دانشگاه علامه طباطبائی
دانشکده‌ی اقتصاد
گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد **آمار ریاضی**

عنوان

براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی ترکیب خطی میانگین توزیع نرمال یک متغیره و چند متغیره

پژوهشگر

سحر قاسمی

استاد راهنما

دکتر نادر نعمت‌الهی

استاد مشاور

دکتر محمد بامنی مقدم

شهریور ۱۳۸۹

کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی اعم از چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان‌نامه برای دانشگاه علامه طباطبائی محفوظ است. نقل مطالب با ذکر منبع مانعی ندارد.

تأیید پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشدتوسط دانشجو

عنوان پایان‌نامه: براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی ترکیب خطی میانگین توزیع نرمال یک متغیره و چند متغیره

نام دانشجو: سحر قاسمی

شماره‌ی دانشجویی: ۸۶۱۲۸۲۰۷

استاد راهنما: دکتر نادر نعمت‌الهی

این‌جانب **سحر قاسمی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی **آمار ریاضی** دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی گواهی می‌نمایم پژوهش‌های ارائه شده در پایان‌نامه با عنوان مذکور توسط شخص این‌جانب انجام شده است و درستی مطالب نگارش یافته مورد تأیید می‌باشد. همچنین گواهی می‌نمایم مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط این‌جانب یا فرد دیگری در هیچ کجا ارائه نشده است و در نگارش متن پایان‌نامه شیوه‌ی نگارش مصوب دانشکده‌ی اقتصاد را به‌طور کامل رعایت نموده‌ام. چنان‌چه در هر زمان خلاف آن‌چه گواهی نموده‌ام مشاهده گردد خود را از آثار حقیقی و حقوقی ناشی از دریافت مدرک کارشناسی ارشد محروم می‌دانم و هیچ‌گونه ادعایی نخواهم داشت.

تاریخ: **امضا دانشجو:**

اهدائیه

تقدیم به همه ی آن هایی که

حقشان بر گردنم است

سپاس گزاری

سپاس خدای را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست. اکنون که با یاری او توانسته‌ام تلاشی هر چند ناچیز را در راه کسب دانش به انجام رسانم، بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر نادر نعمت‌الهی، که به پایان رساندن این تحقیق جز با راهنمایی‌های پدرانه و هدایت‌های بی‌دریغ ایشان میسر نبود، قدردانی نمایم.

از استاد مشاورم جناب آقای دکتر محمد بامنی مقدم که تذکراتشان باعث غنای پایان‌نامه شد، تشکر می‌نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر و جناب آقای دکتر که زحمت داوری این اثر را به عهده داشتند سپاس‌گزارم.

در پایان، از خانواده‌ام، به‌ویژه پدر و مادرم که با حمایت‌های خویش، همواره مرا پشتیبانی کرده‌اند نهایت سپاس و قدرشناسی را دارم.

امیدوارم بتوانم از عهده ادای حق این عزیزان برآیم.

شهریور۸۹

فهرست مطالب

فهرست مطالب ب

فهرست شکل‌ها ث

۱ مفاهیم و کلیات ۱

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ بیان مسئله ۱

۳.۱ پیشینه تحقیق ۴

۴.۱ اهداف و فصل‌بندی ۶

۵.۱ تصمیم آماری ۷

۱.۵.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه ۸

۲.۵.۱ تصمیم بیزی ۱۲

۶.۱ براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی ۱۵

۲ براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی خطی تحت تابع زیان توان دوم خطا ۲۰

۱.۲ مقدمه ۲۰

۲.۲ براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی خطی پارامتر میانگین توزیع نرمال یک متغیره ۲۱

۳.۲ براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی خطی پارامتر میانگین توزیع نرمال چند متغیره ۲۴

۴.۲ بحث و نتیجه‌گیری ۳۵

۳ پذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی تحت تابع زیان لاینکس (یک متغیره) ۳۶

۱.۳ مقدمه ۳۶

۲.۳ براوردگرهای پذیرفتنی خطی پارامتر میانگین توزیع نرمال یک متغیره . . ۳۷

۳.۳ براوردگرهای ناپذیرفتنی خطی پارامتر میانگین توزیع نرمال یک متغیره . ۴۱

۴.۳ بحث و نتیجه‌گیری ۴۳

۴ پذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی تحت تابع زیان لاینکس (چند متغیره) ۴۵

۱.۴ مقدمه ۴۵

۲.۴ براوردگرهای ناپذیرفتنی ترکیب خطی میانگین توزیع نرمال چند متغیره . ۴۶

۳.۴ براوردگرهای پذیرفتنی ترکیب خطی میانگین توزیع نرمال چند متغیره . . ۴۹

۴.۴ براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی در حالت کلی ماتریس واریانس-
کواریانس ۵۶

۵.۴ بحث و نتیجه‌گیری ۵۷

۵ براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی خطی تحت تابع زیان نرمال بازتابیده ۵۹

۱.۵ مقدمه ۵۹

۲.۵ نواحی ناپذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی ۶۱

۳.۵ نواحی پذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی ۶۶

۴.۵ بحث و نتیجه‌گیری ۷۰

کتاب‌نامه ۷۱

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۷۵

پیوست الف برهان لم ۱.۴ ۸۰

پیوست ب برهان لم ۲.۴ **۸۲**

پیوست پ توزیع شرطی $\underline{\theta}|\underline{\mathbf{x}}$ **۸۵**

فهرست شکل‌ها

۱.۱ تابع زیان توان دوم خطا ۹

۲.۱ تابع زیان لاینکس ۱۰

۳.۱ تابع زیان نرمال‌بازتابیده ۱۱

۱.۲ نواحی پذیرفتنی (A) و ناپذیرفتنی (I) براوردگر $c\overline{X}+d$ در براورد θ ۲۴

۱.۳ نواحی پذیرفتنی و ناپذیرفتنی براوردگر $\delta(c,d)=c\overline{X}+d$ در حالت $a>0$ ۴۳

۲.۳ نواحی پذیرفتنی و ناپذیرفتنی براوردگر $\delta(c,d)=c\overline{X}+d$ در حالت $a<0$ ۴۴

۱.۵ تابع زیان اصلاح شده‌ی توان دوم خطا ۶۰

۲.۵ نواحی پذیرفتنی (A) و ناپذیرفتنی (I) براوردگر $c\overline{X}+d$ در براورد θ ۷۰

چکیده

یکی از مسائل مورد توجه در براورد میانگین توزیع نرمال یک و چند متغیره، بررسی پذیرفتنی یا ناپذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی در براورد میانگین توزیع نرمال یک متغیره و ترکیب خطی میانگین توزیع نرمال چند متغیره می‌باشد. در این پایان‌نامه این مسئله را تحت برخی از تابع زیان‌های متقارن، نامتقارن و کراندار مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع نرمال با میانگین مجهول θ و واریانس معلوم σ^2 باشد. در براورد θ براوردگرهای خطی به فرم $c\overline{X}+d$ را در نظر گرفته و نواحی پذیرفتنی و ناپذیرفتنی این براوردگرهای خطی تحت تابع زیان متقارن توان دوم خطا، تابع زیان نامتقارن لاینکس و تابع زیان کران‌دار نرمال بازتابیده را مشخص می‌کنیم. در هر مورد پذیرفتنی یا ناپذیرفتنی بودن $\overline{X}$ را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

همچنین فرض کنید $\underline{X}$ برداری تصادفی و دارای توزیع نرمال p متغیره با میانگین مجهول $\underline{\theta}$ و ماتریس واریانس-کواریانس معلوم Σ باشد. در این حالت شرایط لازم و کافی برای آن‌که براوردگرهای خطی به فرم $\gamma'\underline{X}+K$ در براورد ترکیب خطی $\underline{\varphi'\theta}$ تحت تابع زیان‌های توان دوم خطا و لاینکس پذیرفتنی باشد را به‌دست می‌آوریم.

واژگان کلیدی. *براوردگر بیز، پذیرفتنی بودن، تابع زیان توان دوم خطا، تابع زیان لاینکس، تابع زیان نرمال بازتابیده، تابع مخاطره*

فصل ۱

مفاهیم و کلیات

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا به بیان مسئله پرداخته و سپس تاریخچه مختصری در ارتباط با فعالیت‌هایی که در زمینه به‌دست آوردن براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی انجام شده است، بیان می‌گردد. در ادامه به بیان اهداف و فصل‌بندی می‌پردازیم و پس از آن براوردگر بیزی، براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی را مطرح و روش‌های به دست آوردن براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی بیان می‌گردد. در نهایت به بیان روش بیز حدی می‌پردازیم.
قضیه‌های این فصل را بدون اثبات می‌آوریم، لیکن منبع مناسب را برای مشاهده‌ی برهان قضیه‌ها و مطالب بیشتر و مرتبط با موضوع مورد بحث، به خواننده معرفی می‌کنیم.

۲.۱ بیان مسئله

دراستنباط آماری پارامتری براساس یک نمونه تصادفی $\underline{X} = (X_۱, X_۲, .., X_n)$ که از یک توزیع $f(.|\theta)$ متعلق به خانواده توزیع‌های $F = \{f(\underline{X}|\theta)|\theta \in \Theta\}$ جمع‌آوری شده است استنتاج‌هایی

در مورد پارامتر مجهول θ که متعلق به فضای پارامتری Θ است، انجام می‌گیرد. در مبحث براوردیابی تابعی از نمونه تصادفی $\underline{X}$ مانند $\delta(\underline{X})$ که به‌آن براوردگر گویند را به عنوان تخمینی از پارامتر مجهول θ یا تابعی از آن مانند $h(\theta)$ ارائه می‌دهند. بدیهی است هر چه مقدار مشاهده شده‌ی این براوردگر به ازای مقدار مشاهده شده‌ی $\underline{x} = (x_۱, x_۲, .., x_n)'$ از $\underline{X}$ به تابع پارامتری $h(\theta)$ نزدیکتر باشد، تخمین دقیقتری را به دست خواهیم آورد. یک معیار برای اندازه‌گیری فاصله براوردگر تا تابع پارامتری $h(\theta)$، تابع زیان است که تابع نامنفی از $h(\theta)$ و$\delta(\underline{X})$ و به صورت $L(h(\theta), \delta(\underline{X}))$ نشان داده می‌شود. تابع زیان تابعی از نمونه تصادفی $\underline{X}$ است پس با تغییر نمونه مقدار آن نیز تغییر می‌کند. امید ریاضی تابع زیان را تابع مخاطره گویند و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$R(h(\theta), \delta) = E_\theta[L(h(\theta), \delta(\underline{X}))]$$

در براوردیابی به دنبال براوردگری مانند δ^* هستیم که در بین تمام براوردگرها (که در کلاس $\mathscr{D}$ از براوردگرها قرار دارند) تابع مخاطره را مینیمم کند. اما همواره براوردگری که بتواند تابع مخاطره را به ازای تمام مقادیر ممکن پارامتر θ مینیمم کند، لزوما وجود ندارد. دو روش برای حل این مشکل وجود دارد. در روش اول برای به دست آوردن براوردگر مطلوب، خود را محدود به زیر کلاسی از براوردگرها کرده و در این زیر کلاس براوردگر مطلوب را به‌دست می‌آوریم. دو کلاس از این براوردگرها، کلاس براوردگرهای نااریب و کلاس براوردگرهای ناوردا می‌باشند ، که در این کلاس‌ها به دنبال براوردگر نااریب با واریانس به طور یکنواخت مینیمم (UMVU) و براوردگر ناوردا با کمترین مخاطره (MRE) هستیم.

روش دیگر برای به‌دست آوردن براوردگر مطلوب، برقراری یک رابطه ترتیب بین براوردگرها است. دو روش در برقراری رابطه ترتیب بین براوردگرها اصل بیزی و اصل مینیماکس می‌باشد.

حال سوالی که مطرح می‌شود این است که در بین دو یا چند براوردگری که برای براورد تابع پارامتری $h(\theta)$ به دست می‌آوریم، کدامیک بهتر است؟

در یک مسئله براوردیابی کلاس براوردگرهای $\mathscr{D}$ معمولا کلاس بزرگی است و انتخاب اینکه کدام براوردگر $\delta \in \mathscr{D}$ را مورد استفاده قرار دهیم کار مشکلی می‌باشد. بنابراین بایستی یک زیر کلاس $\mathscr{L}$ از$\mathscr{D}$ را پیدا کنیم که در این کلاس کلیه براوردگرهای مناسب قرار داشته باشند.

حال چون این کلاس $\mathscr{L}$ یک کلاس کوچکتر است، پیدا کردن یک براوردگر مناسب در آن راحت‌تر می‌باشد. بنابراین کلاسی از براوردگرهای مناسب را با استفاده از محک پذیرفتنی بودن تعریف می‌کنیم و نحوه به دست آوردن این براوردگرها را ارائه می‌دهیم.
در این پایان‌نامه به بررسی براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی خطی میانگین یا ترکیب خطی بردار میانگین توزیع نرمال در حالت‌های یک متغیره و چند متغیره و تحت سه تابع زیان توان دوم خطا، لاینکس و نرمال بازتابیده می‌پردازیم. برای این منظور حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

الف-حالت یک متغیره:

در این حالت فرض می‌کنیم $X_1, X_2, .., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta, \sigma^2)$ باشد که در آن σ^2 معلوم است. می‌خواهیم میانگین توزیع، θ را براورد کنیم.
با توجه به این‌که براوردگر بیزی θ تحت توزیع پیشین نرمال و تحت بسیاری از توابع زیان به صورت یک تابع خطی به فرم $c\overline{X}+d$ است، بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که پذیرفتنی یا ناپذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی به فرم $c\overline{X}+d$ مورد بررسی قرار گیرد. این مسئله را تحت سه تابع زیان توان دوم خطا، لاینکس و نرمال بازتابیده مورد بررسی قرار می‌دهیم.

ب ـ حالت چند متغیره

فرض کنید $\underline{X}$ یک بردار تصادفی با توزیع نرمال p متغیره $N_p(\underline{\theta}, \Sigma)$ باشد که در آن

$\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, .., \theta_n)'$: پارامتر مجهول جامعه و

Σ : ماتریس واریانس-کواریانس $p \times p$ ، معلوم و معین مثبت است.

می‌خواهیم ترکیب خطی از $\underline{\theta}$ به فرم $\underline{\varphi}'\underline{\theta}$ را براورد کنیم که در آن $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_n)'$ ، برداری با مقادیر ثابت و معلوم می‌باشد.
یکی از مسائل مورد توجه پژوهشگران بررسی پذیرفتنی یا ناپذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی به فرم $\underline{\gamma}'\underline{X}+K$ است، که در آن K مقداری ثابت و $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_n)'$ برداری از مقادیر ثابت می‌باشند. بنابراین براوردگرهای خطی به فرم $\underline{\gamma}'\underline{X}+K$ را در نظر گرفته و شرایط لازم و کافی برای این‌که $\underline{\gamma}'\underline{X}+K$ پذیرفتنی شود، تحت دو تابع زیان توان دوم خطا و لاینکس را به‌دست می‌آوریم.

۳.۱ پیشینه تحقیق

یکی از مسائل مورد توجه آمارданان بررسی پذیرفتنی یا ناپذیرفتنی بودن براوردگرهای ارائه شده برای براورد پارامتر مجهول جامعه می‌باشد. در زمینه پذیرفتنی یا ناپذیرفتنی بودن براوردگرها در توزیع‌های مختلف مقالات متعددی موجود است که برخی از آن‌ها عبارتند از: کارلین[۱] (۱۹۵۸) شرایط کافی برای پذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی به فرم $aX+b$ که دارای توزیعی از خانواده نمایی تک پارامتری است را تحت تابع زیان توان دوم خطا را به‌دست آورد. در ادامه گوش[۲] و میدن [۳] (۱۹۷۷)، رالسکو [۴] و رالسکو (۱۹۸۱) و هافمن [۵] (۱۹۸۵) به ترتیب شرایط کافی برای پذیرفتنی بودن براوردگرهایی به فرم $aX+b$، $\frac{aX+b}{cX+d}$ و $\frac{P(X)}{Q(X)}$ که $P(.)$ و $Q(.)$ چند جمله‌ای‌هایی از X هستند را در این خانواده از توزیع‌ها به دست آورند. همچنین پولسکمپ [۶] و رالسکو (۱۹۹۱) کلاس کلی براودگرهای غیر خطی پذیرفتنی در توزیع نمایی تک پارامتری را به دست آوردند. براون[۷]، چو[۸] و فانگ [۹](۱۹۹۲) پذیرفتنی بودن براوردگر ماکسیمم درستنمایی در براورد واریانس توزیع دو جمله‌ای را بررسی کردند. برای مطالعه بیشتر در این زمینه و دستیابی به منبع بیشتر به لی‌من [۱۰] و کسلا[۱۱] (۱۹۹۸) مراجعه کنید.

نویسندگانی نیز در زمینه پذیرفتنی بودن براوردگرها در فضاهای پارامتری کران‌دار و یا مرتب شده تحت تابع زیان مختلف مطالعاتی انجام داده‌اند که از آن جمله می‌توان به کاتز [۱۲] (۱۹۶۱)، ساکروویتز[۱۳] و استرادرمن[۱۴] (۱۹۷۴)، براون (۱۹۸۶)، کالوسکا[۱۵] (۱۹۸۶)، پارسیان و نعمت‌الهی (۱۹۹۵)، ون‌ایدن[۱۶] (۱۹۹۵) و جعفری جوزانی، نهمت‌الهی و شفیعی

Karlin[۱]
Ghosh[۲]
Meeden[۳]
Ralescu[۴]
Hoffmann[۵]
Pulskamp[۶]
Brown[۷]
Chow[۸]
Fang[۹]
Lehmann[۱۰]
Casella[۱۱]
Katz[۱۲]
Sacrowitz[۱۳]
Stawderman[۱۴]
Kaluszka[۱۵]
Van Eeden[۱۶]

(۲۰۰۲) اشاره کرد. در این زمینه نیز برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به ون‌ایدن (۲۰۰۶) مراجعه کرد. در زمینه پذیرفتنی بودن براوردگرها تحت تابع زیان نامتقارن، کو[۱۷] و دی [۱۸] (۱۹۹۰) و صدوقی‌الوندی (۱۹۹۰) پذیرفتنی بودن براوردگرهای پارامتر میانگین توزیع پواسون تحت تابع زیان لاینکس و پارسیان و سنجری فارسی پور (۱۹۹۳) و پارسیان و نعمت‌الهی (۱۹۹۶) به ترتیب پذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی پارامتر مقیاس تحت تابع زیان لاینکس و آنتروپی را در یک زیر خانواده نمایی از توزیع‌ها بررسی کردند.

در استنباط آماری مسئله پذیرفتنی بودن براوردگرها در توزیع نرمال تحت تابع زیان توان دوم خطا توسط کارلین (۱۹۵۸)، ایواز[۱۹] و موریتانی[۲۰] (۱۹۹۷) مورد بررسی قرار گرفته است. مخصوصا در توزیع نرمال چند متغیره کوهن[۲۱] (۱۹۶۵) شرایط لازم و کافی برای پذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی در براورد ترکیب خطی از میانگین را ارائه داد. مطالعات دیگری نیز در این زمینه انجام گرفته است که از آن جمله می‌توان به بلیت[۲۲] (۱۹۵۱) اشاره کرد که روش‌های به دست آوردن تصمیم مینیماکس را مورد مطالعه قرار داد و به بررسی پذیرفتنی بودن تصمیم‌های مینیماکس پرداخت.

از طرف دیگر مطالعات اندکی در زمینه پذیرفتنی بودن براوردگرها در توزیع نرمال تحت تابع زیان نامتقارن لاینکس انجام شده است. به عنوان مثال زلنر[۲۳] (۱۹۸۶) نشان داد که میانگین نمونه تصادفی $\bar{X}$ ، براوردگری ناپذیرفتنی در براورد میانگین توزیع نرمال تحت تابع زیان لاینکس است. علاوه بر آن رجو[۲۴] (۱۹۸۷) و صدوقی‌الوندی و نعمت‌الهی (۱۹۸۹) به بررسی پذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی به فرم $c\bar{X}+d$ پرداختند و شرایطی را برای c و dدر نظر گرفتند تا براوردگر $c\bar{X}+d$ تحت تابع زیان لاینکس پذیرفتنی شود. پارسیان (۱۹۹۰) پذیرفتنی بودن براوردگر میانگین توزیع نرمال چند متغیره تحت تابع زیان لاینکس را مورد بررسی قرار داد. تاناکا[۲۵] (۲۰۰۹) پذیرفتنی بودن براوردگرهای بیز تعمیم‌یافته، تحت تابع

Kuo[۱۷]
Dey[۱۸]
Iwasa[۱۹]
Moritani[۲۰]
Cohen[۲۱]
Blyth[۲۲]
Zellner[۲۳]
Rojo[۲۴]
Tanaka[۲۵]

زیان لاینکس را بررسی کرد و در سال ۲۰۱۰ به همراه تاتسوکاوا[۲۶] پذیرفتنی یا ناپذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی را به حالت نرمال چند متغیره تعمیم دادند.
اسپرینگ[۲۷] (۱۹۹۳) تابع زیان کراندار نرمال بازتابیده را معرفی نمود. بنابراین پذیرفتنی بودن براوردگرها تحت تابع زیان نرمال بازتابیده مورد توجه قرار گرفت و مطالعاتی نیز در این زمینه انجام پذیرفت. از آن جمله توحیدی و بهبودیان (a۲۰۰۱) براوردگر بیز میانگین توزیع نرمال یک متغیره را به دست آوردند و پذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی به فرم $c\overline{X}+d$ را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین توحیدی و بهبودیان (b۲۰۰۱) براوردگر بیز بردار میانگین و ماتریس واریانس-کواریانس در توزیع نرمال چند متغیره را به دست آورده و سپس پذیرفتنی بودن براوردگرهای خطی بردار میانگین تحت تابع زیان نرمال بازتابیده را بررسی کردند.

۴.۱ اهداف و فصل‌بندی

در این پایان‌نامه با در نظر گرفتن سه حالت مختلف برای تابع زیان یعنی تابع زیان توان دوم خطا، تابع زیان لاینکس و تابع زیان نرمال بازتابیده به بررسی براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی ترکیب خطی میانگین توزیع نرمال در دو حالت یک متغیره و چند متغیره خواهیم پرداخت.
در حالت یک متغیره به براورد میانگین جامعه نرمال یعنی θ، و در حالت چند متغیره به براورد ترکیب خطی از بردار میانگین جامعه، $\underline{\theta}=(\theta_۱,\theta_۲,..,\theta_n)$ به فرم $\underline{\varphi}'\underline{\theta}$ می‌پردازیم.
در حالت یک متغیره براوردگرهایی به فرم $c\overline{X}+d$ و در حالت چند متغیره براوردگرهایی به فرم $\underline{\gamma}'\underline{X}+K$ را در نظر می‌گیریم. هدف به‌دست آوردن شرایط لازم و کافی برای c و d در حالت یک متغیره و $\underline{\gamma}$ و K در حالت چند متغیره است تا براوردگرهایی به فرم $c\overline{X}+d$ و $\underline{\gamma}'\underline{X}+K$ به ترتیب برای θ و $\underline{\varphi}'\underline{\theta}$ تحت تابع زیان‌های مذکور پذیرفتنی شوند.
برای این منظور در فصل حاضر به بیان مسئله و پیشینه تحقیق پرداختیم و در ادامه براوردگر بیزی، براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی، روش‌های به دست آوردن هر کدام و در پایان

[۲۶] Tatsukawa
[۲۷] Spring

روش بیز حدی که مورد نیاز فصل‌های آتی می‌باشد را مطرح می‌کنیم. در فصل دوم به بررسی براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی میانگین توزیع نرمال یک متغیره و ترکیب خطی میانگین توزیع نرمال چند متغیره تحت تابع زیان توان دوم خطا خواهیم پرداخت. در فصل سوم با در نظر گرفتن تابع زیان لاینکس براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی تحت این تابع زیان را در حالت نرمال یک متغیره بررسی خواهیم نمود و نواحی که براوردگرهای خطی به فرم $c\overline{X}+d$ پذیرفتنی می‌باشد را مشخص می‌نماییم. در فصل چهارم تحت تابع زیان لاینکس نواحی پذیرفتنی و ناپذیرفتنی در حالت نرمال چند متغیره مورد بررسی قرار خواهد گرفت و در نهایت به بررسی براوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی تحت تابع زیان نرمال بازتابیده در فصل پنجم خواهیم پرداخت.

۵.۱ تصمیم آماری

نظریه تصمیم، همان‌گونه که از نام آن برمی‌آید، در باره تصمیم‌گیری، یعنی یکی از کارهای عمده روزانه انسان‌ها است. انسان‌های مسئول و منطقی، با علم و آگاهی، با در نظر گرفتن احتمال پیشامدها، با توجه به سود و زیان، تصمیم می‌گیرند و کاری را انجام می‌دهند.

تمام روش‌های استنباط آماری یک نوع تصمیم‌گیری می‌باشند و در آن‌ها به کمک نمونه‌های آماری و داده‌ها درباره پارامتر یا توزیع مجهول به تصمیم‌گیری می‌پردازیم. در نظریه تصمیم به کمک نمونه‌های آماری و دیگر جوانب، با بررسی مقدار سود و زیان می‌کوشیم تا به تصمیم بهینه دست یابیم.

در این بخش به بیان مختصری از نظریه تصمیم که از کتاب لی‌من و کسلا (۱۹۹۸) و برگر (۱۹۸۵) برگرفته شده است می‌پردازیم. قضیه‌های این بخش و بخش‌های آتی بدون اثبات می‌باشند که برای اثبات آن‌ها می‌توان به لی‌من و کسلا (۱۹۹۸) مراجعه نمود.

۱.۵.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه

در این زیر بخش به مفاهیم مورد نیاز در نظریه تصمیم اشاره کوتاهی خواهیم داشت. این مفاهیم عبارتند از:

داده‌ها: به اطلاعاتی که از جامعه به دست می‌آید داده گویند. داده‌ها به وسیله مقدار مشاهده شده‌ی $\underline{x}$ از یک بردار تصادفی $\underline{X}$ با فضای نمونه (مجموعه مقادیر) χ نشان داده می‌شوند.

وضع طبیعت : پارامتر واقعی و مجهول θ را که می‌خواهیم روی آن استنباط انجام دهیم، وضع طبیعت گویند.

فضای پارامتری : مجموعه تمام مقادیر ممکن θ را فضای پارامتری گویند و با نماد Θ نشان می‌دهند.

مدل: مجموعه کلیه توزیع‌های احتمال بردار تصادفی $\underline{X}$ که دارای پارامتر مجهول θ است، مدل می‌نامند و به صورت مجموعه‌ی $\{f(\underline{x}|\theta) : \theta \in \Theta\}$ نشان می‌دهند که در آن $f(\underline{x}|\theta)$ تابع چگالی احتمال یا تابع احتمال روی χ است.

فضای عمل : بعد از اینکه $\underline{X} = \underline{x}$ مشاهده گردید، تصمیمی برای θ اتخاذ می‌گردد. مجموعه کلیه تصمیم‌های ممکن را فضای عمل گویند و با نماد $\mathscr{A}$ نمایش می‌دهند و اعضای آن را با $a \in \mathscr{A}$ نشان می‌دهند.

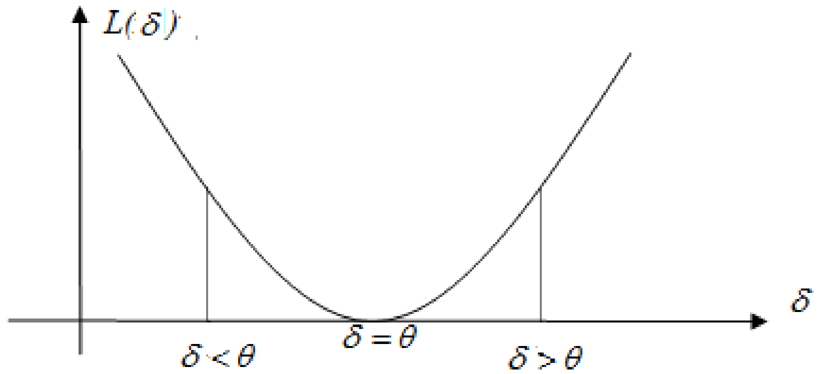
تابع زیان: اگر$\theta \in \Theta$ مقدار واقعی وضع طبیعت باشد در این صورت عمل $a \in \mathscr{A}$ ممکن است درست یا تا اندازه‌ای نادرست و یا کلا نادرست باشد. میزان این نادرستی را با کمیت تابع زیان $L(\theta,a)$ اندازه‌گیری می‌کنیم که تابع زیان، مقدار زیان به کار بردن عمل a موقعی که θ مقدار وضع طبیعت واقعی باشد را اندازه می‌گیرد. بنابراین $L : \Theta \times \mathscr{A} \to [۰, +\infty)$ و $L(\theta,a) = ۰$ به معنای این است که اگر θ وضع طبیعت واقعی است آنگاه a تصمیم درستی می‌باشد.

تابع تصمیم : تابع تصمیم (قاعده تصمیم) قاعده‌ای است که با مشاهده $\underline{X} = \underline{x}$ معین می‌کند که چه عمل $a \in \mathscr{A}$ را بایستی به کار ببریم و معمولا آن را با $\delta(\underline{x})$ نشان می‌دهند. بنابراین $\delta : \chi \to \mathscr{A}$.

فضای توابع تصمیم: مجموعه کلیه توابع تصمیم ممکن را با $\mathscr{D}$ نمایش می‌دهیم و به آن فضای توابع تصمیم گویند.
هنگامی که در تصمیم‌گیری از تابع تصمیم $\delta(\underline{X})$ برای تصمیم‌گیری در مورد پارامتر مجهول θاستفاده می‌کنیم تابع زیان حاصل به صورت $L(\theta,\delta(\underline{X}))$ در نظر گرفته می‌شود. چند تابع زیان که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد به همراه مختصری از خواص آن‌ها در زیر آمده است.

تابع زیان توان دوم خطا: در مباحث استنباط آماری متداول‌ترین تابع زیان مورد استفاده تابع زیان توان دوم خطاست. این تابع زیان به صورت زیر می‌باشد.

$$L(\theta,\delta(\underline{X}))=(\delta(\underline{X})-\theta)^2 \tag{۱.۵.۱}$$



شکل ۱.۱: تابع زیان توان دوم خطا

شکل۱.۱ تابع زیان توان دوم خطا را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۱.۱ ، این تابع زیان متقارن و اکیدا محدب است و جریمه یکسانی را به کم‌براورد کردن و بیش‌براورد کردن نسبت می‌دهد.

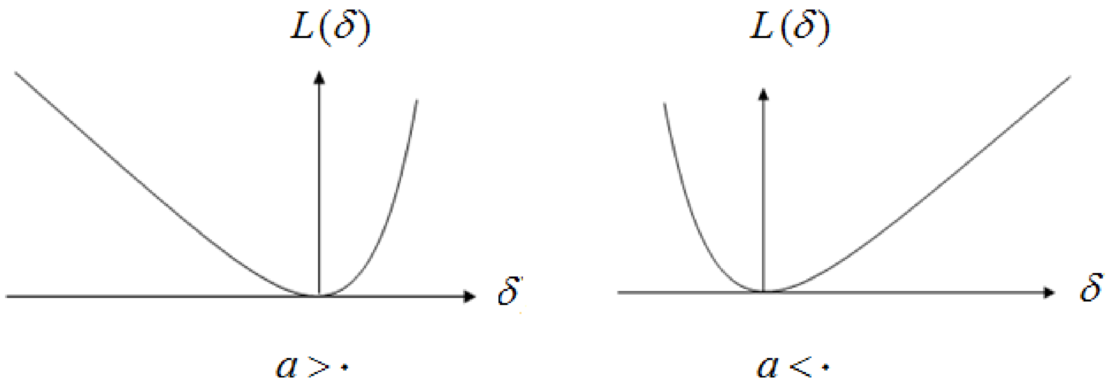
تابع زیان لاینکس: در برخی مسائل براوردیابی بیش (کم) براورد کردن دارای اهمیت بیشتری نسبت به کم (بیش) براورد کردن است. برای مثال در براورد میزان سوخت یک موشک بیش‌براورد کردن اهمیت زیادی نسبت به کم‌براورد کردن دارد و برای کم براورد کردن بایستی جریمه زیادی را متحمل شویم. در این حالت استفاده از تابع زیان متقارن جهت براوردیابی مناسب نیست و برای این منظور واریان (۱۹۷۵) تابع زیان نامتقارن لاینکس را به صورت

زیر معرفی کرد.

$$L(\theta,\delta(\underline{X})) = b\{exp(a(\delta(\underline{X})-\theta)) - a(\delta(\underline{X})-\theta) - ۱\} \quad (۲.۵.۱)$$

نمودار این تابع زیان در دو حالت $a > ۰$ و $a < ۰$ در شکل ۲.۱ رسم شده است.

این تابع زیان نامتقارن و نسبت به δ اکیدا محدب است و اگر $a > ۰$ $(a < ۰)$ باشد آنگاه



شکل ۲.۱: تابع زیان لاینکس

جریمه زیادتری را به بیش (کم) براوردکردن نسبت می‌دهد.

تابع زیان نرمال‌بازتابیده: اغلب تابع زیان‌های مورد استفاده در براوردیابی کراندار نیستند برای مثال تابع زیان‌های توان دوم خطا و لاینکس بی‌کران هستند. در برخی از مسائل براوردیابی نیاز به این است که تابع زیان، دارای یک کران بالا باشد. برای مثال در ارزیابی کیفیت یک کالا میزان زیان استفاده از یک کالا دارای یک مقدار ماکسیمم است. بنابراین بایستی تابع زیان دارای یک مقدار ماکسیمم و در نتیجه کراندار باشد. لذا در این مسائل استفاده از تابع زیان توان دوم خطا و لاینکس مناسب نیستند. اسپرینگ در سال ۱۹۹۳ نوعی تابع کراندار براساس فرم تابع چگالی نرمال معرفی نمود که به آن تابع زیان نرمال بازتابیده گویند و به فرم زیر می‌باشد

$$L(\theta,\delta(\underline{X})) = k(۱ - exp(-\frac{(\delta(\underline{X})-\theta)^{۲}}{۲\gamma^{۲}})) \quad (۳.۵.۱)$$

که در آن γ پارامتر شکل و $k > ۰$ ماکسیمم تابع زیان می‌باشد. این تابع زیان کراندار و متقارن است. نمودار این تابع زیان در شکل ۳.۱ رسم شده است. با توجه به شکل ۳.۱، نمودار این