وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

بررسی نتایجی در مونوپولی و اتحاد تهاجمی گراف‌ها

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

زهره بابائی جیرنده

استاد راهنما: **دکتر منوچهر ذاکر**

مهر ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

دستان پر تلاش پدرم،

آغوش پر مهر مادرم،

و شانه‌های استوار برادرم؛ علی رضا

// تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش پروردگار یکتا را که درهای علم را بر ما گشود و فرصتی عطا فرمود تا بدان، خویش را در طریق علم و معرفت بیازماییم.
با کدامین کلمات می‌توانم سپاسگزار و قدردان زحمات بی‌شائبه‌ی اولین آموزگارانم باشم؟ پدر و مادری که از زندگی‌شان گذشتند تا راه و رسم زندگی را به من بیاموزند و بی شک اگر امروز موفقیتی حاصل شده، نتیجه‌ی زحمات بی دریغ این دو عزیز است. همچنین برادر عزیزم که همواره پشتیبان و مشوق من در تمام مراحل زندگی بوده است. سپاس ویژه‌ام را تقدیم به خانواده‌ام می‌کنم که همواره به داشتنشان می‌بالم و حضورشان، بزرگترین دل‌گرمی زندگی‌ام است.
از استاد بزرگوار، آقای دکتر منوچهر ذاکر سپاسگزارم که زحمت راهنمایی و هدایت من در این مسیر پر فراز و نشیب را بر عهده داشتند و بدون مساعدت ایشان، قطعا این مجموعه به ثمر نمی‌نشست.
از محبت‌های بی‌دریغ دوست خوبم، سرکار خانم ناهیده اسدی که بی هیچ چشم‌داشتی مرا یاری کردند، سپاسگزارم و برایشان بهترین‌ها را آرزو می‌کنم.
ار تمام اساتیدی که در این مقطع افتخار شاگردیشان را داشتم، متشکرم. همچنین از دوستان عزیزی که بیش از دو سال را در کنارشان زندگی کردم و خاطرات بسیار زیبایی را برایم رقم زدند، متشکرم. به ویژه دوستان خوبم: زهرا زارعی، آسیه دوگونچی، مهشید شمس، فرشته حبیبی، زهرا مرادی، دنیا اسماعیل‌پور و جمیله پاکیزه‌خو.
از اساتید محترم دکتر طاهرخانی، دکتر خدایی‌فر، و سرکار خانم دکتر موسوی از دانشگاه زنجان که زحمت داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند، نیز کمال سپاس را دارم.
در پایان، امیدوارم همگی این بزرگواران، سپاس کوچک مرا پذیرا باشند.

چکیده

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف ساده باشد. مجموعه‌ی $S\subseteq V$ را اتحاد تهاجمی گوییم، هرگاه برای هر راس در $N(S)\backslash S$، داشته باشیم $\big|N[v]\cap S\big|\geqslant\big|N[v]\backslash S\big|$. همچنین مجموعه‌ی S را اتحاد تهاجمی فراگیر گوییم، هرگاه شرط فوق برای هر راس در $V\backslash S$ برقرار باشد. یافتن یک اتحاد تهاجمی فراگیر در گراف، یک مساله‌ی $\mathcal{NP}$ -سخت است. بنابراین برای به‌دست آوردن پارامترهای اتحاد تهاجمی فراگیر یعنی $\gamma_o(G)$ و $\gamma_{\hat{o}}(G)$، نیاز داریم تا کرانهایی بر حسب پارامترهای گوناگون گراف از جمله تعداد راس‌ها، تعداد یالها، عدد استقلال، عدد احاطه‌گری، شعاع طیفی لاپلاسین، و ...داشته باشیم. به‌دست آوردن این کرانها و بهبود کرانهای اولیه، هدف اصلی فصل‌های دوم، سوم، و چهارم است. فصل نهایی این پایان‌نامه، به مفهومی تحت عنوان مونوپولی اختصاص می‌یابد. مجموعه‌ی $D\subseteq V$ را مونوپولی گوییم، هرگاه هر راس $v\in V\backslash D$، حداقل $deg(v)/۲$ همسایه در D داشته باشد. همچنین مجموعه‌ی D را مونوپولی اکید گوییم اگر D یک مونوپولی باشد و هر راس زوج در $V\backslash D$، حداقل $(deg(v)+۱)/۲$ همسایه در D داشته باشد. مونوپولی اکید، همان اتحاد تهاجمی فراگیر است. همچنین ثابت می‌کنیم مطالعه‌ی مونوپولی اکید در گراف‌ها، به راحتی به مطالعه‌ی مونوپولی در گراف‌ها، کاهش می‌یابد. در سایر بخش‌های این فصل، کرانهایی برای پارامترهای مونوپولی بر حسب عدد تطابق و اندازه‌ی کمر گراف، ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: *اتحاد تهاجمی، اتحاد تهاجمی فراگیر، مونوپولی، مونوپولی اکید*

فهرست

لیست تصاویر

پیش‌گفتار

در دنیای اطراف ما، وضعیت‌های فراوانی وجود دارند که می‌توان توسط نموداری متشکل از یک مجموعه‌ی نقاط، به‌علاوه‌ی خطوطی که برخی از این نقاط را به یکدیگر متصل می‌کنند، به توصیف آنها پرداخت. در این‌گونه نمودارها، آنچه بیشتر مورد توجه است این است که آیا دو نقطه‌ی داده شده، به‌وسیله‌ی یک خط به یکدیگر متصل هستند یا نه و طریقه‌ی اتصال آنها اهمیتی ندارد. تجرید ریاضی این وضعیت‌ها، به مفهوم گراف منتهی می‌شود. پیشرفت‌های اخیر در ریاضیات، به‌ویژه در کاربردهای آن، موجب گسترش چشمگیر نظریه‌ی گراف شده است به گونه‌ای که هم‌اکنون ابزار بسیار مناسبی برای تحقیق در زمینه‌های گوناگون مانند نظریه‌ی کدگذاری، علوم رایانه‌ای، شبکه‌های اجتماعی، و سایر زمینه‌ها گردیده است.

با رشد علوم رایانه‌ای و شبکه‌های اجتماعی در دهه‌های اخیر، مفهوم جدیدی با عنوان مجموعه‌های احاطه‌گر، وارد نظریه‌ی گراف شده است. به دلیل اهمیت مجموعه‌های احاطه‌گر در بسیاری از مسائل، ریاضیدانان بر آن شدند تا شرط احاطه‌گری را در گراف‌ها، قوی‌تر کنند و نام اتحاد تهاجمی را برای آن برگزیدند. هم‌اکنون علوم رایانه‌ای بیشترین بهره را از اتحاد تهاجمی می‌برد. اولین کاربرد این مفهوم جدید، در *سیستم‌های قدرت تحمل نقص*[۱] است. این سیستم‌ها، حول پنداره‌ی قدرت تحمل نقص، طراحی شده‌اند. در حقیقت، دستگاه‌های مجهز به این سیستم باید قادر باشند هنگامی‌که در سیستم نقص وجود دارد، به کار خود در سطح مطلوبی ادامه دهند. مهم‌ترین کاربرد این سیستم‌ها، در ماهواره‌ها و کاوشگرهای فضایی ناسا[۲] است. یک گسترش مهم از کاربرد این سیستم، $LLNM$[۳] (به معنای زندگی طولانی، بدون نگهداری) است که در سال ۱۹۶۰ توسط ناسا انجام گرفت. کاربردهای دیگر

۱ fault-tolerant computer system

۲ National Aeronautice and Space Administration (NASA)

۳ Long Life, No Maintenane

شامل شبکه‌های توزیعی[۱]، پایگاه داده توزیعی[۲]، تخصیص منابع[۳]، و تشخیص عیب در سطح سیستم[۴] است.

مساله‌ی یافتن اتحاد تهاجمی در گراف، به *مساله‌ی تقسیم‌بندی غیر دوستانه‌ی گراف* مرتبط است. مساله‌ی تقسیم‌بندی غیر دوستانه در گراف، نخستین بار توسط آهارونی[۵] و همکاران در [۱] و همچنین تحت نام دیگری، توسط لوبی[۶] در [۲۰] معرفی شد. هدف این مساله، تقسیم‌بندی مجموعه‌ی راس‌ها به دو مجموعه است به‌طوری‌که هر راس، اکثر همسایه‌هایش در مجموعه‌ی مقابل باشد. اگر شرط اکثریت را به اکثریت محض همسایه‌ها تغییر دهیم، آن‌گاه این مساله، یک تقسیم‌بندی به دو مجموعه‌ی اتحاد تهاجمی است. (البته این تقسیم‌بندی همواره وجود ندارد.) اما یک تقسیم‌بندی غیر دوستانه، به‌سادگی با ماکزیمم کردن تعداد یالهای بین دو مجموعه، حل می‌شود. (مرجع [۲۶] را ببینید.) نسخه‌ی *دوستانه‌ی* این تقسیم‌بندی در مراجع [۱۴، ۲۵] مطالعه شده است. طبق آنچه در [۱۶] آمده، این مفهوم برابر با *اتحاد تدافعی* است. اتحاد تدافعی مجموعه‌ی S از راس‌های گراف است که برای هر راس v در S، اکثریت همسایه‌های آن راس در خود S باشند و یا به‌عبارت دیگر $|N_{V\setminus S}(v)| \leqslant |N_S(v)| + 1$.

در این پایان‌نامه به بررسی و مطالعه‌ی اتحاد تهاجمی و مونوپولی در گراف‌ها می‌پردازیم. فصل اول دربرگیرنده‌ی تعاریف، مفاهیم اولیه، و قضایایی است که در فصل‌های آتی از آنها استفاده شده است. فصل دوم اختصاص به معرفی اتحاد تهاجمی دارد. در این فصل، نشان می‌دهیم مساله‌ی یافتن اتحاد تهاجمی در یک گراف، یک مساله‌ی $\mathcal{NP}$-سخت است. بنابراین کرانهایی را برای عدد اتحاد تهاجمی گراف، بر حسب پارامترهای گوناگون گراف، به‌دست می‌آوریم. این فصل به بررسی کامل تحقیقات

---

۱ Distributed Networks

۲ Distributed Database

۳ Resource Allocation

۴ System-level Diagnosis

۵ Aharoni

۶ Lubi

فاوارون[1] و همکاران در [۸] می‌پردازیم.

به دلیل اهمیت اتحاد تهاجمی فراگیر، فصل سوم را به معرفی و ارائه‌ی کرانهای بالا و پایین متفاوت برای پارامترهای اتحاد تهاجمی فراگیر، اختصاص می‌دهیم. سپس رابطه‌ی اتحاد تهاجمی فراگیر و زیرگراف‌های همبند را می‌سنجیم. این مباحث، نتایج کارهای سیگارتا[2] و رودریگز[3] برگرفته از مقالات [۲۳، ۲۴] است. در نهایت، رابطه‌ی اتحاد تهاجمی فراگیر و احاطه‌گر مستقل را که از تحقیقات فاوارون در [۹] است، بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم، حین ارائه‌ی کران برای پارامترهای اتحاد تهاجمی فراگیر، می‌بینیم با محدود کردن کرانها به برخی کلاس‌های خاص، نتایج بهتری عایدمان می‌شود. از این‌رو، فصل چهارم را به بررسی اتحاد تهاجمی فراگیر در برخی کلاس‌های خاص از گراف‌ها، اختصاص می‌دهیم. سه کلاس در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند. کلاس درخت‌ها که برگرفته از مقالات [۴–۶] نوشته‌ی چلالی[4] و همکاران است. بخش دوم گراف‌های دوبخشی از تحقیق چلالی که در مقاله‌ی [۷] به چاپ رسیده است، استفاده می‌شود و در بخش آخر، کلاس گراف‌های ۳-منتظم را بررسی می‌کنیم. این بخش را به ارائه‌ی نتایج به‌دست آمده از مقاله‌ی [۲۲] نوشته‌ی رودریگز و سیگارتا اختصاص می‌دهیم.

فصل پنجم این پایان‌نامه، به معرفی مفهومی کاملا یکسان، با اتحاد تهاجمی فراگیر تحت نام مونوپولی اکید در گراف‌ها می‌پردازیم. این فصل به بررسی کامل نتایج حاصل از تحقیقات کاوه خوشخواه و همکاران در مقاله‌ی [۱۵] اختصاص می‌یابد.

---

[1] Favaron

[2] Sigarreta

[3] Rodríguez

[4] Chellali

فصل اول

نظریه‌ی گراف

۱.۱ مقدمه‌ای بر نظریه‌ی گراف

در اوایل قرن هجده، بین مردم شهر کونیگسبرگ[۱] سوال جالبی مطرح بود که تا آن زمان کسی نتوانسته بود پاسخی برای آن پیدا کند. رودخانه‌ی پرگولیا[۲] از وسط این شهر عبور می‌کرد و هفت پل چنانچه در شکل زیر نشان داده شده، بر روی این رودخانه در شهر وجود داشت. سوال این بود که آیا شخصی می‌تواند از نقطه‌ای در شهر شروع کرده و با عبور از روی هر پل و دقیقا یک بار انجام این عمل، دوباره به نقطه‌ی شروع بازگردد یا خیر.

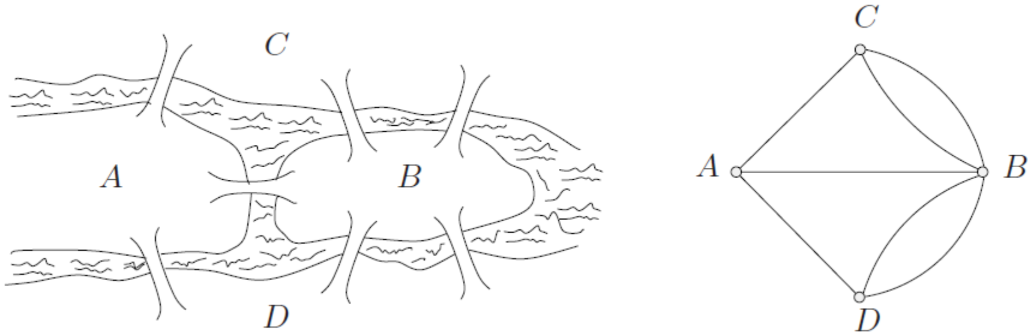
افراد بسیاری جهت یافتن جوابی برای این سوال، تلاش می‌کردند ولی به نتیجه‌ای نمی‌رسیدند تا اینکه در سال ۱۷۳۶، لئونارد اویلر[۳] به این سوال پاسخ داد و ثابت نمود انجام چنین کاری غیرممکن است و این مساله به «*مساله‌ی پلهای کونیگسبرگ*» معروف شد و این، آغازی بر نظریه‌ی گراف بود. مقاله‌ی

[۱] Königsberg

[۲] Pregolya

[۳] Leonard Euler

اویلر در رابطه با این مساله، اگر چه به زبان نظریه‌ی گراف نبود اما اغلب آن را به عنوان اولین مقاله در نظریه‌ی گراف مورد توجه قرار می‌دهند.



شکل ۱.۱: اولین مساله‌ی گراف

۱.۱.۱ گراف‌ها و زیرگراف‌ها

در این پایان‌نامه، گراف‌ها را با $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم که در آن V یک مجموعه‌ی دلخواه و ناتهی است و E مجموعه‌ای از زوجهای بدون ترتیب از عناصر V است. اعضای V را **راس** و عناصر E را **یال** می‌نامیم. هم‌چنین همه‌ی گراف‌ها در این پایان‌نامه متناهی، بدون طوقه، بدون یال چندگانه، بدون یال جهتدار، و به عبارت دیگر ساده در نظر گرفته می‌شوند. گرافی چون H را **زیرگرافِ** گراف G گوییم و با نماد $H \subseteq G$ نشان می‌دهیم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. اگر V' زیر مجموعه‌ای ناتهی از V باشد، زیرگرافی از G که مجموعه‌ی راس‌های آن، V' و مجموعه‌ی یالهای آن برابر یالهایی از G باشد به‌طوری‌که هر دو سر آن یالها در V' است، با نماد $G[V']$ نشان داده می‌شود و **زیرگراف القایی** G خوانده می‌شود.

به دو راس در یک گراف، **مجاور** گفته می‌شود هرگاه آن دو راس توسط یک یال به هم متصل باشند. نیز به دو یال در یک گراف، مجاور گفته می‌شود هرگاه این دو یال در یکی از نقاط انتهایی خود مشترک باشند. اگر راسی چون x به راسی چون y توسط یالی در گراف G متصل باشد گوییم x، **همسایه‌ی** y و y همسایه‌ی x است. مجموعه‌ی همسایه‌های راس x در گراف G را با $N_G(x)$ نمایش می‌دهیم.

لازم به ذکر است، $N_G(x)$ را به اختصار با $N(x)$ نیز نمایش می‌دهیم. هم‌چنین، تعریف می‌کنیم $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. اگر مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ای از راس‌های گراف G باشد، آن‌گاه $N_G(A)$ مجموعه‌ی همسایه‌های تمام راس‌های موجود در مجموعه‌ی A است.

به تعداد یالهایی که با یک راس مانند v در گراف G برخورد دارند، درجه‌ی راس v می‌گویند و با $deg(v)$ نشان می‌دهند. مینیمم و ماکزیمم درجه در گراف G به ترتیب با نمادهای $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان داده می‌شوند. اگر درجه‌ی راسی زوج باشد، آن را یک **راس زوج** و اگر فرد باشد، آن را یک **راس فرد** می‌گویند. راسی با درجه‌ی صفر را راس **ایزوله** (یا تنها) و راسی با درجه‌ی یک را **برگ** می‌نامند. یک گراف را **زوج** گوییم هرگاه درجه‌ی تمام راس‌های آن زوج باشد. گرافی چون G را d **-منتظم** نامیم هرگاه درجه‌ی همه‌ی راس‌های آن برابر d باشد و آن را **منتظم** گوییم اگر عددی چون d وجود داشته باشد به‌طوری‌که گراف G، d-منتظم باشد. یک **یکریختی** از گراف ساده‌ی G به یک گراف ساده‌ی H، تابع یک به یک $f : V(G) \rightarrow V(H)$ است به‌طوری‌که $uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $f(u)f(v) \in E(H)$. در صورتی که چنین تابع یکریختی موجود باشد، گوییم G با H **یکریخت** است و آن را با نماد $G \cong H$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۱. *اگر G یک گراف با مجموعه‌ی راس‌های V و هم‌چنین m معرف تعداد یالهای گراف باشد، در این‌صورت*

$$\sum_{v \in V} deg(v) = ۲m.$$

اثبات. قضیه‌ی ۱.۱ از [۲] را ببینید. □

قضیه ۲.۱.۱. *تعداد راس‌های فرد در گراف همواره زوج است.*

اثبات. نتیجه‌ی ۱.۲ از [۲] را ملاحظه نمایید. □

تعریف ۳.۱.۱. اگر $G = (V, E)$ یک گراف باشد، آن‌گاه گراف خطی G با $\mathcal{L}(G)$ نمایش داده می‌شود و عبارت از گرافی است که مجموعه‌ی راس‌های آن، مجموعه‌ی یالهای G است. حال دو راس

مانند x و y در $\mathcal{L}(G)$ توسط یک یال به یکدیگر وصل می‌شوند اگر یالهای متناظر راس‌های x و y در G با یکدیگر مجاور باشند.

تعریف ۴.۱.۱. یک **پارامتر گرافی** مانند ρ می‌تواند هر تابع ρ از مجموعه‌ی همه‌ی گراف‌ها به اعداد صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که اگر G و H، دو گراف همسان باشند، آن‌گاه داریم

$$\rho(G) = \rho(H).$$

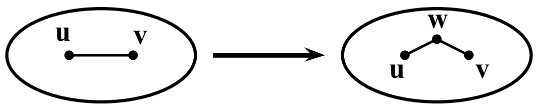
هم‌چنین یک پارامتر گراف مانند ρ، **پارامتر زیرجمعی گراف** خوانده می‌شود اگر

$$\rho(G \cup H) \leqslant \rho(G) + \rho(H).$$

جایی‌که $G \cup H$ یک اجتماع مجزا از راس‌های دو گراف G و H است.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم G و H دو گراف ساده باشند. **ضرب دکارتی** دو گراف G و H، گرافی است با مجموعه راس‌های $V(G) \times V(H)$ و یالهای این گراف جدید، مجموعه‌ی تمام زوج مرتب‌هایی به شکل $(u_۱, v_۱)(u_۲, v_۲)$ است که در آن، $u_۱u_۲ \in E(G)$ و $v_۱ = v_۲$ یا $v_۱v_۲ \in E(H)$ و $u_۱ = u_۲$. این گراف را با نماد $G \Box H$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. در گراف G، **مشتقِ** یال uv عملگری است که یال uv را با مسیر u، w، v جابه‌جا می‌کند به‌طوری‌که w یک راس جدید در گراف است.



شکل ۲.۱: مشتق یال uv

تعریف ۷.۱.۱. یک k-**رنگ آمیزی** از یک گراف G، یک برچسب گذاری $f : V(G) \to S$ است به‌طوری‌که $|S| = k$. (معمولا می‌نویسیم $S = [k]$.) برچسب‌های استفاده شده **رنگ** هستند و تمام راس‌هایی که دارای رنگ یکسان هستند، یک **کلاس رنگی** را معرفی می‌کنند. یک k-رنگ آمیزی از گراف دلخواه G **مجاز** خوانده می‌شود، هرگاه راس‌هایی که با یکدیگر مجاور هستند، برچسب‌هایی متفاوت داشته باشند.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم G یک گراف و f یک تابع صحیح نامنفی روی V باشد. یک f**-فاکتور** از G، زیرگراف فراگیر F از G است به‌طوری‌که برای تمام $v \in V$ داریم $deg_F(v) = f(v)$. هم‌چنین، یک k**-فاکتور** از گراف G، یک f-فاکتور است به‌طوری‌که برای تمام راس‌ها داریم $f(v) =: k$.

۲.۱.۱ مسیرها و دورها

بسیاری از کاربردها در نظریه‌ی گراف، شامل حرکت از یک راس و رسیدن به راسی دیگر در آن است. این مطلب، اساس تعریف فاصله‌ی بین دو راس در یک گراف است. به عنوان مثال ممکن است بخواهیم کوتاهترین مسیر بین دو شهر را پیدا کنیم و یا مسیری برای جریان الکتریسیته بین دو ترمینال شبکه‌ی الکتریکی بیابیم. این ایده را با تعریف دقیق گشت، گذر، و مسیر در یک گراف محقق می‌کنیم.

تعریف ۹.۱.۱. یک **گشت** در گراف $G = (V, E)$ عبارت است از دنباله‌ی $W = v_0 e_1 v_1 \ldots e_l v_l$ که در آن v_0، ...، v_l راس‌هایی از G و e_1، ...، e_l نیز یالهایی از G هستند به‌طوری‌که برای هر $1 \leqslant i \leqslant l$، v_{i-1} و v_i دو سر یال e_i هستند. در گراف ساده، یک گشت به سادگی با دنباله‌ای از راس‌های آن به صورت $W = v_0 v_1 \ldots v_l$ نمایش داده می‌شود. به راس v_0 دم W و به راس v_l سر W می‌گویند. سر و دم W را اغلب، نقاط انتهایی W نیز می‌نامند. اگر $v_0 \neq v_l$ آن‌گاه W را باز و در غیر این‌صورت بسته می‌گویند. طول W، همان تعداد یالهای آن است. یک گشت مانند W را **گذر** می‌نامیم هرگاه یالهای آن یعنی e_1، ...، e_l متمایز باشند. هم‌چنین به گشت W، **مسیر** گفته می‌شود هرگاه راس‌های آن یعنی v_0، ...، v_l متمایز باشند. به مسیری که ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشند، **دور** می‌گویند. طول یک گذر، مسیر و دور همانند طول یک گشت تعریف می‌شود. اگر طول یک دور زوج باشد، آن را **دور زوج** و اگر فرد باشد، آن را **دور فرد** می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. یک xy-مسیر، عبارت است از مسیری که نقاط انتهایی آن دو راس x و y باشند. در چنین مسیری از یک گراف، راس‌های x و y دارای درجه‌ی یک و بقیه‌ی راس‌های داخلی آن دارای درجه‌ی دو هستند. معمولا یک مسیر به طول n را با نماد P_n و یک دور به طول n را با نماد C_n نشان

می‌دهیم.

حال فاصله‌ی بین دو راس در گراف بر اساس مفهوم مسیر به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. **فاصله** بین دو راس x و y در یک گراف با $d(x,y)$ نشان داده می‌شود و عبارت است از طول کوتاهترین xy -مسیر در آن گراف، در صورتی که چنین مسیری وجود داشته باشد. اگر هیچ مسیری از x به y وجود نداشته باشد، فاصله‌ی بین x و y بی‌نهایت تعریف می‌شود. **قطر** یک گراف، بیشترین فاصله بین راس‌های آن است. **کمر** یک گراف عبارت از طول کوتاهترین دور در آن گراف، درصورت وجود است و در غیر این‌صورت کمر آن گراف، نامتناهی تعریف می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. یک گراف را **همبند** گوییم هرگاه هر دو راس آن توسط یک مسیر در آن گراف با هم مرتبط باشند. یک **مولفه** از گراف G، زیرگرافِ همبندِ ماکسیمال از G است یعنی زیرگراف همبندی که مشمول در هیچ زیرگراف همبند دیگر نباشد. تعداد مولفه‌های گراف G با $c(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۱. به یک گذر در گراف که از تمام یالهای آن عبور کند، **گذر اویلری** می‌گویند. گرافی که شامل حداقل یک گذر اویلری باشد، **گراف اویلری** نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴.۱.۱. گرافی که هر دو راس آن توسط یک یال به هم متصل باشد، **گراف کامل** نامیده می‌شود و اگر از مرتبه‌ی n باشد، آن را با K_n نشان می‌دهند. اگر گراف G از مرتبه‌ی n باشد، **مکمل** آن را با نماد $\bar{G}$ نشان داده می‌شود و گرافی با مجموعه راس‌های $V(G)$ و مجموعه یالهای $E(K_n)\backslash E(G)$ است.

۳.۱.۱ مجموعه مستقل و مجموعه احاطه‌گر

تعریف ۱۵.۱.۱. یک **خوشه** از گراف G، زیرمجموعه‌ای چون S از $V(G)$ است به‌طوری‌که زیرگراف القایی توسط مجموعه‌ی S، کامل باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. اگر S زیرمجموعه‌ای از $V(G)$ باشد به‌طوری‌که بین عناصر S در G هیچ یالی وجود نداشته باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی S را **مستقل** می‌گویند. مجموعه‌ی مستقل S، ماکزیمم است اگر هیچ