک شرط معادل برای ایستایی یک $VAR(1)$ این است که همه‌ی مقادیرویژه‌ی Φ_1 درون دایره‌ی واحد قرار گیرند؛ یعنی: $|\lambda_i| < 1 \quad , \; i = 1 , 2 , \ldots , k$، در چنین حالتی برای ماتریس قطری Λ که عناصر آن مقادیر ویژه هستند ($\Lambda^n = \operatorname{diag}(\lambda_1{}^n , \lambda_2{}^n , \ldots , \lambda_k{}^n)$) خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^n = 0$$

همچنین طبق تجزیه‌ی طیفی[۳۵] ماتریس‌ها می‌توان ماتریس Φ_1 را به‌صورت $\Phi_1 = U\Lambda U^{-1}$ تجزیه کرد. که U یک ماتریس متعامد می‌باشد. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_1{}^n = \lim_{n\to\infty} U\Lambda U^{-1}.U\Lambda U^{-1}\ldots U\Lambda U^{-1} = \lim_{n\to\infty} U\Lambda^n U^{-1} = 0$$

و چون

$$\lim_{n\to\infty}(I-\Phi_1 B)(I+\Phi_1 B+\Phi_1{}^2B^2+\ldots+\Phi_1{}^{n-1}B^{n-1}) = \lim_{n\to\infty}(I-\Phi_1{}^nB^n) = I$$

در نتیجه $(I-\Phi_1 B)^{-1} = I+\Phi_1 B+\Phi_1{}^2B^2+\cdots$ خواهد بود.

پس می‌توان نوشت:

$$Y_t = \{\Phi(B)\}^{-1}\varepsilon_t = \{I-\Phi_1 B\}^{-1}\varepsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty}\Phi_1{}^j\varepsilon_{t-j}$$

که با افزایش j ماتریس $\Phi_1{}^j$ به سمت صفر کاهش می‌یابد.

در استدلال بالا فرض شد بردارهای ویژه Φ_1 مستقل خطی هستند، اما در حالت کلی چنین نیست. با وجود این در چنین حالتی، هنوز یک ماتریس ناویژه‌ی U وجود دارد که

[۳۵] spectral analysis