دانشگاه تربیت معلم سبزوار
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

بعد در قاب‌های جبری

استاد راهنما:

دکتر علی‌اکبر استاجی

استاد مشاور:

دکتر غلامرضا مقدسی

نگارش:

زهره حاتمی کیا

مهر ماه ۱۳۸۸

تقدیم به

خانواده‌ام که قلب‌هایشان، رستاخیز همه‌ی خوبی‌ها است و

با تقدیر و تشکر از همه‌ی نیک اندیشانی که راهگشای اندیشه‌ام بوده‌اند.

تشکر و قدردانی

خداوند را سپاسگزارم که با یاری و دستگیری خود در پیمودن این راه دشوار راهنما و راهگشای من گردید و این توفیق را ارزانی داشت تا این پایان نامه را به پایان برسانم.

پس از آن بر اساس **من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق** بر خود واجب می‌دانم از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای **دکتر علی‌اکبر استاجی** سپاسگزاری کنم که در پیمودن این راه، گام به گام و مرحله به مرحله با یاری و راهنمایی ارزشمند خود چگونگی طیّ طریق را به من آموختند، همچنین از جناب آقای **دکتر غلامرضا مقدسی** که در این تحقیق مشاور من بوده‌اند به پاس یاری‌ها و راهنمایی‌هایشان سپاسگزارم. از اساتید بزرگوار جناب آقای **دکتر محمد مهدی ابراهیمی** و سرکار خانم **دکتر مژگان محمودی** که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، هم‌چنین از تمامی دوستانم که بی‌شک دل‌تنگ لحظات با هم بودنمان خواهم شد، کمال تشکر و قدردانی را به جای می آورم.

و سرانجام این سپاس‌نامه، تقدیر از عزیزی است که با تلاش و بردباری همیشگی خود، عشق و امید را به من هدیه داد تا توانستم این پژوهش را به پایان برسانم، همراهم، همسفرم، همسرم.

زهره حاتمی‌کیا

پاییز ۱۳۸۸

چکیده

در این نوشتار به طور ممتد به بررسی بعد در قاب‌های جبری می‌پردازیم. فرض کنیم L یک قاب جبری باشد. اگر عناصر اول $p_0, p_1, \ldots, p_k$ متعلق به L به قسمی باشند که $p_0 < p_1 < \ldots < p_k$، آن گاه ماکزیمم طول ممکن برای این زنجیر از عناصر اول L را در صورت وجود بعد L می‌نامیم. چنانچه این ماکزیمم نامتناهی باشد، قرار می‌دهیم $dim(L) = \infty$.

در این پایان نامه یک اثبات قابی $-$ تئوریکی برای محاسبه‌ی بعد L بر حسب خارج قسمت‌های کران داری ارائه می‌کنیم و در عین حال آن را به قاب‌هایی که لزوماً فشرده نیستند، عمومیت می‌دهیم. به علاوه این نتایج را برای قاب $\mathcal{C}_z(X)$ از $z-$ ایده‌آل‌های حلقه‌ی $C(X)$ که X فضایی تیخونوف و در صورت لزوم لیندلوف می‌باشد، به کار می‌بریم. اگر فضای X فشرده باشد، بعد $\mathcal{C}_z(X)$ حداکثر n است اگر و تنها اگر X پراکنده از $CB-$ اندیس حداکثر $n+1$ باشد و اگر X اجتماع توپولوژیکی از فضاهای X_i باشد، بعد $\mathcal{C}_z(X)$، سوپریمم بعد $\mathcal{C}_z(X_i)$ است. ایده‌ی اصلی این تحقیق از مقاله‌ی

$$Dimension in algebraic frames, II :$$
$$application to frames of ideals in C(X).$$

نوشته Jorge Martinez و Eric Zenk گرفته شده و با استفاده از سایر منابع سعی شده، اکثر مفاهیم به طور دقیق مورد بررسی قرار گیرد تا نتیجه‌ی مطلوب حاصل شود.

واژه‌های کلیدی: قاب فشرده، قاب متمم‌دار، قاب شبه‌متمم‌دار، قاب منظم، بعد یک قاب، $z-$ ایده‌آل، فضای پراکنده، گونه‌ی طبیعی از مجموعه‌های باز.

پیشگفتار

موضوع بعد در شبکه‌های توزیع‌پذیر که دارای کران بالا و پایین هستند، همچنین در قاب‌های جبری که عناصر فشرده‌ی آنها تحت مقطع دوتایی بسته‌اند، در سال‌های اخیر مورد توجه و بررسی بسیاری از علاقمندان و پژوهشگران قرار گرفته است.

محققین از دو دیدگاه متمایز به این موضوع می‌پردازند. از یک سو این موضوع در جبر مجرد با زمینه‌ای در جبر جابجایی مطرح می‌شود که در آن اصول و اصطلاحات منطق، کاربرد فراوانی دارد. در حال حاضر، محققین به این موضوع از نقطه نظر قابی – تئوریکی پرداخته‌اند که در زمینه‌ی گروه‌های شبکه‌ای مرتب [۱] یا f – حلقه‌ها [۲] می‌باشد.

مارتینز در مرجع [۱۱]، به بعد از دیدگاه قابی – تئوریکی می‌پردازد. در این نوشتار نیز هدف محاسبه‌ی بعد با استفاده از مجموعه‌های متناهی از عناصر فشرده یک قاب است. در منابع [۲] و [۳]، نویسندگان به بررسی بعد در شبکه‌های توزیع‌پذیر پرداخته و شرط مشابه‌ای را برای بعد متناهی ثابت می‌کنند. در واقع کوآند[۳]، لم باردی [۴] و روی [۵] در [۲] و [۳] مشخصه‌هایی را فرمول بندی می‌کنند که بعد را بر حسب خارج قسمت‌های کران داری توصیف می‌کند که در آن ابزاری متفاوت از مرجع [۱۱] برای محاسبه‌ی بعد ارائه می‌شود.

این پایان‌نامه مشتمل بر سه فصل است. در فصل اول، ابتدا مفاهیم مورد نیاز از نظریه شبکه‌ها را به اختصار بیان می‌کنیم و سپس قاب‌ها را معرفی کرده و انواع و ویژگی‌های آن‌ها، مانند قاب‌های فشرده، قاب‌های منظم و قاب‌های متمم‌دار را بیان می‌کنیم که بر اساس منابع [۱۰]، [۱۳]

[۱] lattice-ordered
[۲] f-rings
[۳] Coquand
[۴] Lombardi
[۵] Roy

و [۱۵] نوشته جورج مارتینز[٦] و اریک زینک[۷] است. در بخش‌های سوم و چهارم با مفاهیم بنیادی توپولوژی که مورد نیاز است، آشنا می‌شویم. در ادامه به معرفی حلقه‌ی $C(X)$ و بیان خواص اوّلیه‌ی آن می‌پردازیم. گفتنی است که در این فصل بعضی از قضیه‌ها بدون اثبات آورده شده، زیرا برهان آن‌ها به تفصیل در مرجع [۱] یافت می‌شود.

فصل دوم، مهم‌ترین قسمت این پایان نامه است که گزاره‌ها و قضایای اثبات شده در آن پایه‌ای برای اثبات‌های بعدی ما می‌باشد. در این فصل به نظر می‌رسد که ابزار محاسباتی بعد در قاب‌های جبری در درجه‌ی اول بر اساس عناصر فشرده بیان می‌شوند. قضیه‌ی ۲.۹ از مرجع [۲] و قضیه‌ی ۱.۴ از مرجع [۳]، را که به محاسبه‌ی بعد در قاب‌های وابسته پرداخته‌اند، گلچین کرده و در یک قضیه تحت عنوان [قضیه کوآند− لم باردی− روی] بیان می‌کنیم.

در فصل سوم، ابتدا قاب‌هایی از ایده‌آل‌ها را مطرح کرده و به محاسبه‌ی بعد در آن‌ها می پردازیم. در واقع انگیزه‌ی اصلی که ما را واداشت تا به محاسبه‌ی بعد بپردازیم، حس کنجکاوی در مورد قابی از $z-$ ایده‌آل‌های حلقه‌ی $C(X)$ از توابع حقیقی مقدار روی فضای تیخونوف X و همچنین اول‌های آن شبکه می‌باشد که در بخش سوم به‌طور کلی مفهوم $z-$ بعد توضیح داده شده است.

در بخش آخر از این فصل، فضای توپولوژیکی X را فشرده در نظر می‌گیریم. مختصراً فضاهای پراکنده را معرفی کرده و مشتقات کانتور − بندیکسون را مطرح می‌کنیم. هدف بیان قضیه‌ای است که نشان می‌دهد، اگر فضای X فشرده باشد، بعد $\mathcal{C}_z(X)$ حداکثر n است اگر و تنها اگر X پراکنده از $CB-$ اندیس حداکثر $n+1$ باشد

توجه داریم که در سر تاسر این پژوهش همه‌ی فضاهای توپولوژی تیخونوف در نظر گرفته می‌شوند، بجز در برخی موارد که این شرط ضروری نیست.

---

[٦] Jorge Martinez

[۷] Eric Zenk

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل ابتدا مفاهیم مورد نیاز از نظریه شبکه‌ها را بیان می‌کنیم و سپس به بیان مفاهیم کلی و تعاریف، نکات و قضایایی در مورد قاب‌ها می‌پردازیم که این مفاهیم در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱—۱ شبکه‌ها

در این بخش به اختصار به مطالعه تعاریف اولیه و بیان نتایجی از مجموعه‌های مرتب جزئی، شبکه‌ها و شبکه‌های توزیع‌پذیر می‌پردازیم.

تعریف ۱—۱.۱ : یک ترتیب جزئی روی مجموعه P، یک رابطه دوتایی $(\leq)$ روی P است، یعنی؛ یک زیر مجموعه از $P \times P$ است که خواص زیر را دارد:

۱) خاصیت انعکاسی: اگر $a \in P$، آن‌گاه $a \leq a$.

۲) خاصیت پاد متقارنی: اگر $a, b \in P$، $a \leq b$ و $b \leq a$، آن گاه $a = b$.

۳) خاصیت تعدی: اگر $a,b,c \in P$، $a \leq b$ و $b \leq c$، آن گاه $a \leq c$.

زوج $(P, \leq)$ را یک مجموعه‌ی مرتب جزئی می‌گوییم و چنانچه ابهامی پیش نیاید به اختصار می‌گوییم P یک مجموعه مرتب جزئی است.

فرض کنیم P یک مجموعه مرتب جزئی باشد. دو عنصر $c, d \in P$ را مقایسه پذیر گوییم، هرگاه $c \leq d$ یا $d \leq c$. یک مجموعه مرتب جزئی که هر دو عنصر آن مقایسه پذیر باشند را زنجیر می‌گوییم.

تعریف **۱—۲.۱** : فرض کنیم P یک مجموعه مرتب جزئی و $X \subseteq P$، عنصر $a \in P$ را **مقطع** یا **بزرگترین کران پایین** X گوییم، اگر

۱) a یک کران پایین برای X باشد، یعنی؛ برای هر $x \in X$، $a \leq x$.

۲) برای هر کران پایین b از X داشته باشیم، $b \leq a$.

مقطع X در صورت وجود یکتا می‌باشد و با $\bigwedge X$ نشان داده می‌شود.

به طور مشابه، عنصر $a \in P$ را **اتصال** یا **کوچکترین کران بالا برای** X گوییم، هرگاه

۱) a یک کران بالا برای X باشد، یعنی؛ برای هر $x \in X$، $a \geq x$.

۲) برای هر کران بالای b از X داشته باشیم، $b \geq a$.

اتصال X در صورت وجود یکتا می‌باشد و با $\bigvee X$ نشان داده می‌شود.

فرض کنیم P یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد، به انتفاً مقدم هر عنصر P کران بالای $\emptyset$ است. از این رو اگر P دارای کوچکترین عنصر باشد، آن گاه $\bigvee \emptyset$ برابر با آن می‌باشد. لذا نتیجه می‌گیریم که $\bigvee \emptyset$ وجود دارد اگر و تنها اگر P دارای کوچکترین عنصر باشد. ما $\bigvee \emptyset$ را در صورت وجود صفر می‌نامیم و با صفر نشان می‌دهیم. به طور مشابه، $\bigwedge \emptyset$ وجود دارد اگر و تنها اگر P دارای بزرگترین عنصر باشد. عنصر $\bigwedge \emptyset$ را در صورت وجود همانی(یکه) می‌نامیم و با ۱ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱ـ۱.۳ : مجموعه مرتب جزئی L را $\wedge$ ـ **نیم‌شبکه** گوییم، اگر برای هر زیر مجموعه متناهی X از L، $\bigwedge X$ وجود داشته باشد.

$\vee$ ـ نیم‌شبکه به صورت مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۱ـ۱.۴ : مجموعه‌ی مرتب جزئی L را که برای هر $a, b \in L$، $\bigvee\{a,b\} = a \vee b$ و $\bigwedge\{a,b\} = a \wedge b$ در L وجود داشته باشند را یک **شبکه** می‌نامیم و آن را با $(L, \leq, \vee, \wedge)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱ـ۱.۵ : اگر $(L, \leq, \vee, \wedge)$ یک شبکه باشد و $a, b, c \in L$، آن گاه داریم:

۱) $a \leq b$ اگر و تنها اگر $a \vee b = b$ اگر و تنها اگر $a \wedge b = a$.

۲) $a = a \wedge a = a \vee a$ (قانون خودتوانی).

۳) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ و $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ (قانون شرکت پذیری).

۴) $x \wedge (x \vee y) = x$ و $x \vee (x \wedge y) = x$ (قانون جذب).

برهان: با توجه به تعریف بدیهی است. $\square$

اگر عمل‌های دوتایی $\vee$ و $\wedge$ روی مجموعه‌ی L به قسمی تعریف شده باشند که گزاره‌های (۲) ,(۴) برقرار باشند و رابطه‌ی روی L را توسط (۱) تعریف کنیم، آن گاه $(L, \leq, \vee, \wedge)$ یک شبکه است. از این رو یک شبکه را با $(L, \vee, \wedge)$ نیز نمایش می‌دهیم، که رابطه‌ی آن توسط رابطه‌ی (۱) گزاره‌ی ۱ـ۱.۵، تعریف شده است.

فرض کنیم $(L, \vee, \wedge)$ و $(L^*, \vee^*, \wedge^*)$ شبکه باشند، گوییم $(L^*, \vee^*, \wedge^*)$ زیرشبکه‌ی $(L, \vee, \wedge)$ است، اگر $L^* \subseteq L$ و برای هر $a, b \in L^*$، $a \vee^* b = a \vee b$ و $a \wedge^* b = a \wedge b$. اگر ترتیب روی L و L^* را به ترتیب با $\leq$ و $\leq^*$ نشان دهیم، آن گاه برای هر $a, b \in L^*$ و $a \leq^* b$ اگر و تنها اگر $a \leq b$.

تعریف ۱—۶.۱ : اگر برای هر زیر مجموعه‌ی ناتهی D از شبکه‌ی $(L,\vee,\wedge)$، $\bigvee D$ و $\bigwedge D$ در L وجود داشته باشد، آن گاه $(L,\vee,\wedge)$ را **شبکه‌ی کامل** می‌نامیم.

قضیه ۱—۷.۱ : در شبکه L برای هر $X \subseteq L$، $\bigwedge X$ وجود دارد اگر و تنها اگر $\bigvee X$ وجود داشته باشد.

برهان: فرض کنیم $X \subseteq L$، $\bigwedge X$ وجود داشته باشد. همچنین، فرض می‌کنیم که K مجموعه‌ای از تمام کران‌های بالای X باشد. با توجه فرض، $\bigwedge K$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $a = \bigwedge K$. اگر $x \in X$، آن گاه برای هر $k \in K$، داریم $x \leq k$. بنابراین، $x \leq a$ و $a \in K$. پس، a کوچکترین کران بالای X است، یعنی؛ $a = \bigvee X$.
برعکس: فرض کنیم که $X \subseteq L$ و K مجموعه تمام کران‌های پایین X باشد. با استفاده از فرض، $\bigvee K$ وجود دارد. قرار می‌دهیم، $a = \bigvee K$. اگر $x \in X$، آن گاه برای هر $k \in K$، $k \leq x$. بنابراین، $a \leq x$ و $a \in K$. پس a بزرگترین عضو X است، یعنی؛ $a = \bigwedge X$. $\square$

مثال ۱—۸.۱ : فرض کنیم $\mathcal{P}(X)$ مجموعه‌ی توانی X باشد. واضح است $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است و اگر $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{P}(X)$، آن گاه $\bigvee A = \bigcup A$ و $\bigwedge A = \bigcap A$. بنابراین $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ شبکه‌ی کامل است.

لم ۱—۹.۱ : فرض می‌کنیم L یک شبکه باشد و $x,y,z \in L$. گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

۱) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

۲) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

۳) $(x \vee y) \wedge z \leq x \vee (y \wedge z)$.

آن گاه (۱)، (۲) و (۳) در هر شبکه‌ای، معادل می‌باشند. اگر در شبکه‌ای گزاره‌های (۱) یا (۲) یا هردو رابطه، برقرار باشند، آن گاه آن شبکه را شبکه‌ای توزیع‌پذیر می‌نامیم.

برهان: لم ۱۰ − ۴، از فصل اولِ مرجع [۷] را ببینید. □

مثال ۱—۱.۱۰ : فرض کنیم $\mathbb{N}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد. برای هر $m, n \in \mathbb{N}$، $m \leqslant n$ اگر و تنها اگر m، n را عاد کند. $\mathbb{N}$ با این رابطه شبکه‌ای توزیع‌پذیر با کران بالای ۱ می‌باشد که برای هر $m, n \in \mathbb{N}$، $m \vee n = (m, n)$ و $m \wedge n = [m, n]$.

تعریف ۱—۱.۱۱ : شبکه‌ی L را **متمم‌دار** نامند، اگر هر عنصر L دارای متمم باشد، یعنی؛ برای هر $x \in L$، عنصر $y \in L$ به قسمی وجود داشته باشد که $x \vee y = 1$ و $x \wedge y = 0$.

یک شبکه‌ی توزیع‌پذیرِ متمم دار را **جبر بول** می‌نامیم و با $(L, \vee, \wedge, ')$ نمایش می‌دهیم. هر عنصر x از یک جبر بول دارای یک متمم منحصر به فرد است، که آن را با x' نشان می‌دهیم.

مثال ۱—۱.۱۲ : برای مجموعه X، مجموعه توانی $P(X)$ به همراه رابطه شمول، جبر بول است که در آن $\vee$ و $\wedge$ به صورت اشتراک و اجتماع و همچنین ۰ و ۱ برابر با مجموعه تهی و X می‌باشند.

قضیه ۱—۱.۱۳ : اگر B یک جبر بول باشد، آن گاه برای $x, y, z \in B$، داریم:

۱) (قانون دمورگان) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ و $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

۲) $x \leqslant y \Leftrightarrow x' \geqslant y'$.

۳) $x \wedge y \leqslant z \Leftrightarrow x \leqslant z \vee y'$.

۴) $x \vee y \geqslant z \Leftrightarrow x \geqslant z \wedge y'$.

برهان: ۱) بنابرتوزیع‌پذیری B،

$$(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x \vee x' \vee y') \wedge (y \vee x' \vee y') = 1 \wedge 1 = 1$$
$$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = 0 \vee 0 = 0$$

لذا بنا بر منحصر به فردی متمم یک عنصر، نتیجه می‌شود که $(x' \vee y')$ متمم $(x \wedge y)$ است. قانون دیگر به طور مشابه اثبات می‌شود.

۲) داریم

$$\begin{aligned} x \leqslant y &\Leftrightarrow x \wedge y = x \\ &\Leftrightarrow x' \vee y' = x' && \text{بنا بر قانون دمورگان،} \\ &\Leftrightarrow y' \leqslant x'. \end{aligned}$$

۳) اگر $x \wedge y \leqslant z$، آن گاه

$$\begin{aligned} z \vee y' &\geqslant (x \wedge y) \vee y' \\ &= (x \vee y') \wedge (y \vee y') && \text{بنا بر قسمت دوم لم ۱—۱.۹،} \\ &= x \vee y' && \text{بنا بر تعریف متمم یک عنصر،} \\ &\geqslant x \end{aligned}$$

و اگر $x \leqslant z \vee y'$، آن گاه

$$\begin{aligned} x \wedge y &\leqslant (z \vee y') \wedge y \\ &= (z \wedge y) \vee (y' \wedge y) && \text{بنا بر قسمت اول لم ۱—۱.۹،} \\ &= z \wedge y && \text{بنا بر تعریف متمم یک عنصر،} \\ &\leqslant z. \end{aligned}$$

۴) برهان این قسمت، دوگان قسمت (۲) است. □

قضیه ۱—۱.۱۴ : در هر جبر بول کامل، قوانین توزیع‌پذیری نامتناهی برقرار است.

برهان: به وضوح $x \wedge (\bigvee_{i\in I} y_i) \geqslant \bigvee_{i\in I}(x \wedge y_i)$. برای اثبات عکس، فرض کنیم

$$z = \bigvee_{i\in I}(x \wedge y_i).$$

پس برای هر $i \in I$ داریم $x \wedge y_i \leqslant z$ و بنابراین، بنا بر قسمت (۳) قضیه‌ی ۱—۱.۱۳، $y_i \leqslant z \vee x'$. لذا $\bigvee_{i\in I} y_i \leqslant z \vee x'$ و در نتیجه، بنا بر قسمت (۳) قضیه‌ی ۱—۱.۱۳ دوباره

$$x \wedge (\bigvee_{i\in I} y_i) \leqslant z = \bigvee(x \wedge y_i).$$

قانون دیگر به طور مشابه اثبات می‌شود. □

تعریف ۱—۱.۱۵ : فرض می‌کنیم L یک شبکه باشد و $p \in L$. عنصر p را **اول** گوییم، اگر $p < 1$ و از $x \wedge y \leqslant p$ نتیجه شود که $x \leqslant p$ یا $y \leqslant p$. مجموعه‌ی تمام عناصر اول L را با $Spec(L)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱—۱.۱۶ : $p \in L$ را $\wedge$ — **تحویل ناپذیر** [۱] می‌گوییم، هرگاه از $x \wedge y = p$ نتیجه شود که $x = p$ یا $y = p$.

نتیجه ۱—۱.۱۷ : اگر L شبکه‌ای توزیع‌پذیر باشد، $p \in L$ اول است اگر و تنها اگر p $\wedge$ — تحویل ناپذیر باشد.

برهان: فرض کنیم p اول باشد، از اینکه $x \wedge y = p$ داریم $y \leqslant p$ یا $x \leqslant p$. حال اگر $x \leqslant p$ پس $x \vee p = p$ یا $x \vee (x \wedge y) = p$ که با توجه به قانون جذب، بایستی $x = p$. به همین طریق می‌توان نشان داد که اگر $y \leqslant p$ آن گاه $y = p$، لذا p $\wedge$ — تحویل ناپذیر است.

برعکس، فرض کنیم p $\wedge$ — تحویل ناپذیر باشد و $x \wedge y \leqslant p$. پس $(x \wedge y) \vee p = p$ که بنا بر قانون توزیع‌پذیری داریم $(x \vee p) \wedge (y \vee p) = p$. حال بنابه فرض بایستی $y \vee p = p$ یا $x \vee p = p$. به عبارتی، $y \leqslant p$ یا $x \leqslant p$. بنابراین p اول است. □

تعریف ۱—۱.۱۸ : اگر L و M، $\vee$ — نیم‌شبکه باشند، نگاشت $f : L \to M$ را $\vee$ — **ریختی** گوییم، اگر برای هر $x, y \in L$،

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$\wedge$ — **ریختی** نیز به طریق مشابه تعریف می‌شود. حال اگر L و M هر دو شبکه باشند، $f : L \to M$ را ریخت شبکه‌ای گوییم، اگر $\vee$ — ریختی و $\wedge$ — ریختی باشد.

[۱] meet-irreducible

به علاوه، نگاشت f را $\vee$ — **ریختی کامل** گوییم، اگر برای هر خانواده‌ی $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ از عناصر L به قسمی که $\bigvee_{\alpha\in I} x_\alpha$ در L وجود داشته باشد، $\bigvee_{\alpha\in I} f(x_\alpha)$ نیز در M موجود باشد و

$$f(\bigvee_{\alpha\in I} x_\alpha) = \bigvee_{\alpha\in I} f(x_\alpha)$$

تعریف ۱—۱۹.۱ : شبکه‌های $L_۱$ و $L_۲$ را که دارای بزرگترین و کوچکترین عنصر هستند در نظر می‌گیریم. تابع $f : L_۱ \longrightarrow L_۲$ را **همریختی شبکه‌ای** گوییم، هرگاه

۱) $f(\circ) = \circ$ و $f(۱) = ۱$.

۲) برای هر $x, y \in L$، $f(x\wedge y) = f(x)\wedge f(y)$ و $f(x\vee y) = f(x)\vee f(y)$.

همریختی شبکه‌ای دوسویی را یکریختی گوییم.

۱—۲ قاب‌ها

در این قسمت فرض می‌کنیم که L یک شبکه‌ی کامل باشد که دارای بزرگترین و کوچکترین عنصر است. بزرگترین عنصر و کوچکترین عنصر L را به ترتیب با ۱ و ∘ نشان می‌دهیم. همچنین برای هر $x \in L$، مجموعه عناصری از L را که کوچکتر مساوی (بزرگتر مساوی) x باشند، با $\downarrow x$ ($\uparrow x$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۱—۱.۲ : شبکه‌ی L را یک قاب می‌نامیم، در صورتی که برای هر $S \subseteq L$ و $x \in L$،

۱) $\bigvee S$ در L وجود داشته باشد.

۲) قانون توزیع‌پذیری نامتناهی زیر برقرار باشد

$$x \wedge (\bigvee S) = \bigvee_{s\in S} (x \wedge s).$$

مثال ۱—۲.۲ : هر شبکه توزیع‌پذیر متناهی یک قاب می‌باشد، زیرا در این حالت تمام اتصال‌ها متناهی می‌باشند.

گزاره ۱—۳.۲ : اگر شبکه L یک زنجیر کامل باشد، آن‌گاه L یک قاب است.

برهان: نشان می‌دهیم که قانون توزیع‌پذیری نامتناهی $x \wedge (\bigvee S) = \bigvee_{s\in S}(x \wedge s)$ روی L برقرار است. فرض کنیم $\emptyset \neq S \subseteq L$ و $x < \bigvee S$. پس $s \in S$ به قسمی وجود دارد که $x < s$ و بنابراین $x \wedge s = x$. در نتیجه

$$x \wedge (\bigvee S) = x = \bigvee_{s\in S}(x \wedge s)$$

حال فرض می‌کنیم $\bigvee S \leq x$. پس برای هر $s \in S$، $s \leq x$ و بنابراین $x \wedge s = s$. از این رو

$$x \wedge (\bigvee S) = \bigvee S = \bigvee_{s\in S}(x \wedge s).$$

□

تعریف ۱—۴.۲ : عنصر $c \in L$ **فشرده** است، اگر برای هر گردایه‌ی $\{x_i\}_{i\in I}$ که $c \leq \bigvee_{i\in I} x_i$، آن گاه زیر مجموعه متناهی F از I به قسمی وجود داشته باشد که $c \leq \bigvee_{i\in F} x_i$.

مجموعه‌ی تمام عناصر فشرده L را با $\xi(L)$ نمایش می‌دهیم. اگر عنصر ۱ فشرده باشد، آن گاه L را شبکه‌ای فشرده می‌گوییم.

تعریف ۱—۵.۲ : قاب L را **جبری** گوییم، در صورتی که برای هر $x \in L$، زیرمجموعه $S \subseteq \xi(L)$ به قسمی وجود داشته باشد که $x = \bigvee S$.

تعریف ۱—۶.۲ : اگر برای هر $a, b \in \xi(L)$ داشته باشیم $a \wedge b \in \xi(L)$، گوییم L دارای **خاصیت اشتراک متناهی** (FIP [۲]) است.

[۲] *finite intersection property*

گزاره ۱—۷.۲ : $\xi(L)$ همواره تحت اتصال متناهی، بسته است.

برهان: فرض کنیم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عناصری فشرده باشند و $S \subseteq L$ به قسمی باشد که

$$(\bigvee_{i=1}^{n} x_i) \subseteq \bigvee S.$$

در این صورت، برای هر i داریم $x_i \leq \bigvee S$ و در نتیجه $B_i \subseteq S$ به قسمی وجود دارد که $|B_i| < \infty$ و همچنین $x_i \leq \bigvee B_i$. اگر قرار دهیم $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \subseteq S$، آن گاه $\bigvee_{i=1}^{n} x_i \leq \bigvee B$، زیرا

$$(\bigvee_{i=1}^{n} x_i) \leq \bigvee_{i=1}^{n} (\bigvee B_i) \leq \bigvee (\bigvee_{i=1}^{n} B_i) = \bigvee B.$$

پس $\xi(L)$ تحت اتصال متناهی بسته است. □

تعریف ۱—۸.۲ : اگر L شبکه‌ای فشرده و دارای ویژگی اشتراک متناهی باشد، آن گاه L را **وابسته**[۳] می‌نامیم.

گزاره ۱—۹.۲ : فرض کنیم L یک قاب جبری باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱) $p \in L$ اول است.

۲) برای هر $a, b \in \xi(L)$ از $a \wedge b \leqslant p$ نتیجه شود که $a \leqslant p$ یا $b \leqslant p$.

برهان : از ۲ ⇐ ۱) بدیهی است.

۱ ⇐ ۲) از آنجا که قاب L جبری است، پس $\{a_j\}, \{b_i\} \in \xi(L)$ به قسمی وجود دارند که $x = \bigvee_{j \in J} a_j$ و $y = \bigvee_{i \in I} b_i$. حال اگر فرض کنیم که $x \wedge y \leqslant p$ و فرض کنیم که $\bigvee a_j \nleqslant p$ و $\bigvee b_i \nleqslant p$، پس $i_\circ, j_\circ$ به قسمی وجود دارند که $a_{j_\circ} \nleqslant p$ و $b_{i_\circ} \nleqslant p$. واضح است که

$$(\bigvee_{j \in J} a_j) \wedge (\bigvee_{i \in I} b_i) = \bigvee_{j,i} (a_j \wedge b_i) \leqslant p \qquad (۱)$$

پس برای هر i, j داریم $a_j \wedge b_i \leqslant p$. در نتیجه $a_{j_\circ} \leqslant p$ یا $b_{i_\circ} \leqslant p$ که این یک تناقض است، پس بایستی $x \leqslant p$ یا $y \leqslant p$. □

[۳] coherent

تعریف ۱—۱۰.۲ : اگر L یک قاب باشد، برای هر $a,b \in L$، $a \to b$ رابه صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a \to b = \bigvee\{x \in L \mid a \wedge x \leqslant b\}$$

و $a \to 0 = \bigvee\{x \in L \mid a \wedge x = 0\}$ را با a^* نشان می‌دهیم. در واقع a^* بزرگترین عنصر مجموعه‌ی $\{x \in L \mid a \wedge x = 0\}$ است.

تعریف ۱—۱۱.۲ : زیرمجموعه غیر تهی D از مجموعه مرتب جزئی p را **جهت‌دار** گوییم، در صورتی که برای هر $a,b \in D$، $c \in D$ به قسمی وجود داشته باشد که $a \leq c$ و $b \leq c$.

تعریف ۱—۱۲.۲ : شبکه L را در نظر می‌گیریم. عنصر $a \in L$ را **شبه‌متمم‌دار** [۴] گوییم، اگر مجموعه‌ی $\{x \in L \mid a \wedge x = 0\}$ دارای بزرگترین عنصر باشد که آن را با a^* نمایش می‌دهیم (مشابه تعریف ۱ – ۱۰.۲). واضح است که $0^* = 1$ و $1^* = 0$.

گزاره ۱—۱۳.۲ : اگر L یک قاب باشد، آن گاه هر عنصر متعلق به L، شبه‌متمم‌دار است.

برهان: فرض کنیم $a \in L$. چون L یک قاب است، پس $t = \bigvee\{x \in L \mid x \wedge a = 0\}$ وجود داشته ومتعلق به L است. از طرفی

$$a \wedge t = \bigvee_{x \wedge a = 0} a \wedge x = 0$$

چون t بزرگترین عنصر مجموعه $\{x \in L, \, x \wedge a = 0\}$ می‌باشد، پس $t = a^*$. $\square$

قضیه ۱—۱۴.۲ : فرض کنیم L یک شبکه توزیع‌پذیر و شبه‌متمم‌دار باشد. در این صورت برای هر $a,b \in L$، گزاره‌های زیر بر قرار می‌باشند:

۱) $a \leq a^{**}$.

---

[۴] $pseudocompletment$

۲) اگر $a \leq b$، آن گاه $b^* \leq a^*$.

۳) $a^* = a^{***}$.

۴) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$.

۵) $a^* \vee b^* \leq (a \wedge b)^*$.

برهان: ۱) از اینکه $a \wedge a^* = 0$ و بنا بر تعریف شبه‌متمم برای a^*، بایستی $a \leq a^{**}$.

۲) اگر $a \leq b$، چون $b \wedge b^* = 0$، پس $a \wedge b^* = 0$. لذا، بنا بر تعریف a^* داریم $b^* \leq a^*$.

۳) با توجه به (۱) داریم، $a \leq a^{**}$ و از (۲) نتیجه می‌شود که $a^* \geq a^{***}$. همچنین با استفاده مستقیم از (۱) داریم، $a^* \leq a^{***}$. بنابراین $a^* = a^{***}$.

۴) می‌دانیم که $a \leq a \vee b$ و $b \leq a \vee b$. آن گاه با توجه به قسمت (۲)، $(a \vee b)^* \leq a^*$ و $(a \vee b)^* \leq b^*$. در نتیجه $(a \vee b)^* \leq a^* \wedge b^*$.

برعکس، می‌دانیم که $a^* \wedge b^* \leq a^*$ و $a^* \wedge b^* \leq b^*$. آن گاه با استفاده از قسمت‌های (۱) و (۲)، داریم $a \leq (a^* \wedge b^*)^*$ و $b \leq (a^* \wedge b^*)^*$. در نتیجه $a \vee b \leq (a^* \wedge b^*)^*$. پس،

$$(a^* \wedge b^*)^{**} \leq (a \vee b)^*.$$

بنابراین با استفاده از (۱) داریم، $a^* \wedge b^* \leq (a^* \wedge b^*)^{**} \leq (a \vee b)^*$ و در نتیجه حالت عکس نیز بر قرار می‌باشد.

۵) می‌دانیم $a \wedge b \leq a$ و $a \wedge b \leq b$. حال با استفاده از قسمت (۲)،

$$a^* \leq (a \wedge b)^* \quad \text{و} \quad b^* \leq (a \wedge b)^*$$

بنابراین $a^* \vee b^* \leq (a \wedge b)^*$. □