# پیش گفتار

با آغاز کار آبل [۱] در دهه‌ی ۱۸۲۰ عده ای از ریاضی‌دانان تمایل زیادی به حل معادلات انتگرالی نشان داده‌اند. در میان این ریاضی دانان می‌توان به اسامی برجسته‌ای چون کشی[۲]، فرد هولم [۳]، هیلبرت[۴] و ولترا [۵] اشاره کرد. دو دلیل برای این تمایل وجود دارد. در بعضی از کارهای تحقیقاتی مثل کار آبل در زمینه‌ی خم‌های همزمانی[۶]، معادلات انتگرالی مدل طبیعی ریاضی برای نمایش یک وضعیت جالب توجه فیزیکی هستند. و دیگر این که عملگرها و معادلات انتگرالی ابزار مناسبی برای مطالعه‌ی معادلات دیفرانسیل می‌باشند. بنابراین معادلات انتگرالی برای اساتید کلاسیک آشنا است و بسیاری از نتایج زیبا و سودمند توسط آنها توسعه یافته است.

در میان ریاضی‌دانان کاربردی، مهندسین و تحلیل‌گران عددی، دانش حل معادلات انتگرالی کمتر معمول است. در مدل‌سازی ریاضی تأکید متداول روی معادلات دیفرانسیل بوده است. روش‌های عددی و تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل توسط بسیاری از کسانی که اساساً با روش‌های حل معادلات انتگرالی ناآشنا هستند، به طور گسترده‌ای شناخته شده است. نگاهی کوتاه به متون استاندارد آنالیز عددی مؤید این مطلب است که روش‌های عددی برای حل

[۱] Abel [۲] Cauchy [۳] Fredholm [۴] Hilbert [۵] Volterra [۶] Tautochrone curves

معادلات انتگرالی به ندرت ذکر شده‌اند. اخیراً، با این حال، این وضعیت شروع به تغییر کرده است. همان‌گونه که مدل‌های ریاضی واقع‌گرایانه‌تر می‌شوند، استفاده از معادلات انتگرالی دیگر اجتناب‌ناپذیر می‌شود در بعضی از موارد، مثلاً مسائل تأخیری[۱]، معادلات دیفرانسیل بیشتر از این نمی‌توانند مشخصه‌های اساسی فیزیکی را نمایش دهند و مؤلفه‌های انتگرالی می‌بایستی معرفی شوند. در دیگر موارد این آگاهی وجود دارد که معادلات انتگرالی جایگزینی مناسب و از لحاظ عملی مفید برای حل معادلات دیفرانسیل می‌باشند. بنابراین مطالعه‌ی روش‌های عددی برای حل معادلات انتگرالی تبدیل به یک موضوع قابل توجه شده است[۱].

معادلات انتگرالی به دو دسته‌ی عمده‌ی فرد هولم و ولترا دسته‌بندی می‌شوند. در یک معادله‌ی فردهولم دامنه‌ی انتگرال‌گیری ثابت است، در حالی که در یک معادله‌ی ولترا دامنه متغیر می‌باشد. تمایز بین معادلات فرد هولم و ولترا مشابه با تمایز بین مسائل مقدار مرزی و اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. به این معنا که معادلات از نوع فرد هولم کم و بیش همانند مسائل مقدار مرزی رفتار می‌کنند و در مقابل معادلات از نوع ولترا شبیه مسائل مقدار اولیه‌اند[۲].

معادلات انتگرالی ولترا به طور طبیعی الگوهای مشخصی برآمده از مسائل وابسته به زمان[۲] می‌باشند که رفتارشان در زمان $t$ نه تنها به وضعیت در همان زمان، بلکه به وضعیت‌هایی در زمان‌های گذشته نیز وابسته است. چنین مدل‌هایی ''وابسته به پیشینه[۳] '' یا ''دستگاه همراه با حافظه [۴] '' نامیده می‌شوند [۱].

روش‌های عددی گوناگونی برای حل معادلات ولترا وجود دارد که از آن جمله می‌توان به

[۱]Delayed problem [۲]Time-dependent [۳]History-dependent [۴]System with memory

روش‌های هم‌محلی [۱] ، اختلال هموتوپی [۲]، تکرار تغییراتی [۳] و تجزیه آدومیان [۴] اشاره کرد. با این حال روش‌های طیفی[۵] برای حل این نوع معادلات کمتر مورد توجه قرار گرفته اند.

روش‌های طیفی که منشأ پیدایششان در حل عددی مسائل مقدار مرزی است [۱۰-۳]، در سه دهه‌ی اخیر به سرعت توسعه یافته‌اند. این روش‌ها برای شبیه‌سازی عددی به طور موفقیت آمیزی در بسیاری از زمینه‌ها به کار رفته‌اند. از جمله می‌توان به هدایت حرارتی [۶] ، دینامیک سیالات [۷]و مکانیک کوانتومی[۸] اشاره کرد. امروزه، این روش‌ها همانند روش‌های تفاضل متناهی[۹] و عناصر متناهی [۱۰] ابزار کارایی برای حل عددی معادلات با مشتقات جزئی محسوب می‌شوند. برتری مجذوب کننده‌ی این روش‌ها در دقت بالا معروف به همگرایی از مرتبه‌ی نامتناهی [۱۱] می‌باشد. هر قدر جواب واقعی هموارتر باشد نرخ همگرایی [۱۲] این روش عددی نیز به همان میزان بالاتر می‌رود. با این حال این خاصیت در روش‌های تفاضل متناهی و عناصر متناهی وجود ندارد[۹].

دقت بالا، سادگی در اجرا و کارایی روش های طیفی در حل مسایل مقدار مرزی محققان را بر آن داشته تا این روش ها را برای حل معادلات انتگرالی نیز به کار برند. تحقیقات انجام شده در این زمینه در پانزده سال اخیر صورت گرفته است. برای اولین بار النگر [۱۳] و کاظمی در سال ۱۹۹۶ یک روش طیفی برای حل معادلات انتگرالی ولترا از نوع همرشتاین [۱۴] ارایه دادند [۱۱]. در سال ۱۹۹۸ کیم[۱۵] و چوی [۱۶] تقریب طیفی هم محلی را برای حل معادلات انتگرال

---

[۱] collocation [۲] Homotopy perturbation [۳] Variational iteration [۴] Adomian decomposition [۵] Spectral methods [۶] Heat conduction [۷] Fluid dynamics [۸] Quantum mechanics [۹] Finite difference [۱۰] Finite element [۱۱] Infinite order [۱۲] Convergence rate [۱۳] Elnagar [۱۴] Hammerstein [۱۵] Kim [۱۶] Choi

- دیفرانسیل جزیی[1] معرفی کردند [۱۲]. آکیوز[2] و سزر[3] در سال ۱۹۹۹ یک روش طیفی هم محلی برای حل معادلات انتگرال - دیفرانسیل خطی ارایه دادند[۱۳]. تانگ [4] و همکاران در سال ۲۰۰۸ یک روش طیفی هم محلی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر [5] را برای حل معادلات انتگرالی ولترای یک بعدی و دو بعدی به کار گرفتند [۱۴]. دانشمندان و محققان دیگری نیز با استفاده از روش های طیفی به حل انواع معادلات انتگرالی ولترا پرداخته اند [۲۱-۱۵].

در این پایان‌نامه که مشتمل بر شش فصل است، هدف اصلی آن است که به حل معادلات انتگرالی ولترا با روش‌های طیفی بپردازیم و نتایج حاصل را با سایر روشها مقایسه کنیم همچنین بررسی کنیم که آیا این روشها در حل معادلات انتگرالی ولترا هم از دقت بالایی برخوردارند یا خیر، بنابراین در فصل نخست، ابتدا به معرفی معادلات انتگرالی ولترا می‌پردازیم و به طور مختصر نظریه و کاربرد این معادلات را بررسی می‌کنیم. سپس مقدمات روش‌های طیفی از جمله چندجمله‌ای‌های متعامد [6] ، بحث درونیابی و انتگرال‌گیری گوسی [7] را مطرح می‌کنیم. در فصل دوم به معرفی روش های طیفی هم محلی [8] و گالرکین [9] برای حل معادلات انتگرالی ولترای نوع دوم یک بعدی می پردازیم و در فصل سوم روش های فصل دوم را به حالت دو بعدی تعمیم می دهیم. در فصل چهارم روش هم محلی ارایه شده در فصل دوم را برای حل عددی دستگاه معادلات انتگرالی ولترای نوع دوم توسیع می دهیم. در فصل پنجم مسایل کنترل بهینه مقید به معادلات انتگرالی از نوع ولترا را به کمک روش طیفی هم محلی حل می کنیم. و در آخر به جمع بندی مطالب فصل های قبل می پردازیم و پیشنهاداتی را برای کارهای آینده ارایه می دهیم.

---

[1] Partial Integro-Differential [2] Akyuz [3] Sezer [4] Tang [5] Legendre [6] Orthogonal polynomials
[7] Gaussian quadrature [8] Collocation [9] Galerkin

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# مقدمات و پیش‌نیازها

## ۱.۱ معادلات انتگرالی ولترا

معادله‌ی انتگرالی یک معادله‌ی تابعی [1] است که در آن تابع مجهول تحت یک یا چند انتگرال ظاهر شود. معادلات انتگرالی ولترا که تمرکز ما در این پایان‌نامه بر روی حل آنها است معادلاتی هستند که در آنها حد بالای انتگرال‌گیری به صورت تابعی از یک متغیر مستقل ظاهر می‌شود.

**تعریف ۱.۱.۱.** *اگر $I = [0, T]$ نشان دهنده‌ی یک بازه‌ی بسته و کراندار باشد که $T > 0$، و داشته باشیم $S = \{(t,s) | 0 \leq s \leq t \leq T\}$. معادله‌ی انتگرالی ولترا در حالت کلی به شکل زیر است*

$$\theta(t)y(t) = f(t) + \int_{0}^{t} K(t,s,y(s))ds \ , \ t \in I,$$
$$\theta, f, y : t \in I \to \mathbb{R}, K : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (۱.۱)$$

[1] Functional equation

که در آن $\theta$، $f$ و $K$ توابعی معلوم و $y$ تابع مجهول می‌باشد. همچنین $f$ به عنوان تابع نیرو [۱] و $K$ به هسته‌ی [۲] معادله‌ی انتگرالی موسوم است.

طبقه بندی معادلات انتگرالی ولترا برحسب مقدار تابع $\theta(t)$ به شرح زیر تعیین می‌شود.

**تعریف ۲.۱.۱.** *الف)* اگر $\forall t \in I$ ، $\theta(t) = 0$. معادله‌ی (۱.۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$f(t) = -\int_0^t K(t,s,y(s))ds, \quad t \in I. \tag{۲.۱}$$

که آن را معادله‌ی انتگرالی ولترای نوع اول می‌نامند.

ب) اگر $\forall t \in I$ و $\theta(t) \neq 0$. معادله‌ی (۱.۱) در نهایت به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$y(t) = \bar{f}(t) + \int_0^t \bar{K}(t,s,y(s))ds, \quad t \in I \tag{۳.۱}$$

معادله‌ی (۳.۱) معادله‌ی انتگرالی ولترا نوع دوم نامیده می‌شود که در آن

$$\overline{K}(t,s,y(s)) = \frac{K(t,s,y(s))}{\theta(t)}\ ,\ \overline{f}(t) = \frac{f(t)}{\theta(t)}$$

پ) اگر $\theta$ یک تابع پیوسته باشد که در بازه‌ی $I$ تعداد متناهی ریشه داشته باشد، آن‌گاه معادله‌ی انتگرالی ولترای (۱.۱) از نوع سوم است. (چنین معادلاتی به معادلات ولترای جبری- انتگرالی[۳] معروفند.)

**تعریف ۳.۱.۱.** معادله‌ی انتگرالی ولترا زیر

$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s,y(s))ds, \quad t \in I$$

[۱] Force function [۲] Kernel [۳] Integral-algebraic

الف) خطی نامیده می‌شود، اگر هسته‌اش به شکل زیر باشد

$$K(t,s,y) = \overline{K}(t,s)y, \quad \forall t,s,y \tag{۴.۱}$$

ب) پیچشی[۱] نامیده می‌شود، اگر

$$K(t,s,y) = \overline{K}(t-s,y), \quad \forall t,s,y \tag{۵.۱}$$

پ) همرشتاین نامیده می‌شود، اگر

$$K(t,s,y) = \overline{K}(t,s)G(s,y(s)) \tag{۶.۱}$$

دقت داریم که $G(s,y(s))$ به $t$ بستگی ندارد.

ت) به طور ضعیف منفرد جبری[۲] (یا آبل) نامیده می‌شود در صورتی که

$$K(t,s,y) = (t-s)^{-\alpha}\overline{K}(t,s,y), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{۷.۱}$$

یا به طور ضعیف منفرد لگاریتمی[۳] نامیده می‌شود، اگر

$$K(t,s,y) = \log(t-s)\overline{K}(t,s,y) \tag{۸.۱}$$

که در آن $\overline{K}$ یک تابع هموار روی $S \times \mathbb{R}$ می‌باشد و $t \in I$، $\overline{K}(t,t,y) \neq 0$.

### ۱.۱.۱ نظریه‌ی اساسی معادلات انتگرالی ولترای خطی

در سال ۱۸۹۶ ویتو ولترا[۴] اولین مقاله‌ی اساسی خود را در زمینه‌ی معادلات انتگرالی منتشر کرد، که این مقاله در بر دارنده‌ی نتایج پایه‌ای زیر است [۲۲].

[۱] Convolution [۲] Algebraic weakly singular [۳] Logaritmic weakly singular [۴] Vito volterra

**قضیه ۱.۱.۱.** *فرض کنید هسته‌ی $K(t,s)$ از معادله‌ی انتگرالی ولترای خطی زیر*

$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s)y(s)ds, \quad t \in I = [0,T]$$

*بر روی $S = \{(t,s)|0 \leq s \leq t \leq T\}$ پیوسته باشد، آن‌گاه به ازای هر تابع پیوسته $f(t)$ روی $I$ (یعنی $f \in C(I)$) معادله‌ی انتگرالی مذکور دارای جواب منحصر به فرد $y \in C(I)$ می‌باشد.*

**نتیجه ۱.۱.۱.** *فرض کنید توابع معلوم در معادله‌ی انتگرالی زیر*

$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s)y(s)ds \quad , \; t \in I$$

*در شروط $f \in C^d(I)$ و $K \in C^d(S)$، $d \geq 1$ صدق کنند. آن‌گاه جواب $y$ منظم بودن[1] را از $f$ و $K$ به ارث می‌برد، یعنی $y \in C^d(I)$ .*

**نتیجه ۲.۱.۱.** *معادله‌ی انتگرالی ولترای نوع اول زیر را در نظر می‌گیریم*

$$\int_0^t H(t,s)y(s)ds = f(t), \quad t \in I.$$

*فرض می‌کنیم هسته‌ی $H(t,s)$ و مشتق جزئی $\frac{\partial H(t,s)}{\partial t}$ بر روی $S$ پیوسته باشند، همچنین $f(t)$ دارای مشتقی پیوسته روی $I$ باشد و در شرط $f(0) = 0$ صدق کند. اکنون با مشتق گرفتن از دو طرف معادله‌ی نوع اول مذکور نسبت به $t$ داریم*

$$H(t,t)y(t) + \int_0^t \frac{\partial H(t,s)}{\partial t} y(s)ds = f'(t).$$

*اگر به ازای هر $t$ متعلق به $I$، $H(t,t) \neq 0$ آن‌گاه به معادله‌ی ولترای نوع دوم زیر می‌رسیم*

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s)y(s)ds.$$

---

[1] Regularity

*که در آن*

$$g(t)=\frac{f'(t)}{H(t,t)} \quad , \quad K(t,s)=-\frac{\partial H(t,s)}{\partial t}.\frac{1}{H(t,t)}.$$

*اکنون طبق قضیه ۱.۱.۱ معادله‌ی انتگرالی ولترای نوع اول مذکور دارای جواب منحصر به فرد پیوسته $y(t)$ روی $I$ می‌باشد.*

### ۲.۱.۱ نظریه‌ی اساسی معادلات انتگرالی ولترای غیر خطی

برای معادله‌ی انتگرالی ولترای نوع دوم غیر خطی زیر

$$y(t)=f(t)+\int_0^t K(t,s,y(s))ds, \quad t\in I$$

دو قضیه‌ی (سراسری[1] و محلی[2]) وجود و یکتایی به شرح زیر ارائه می‌کنیم [۲۲].

**قضیه ۲.۱.۱.** *(سراسری) فرض کنید $K(t,s,y)$ به ازای همه‌ی $(t,s)\in S$ و تمامی $y$ ها پیوسته باشد همچنین $K$ به ازای متغیر سوم خود در شرط لیپشیتز[3] صدق کند، یعنی*

$$|K(t,s,y_1)-K(t,s,y_2)|\leq L|y_1-y_2|, \forall(t,s)\in S, \forall y_1,y_2\in\mathbb{R}$$

*که در آن ثابت لیپشیتز $L$ مستقل از $y_1$ و $y_2$ است. آن‌گاه به ازای هر $f\in C(I)$ معادله‌ی انتگرالی ولترای غیر خطی مذکور دارای جواب یکتای $y\in C(I)$ است.*

*در بسیاری از موارد، شرایط اعمال شده روی هسته‌ی $K(t,s,y)$ فقط در بعضی ناحیه‌های فشرده[4] برقرارند. در این حالت وجود جواب روی کل بازه‌ی $I$ تضمین شده نیست.*

[1]Global [2]Local [3]Lipschitz [4]Compact region

**قضیه ۳.۱.۱.** *(محلی)*

*فرض کنید $f \in C(I)$ ، همچنین $K(t,s,y)$ در ناحیه‌ی زیر پیوسته باشد*

$$\Omega_B = \{(t,s,y)|(t,s) \in S, |y - f(t)| \leq B\}.$$

*که در آن $B$ یک ثابت مثبت است.*

*به علاوه فرض کنید $K$ در شرط لیپشیتز به شکل زیر صدق کند*

$$|K(t,s,y_1) - K(t,s,y_2)| \leq L_B|y_1 - y_2|, \forall (t,s,y_1),(t,s,y_2) \in \Omega_B.$$

*و قرار دهید*

$$M_B = \max\{|K(t,s,y)| \mid (t,s,y) \in \Omega_B\},$$
$$T_0 = \min\{T, \frac{B}{M_B}\},$$

*آن‌گاه معادله‌ی انتگرالی ولترای غیر خطی، دارای جواب منحصر به فرد $y \in C(I_0)$ است که $I_0 = [0, T_0]$. قضیه‌ی فوق به قضیه‌ی وجود - یکتایی محلی معروف است. (اثبات همراه با جزئیات را می‌توان در مرجع [۲۲] یافت.)*

### ۳.۱.۱ معادلات انتگرالی ولترا و مسائل مقدار اولیه

معادلات انتگرالی به طور گسترده‌ای در مطالعه‌ی خصوصیات معادلات دیفرانسیل به کار می‌روند. مقدماتی‌ترین گواه این است که مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر

$$y' = f(t, y(t)), \quad t \geq 0$$

$$y(\circ) = y_\circ \tag{۹.۱}$$

توسط انتگرال‌گیری قابل تبدیل به معادله‌ی انتگرالی ولترای زیر است

$$y(t) = y_\circ + \int_\circ^t f(s, y(s))ds. \tag{۱۰.۱}$$

**نکته ۱.۱.۱.** *معادله‌ی انتگرالی ولترای نوع دوم زیر*

$$y(t) = f(t) + \int_\circ^t K(t,s)y(s)ds.$$

*در حالت کلی معادل یک مسأله‌ی مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی نیست. اگر از طرفین معادله انتگرالی ولترای اخیر نسبت به $t$ مشتق بگیریم داریم*

$$y'(t) = f'(t) + K(t,t)y(t) + \int_\circ^t \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} y(s)ds$$

*که در حالت کلی*

$$\frac{\partial K(t,s)}{\partial t} \neq \circ.$$

*بنابراین معادله‌ی ولترای نوع دوم مذکور به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود*

$$\begin{aligned} &y'(t) = g(t) + a(t)y(t) + \int_\circ^t \overline{K}(t,s)y(s)ds, \\ &y(\circ) = f(\circ) \end{aligned}$$

*که در آن*

$$g(t) = f'(t)\ ,\ a(t) = K(t,t)\ ,\ \overline{K}(t,s) = \frac{\partial K(t,s)}{\partial t}.$$

*معادله‌ی اخیر یک مسأله‌ی مقدار اولیه در معادلات انتگرال- دیفرانسیل از نوع ولترا است.*

### ۴.۱.۱ کاربردها:معادلات انتگرالی ولترا به عنوان مدل‌های ریاضی

معادلات انتگرالی ولترا به طور طبیعی الگوهای مشخصی برآمده از مسائل وابسته به زمان می‌باشند که رفتارشان در زمان $t$ نه تنها به وضعیت در همان زمان بلکه به وضعیت‌هایی در زمان‌های گذشته نیز وابسته است. جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

$$y(t_0) = y_0$$

اگر $y(t_0)$ معلوم باشد به ازای $t > t_0$ کاملاً معین می‌شود. این مطلب به ازای هر $t_0$ درست است. به عبارت دیگر جواب، بعد از زمان $t = t_0$ به اطلاعات قبل از $t = t_0$ وابسته نیست. با این حال وضعیت‌هایی وجود دارند که آگاهی از وضعیت جاری به تنهایی کافی نیست و دانستن این که وضعیت $y(t_0)$ چگونه حاصل شده برای پیش بینی آینده ضروری است. چنین مدل‌هایی "وابسته به پیشینه" یا "دستگاه‌های همراه با حافظه" نامیده می‌شوند. اگر وابستگی به پیشینه به وسیله‌ی جمله‌ی زیر نمایش داده شود

$$\int_0^t K(t, s, y(s))ds,$$

آن گاه معادله‌ی مدل بندی شده از نوع معادله‌ی انتگرالی ولترا است [۱].

همچنین معادلات انتگرالی از جمله ولترا در موقعیت‌هایی پدید می‌آیند که مشاهدات عملی به جای متغیر مورد نظر بعضی انتگرال‌های وابسته به آن را نتیجه می‌دهند. بنابراین برای محاسبه‌ی متغیر واقعی به جواب معادلات انتگرالی نیاز داریم (برای مشاهده‌ی مثال به مرجع[۱] مراجعه کنید).

در ادامه به معرفی دو مدل ساده معادلات انتگرالی ولترا می‌پردازیم. برای مشاهده‌ی فهرست کاملی از کتاب‌ها و مقالات در مورد مدل‌های معادلات انتگرالی ولترا به مرجع[۲۳] مراجعه کنید.

### مدل رشد جمعیت

معادله‌ی انتگرالی ولترای همرشتاین با هسته پیچشی زیر مدل ساده ای از رشد جمعیت است.

$$u(t) = g(t) + \int_0^t P(t-s)G(u(s))ds, t \geq 0$$

در این مدل $G(u)$ تعداد اعضای اضافه شده به جمعیت (در واحد زمان) می‌باشد، در حالی که میزان جمعیت $u$ است. تابع $p(t)$ احتمال این که عضوی از جمعیت تا سن $t$ زنده بماند را نشان می‌دهد و تابع $g(t)$ نشان‌دهنده‌ی تعداد اعضایی است که در زمان $t \geq 0$ هنوز زنده‌اند.

### مدل جریان در یک مدار بسته

مدل زیر برگرفته از یک مسأله در مهندسی الکترونیک می‌باشد.

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{c}\int_0^t I(\tau)d\tau = f(t), I(0) = I_0$$

در این مدل $I(t)$ شدت جریان در یک مدار بسته را نشان می‌دهد، در حالی که $L$ ضریب القا[۱]، $R$ مقاومت[۲]، $C$ ظرفیت[۳] و $f(t)$ ولتاژ به کار رفته است.

[۱]Inductance [۲]Resistance [۳]Capacitance

## ۲.۱ مروری بر روش‌های طیفی:مفاهیم و مقدمات

روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات انتگرالی به دو دسته‌ی محلی و سراسری قابل تقسیم بندی‌اند. روش‌های تفاضل متناهی و عناصر متناهی براساس آرگومان‌های محلی‌اند، در حالی که روش‌های طیفی ذاتاً سراسری می‌باشند. همچنین روش‌های تفاضل متناهی و عناصر متناهی در عمل، برای مسائل با دامنه‌ای دارای هندسه‌ی پیچیده[۱] مناسب‌اند. در حالی که روش‌های طیفی به شرط انعطاف پذیری دامنه[۲] دقت بالاتری را به دست می‌دهند. تأکید می‌کنیم که روش‌های عددی زیادی نظیر عناصر متناهی اچ-پی[۳] و عناصر طیفی[۴] وجود دارند که مزایای روش‌های محلی و سراسری را ترکیب می‌کنند[۱۰]، با این حال در این پایان‌نامه توجه مان را بر روش‌های طیفی محدود می‌کنیم.

در روش‌های طیفی تابع مجهول $y$ روی کل بازه مورد نظر توسط $\hat{y} = \sum_{n=0}^{N} \hat{y}_n \phi_n$ که $\phi_n$ها توابع پایه ای نامیده می‌شوند، تقریب زده می‌شود. همچنین در این روش‌ها ویژگی اصلی، اختیار کردن دستگاه‌های متعامد متنوع از توابع بی‌شمار بار مشتق‌پذیر بر روی کل بازه به عنوان توابع پایه ای می‌باشد. توابع پایه ای متفاوت منجر به تقریب‌های طیفی متفاوت می‌شود. به عنوان مثال چندجمله‌های مثلثاتی[۵] برای مسائل متناوب[۶]، چندجمله‌ای چبیشف[۷] و لژاندر[۸] برای مسائل نامتناوب، چندجمله‌ای‌های لاگر[۹] برای مسائل بر روی بازه‌ی نیمه متناهی[۱۰] و چندجمله‌ای‌های هرمیت[۱۱] برای مسائل بر روی کل بازه‌ی حقیقی [۱۲] مورد استفاده قرار می‌گیرند [۹].در این

[۱] Complex geometry [۲] Domain flexibility [۳] Hp finite-elements [۴] Spectral- element
[۵] Trigonometric polynomials [۶] Periodic problems [۷] Chebyshev polynomials [۸] Legendre
[۹] Laguerre [۱۰] Half line [۱۱] Hermite [۱۲] Whole line

پایان‌نامه توجه مان به طور خاص معطوف به چندجمله‌ای‌های چبیشف و لژاندر خواهد بود.

روش‌های طیفی در مبحث روش‌های عددی به خانواده‌ی روش‌های مانده‌ی وزن‌دار[1] تعلق دارند، که این خانواده به طور عادی پایه‌ی بسیاری از روش‌های عددی نظیر عناصر متناهی، حجم‌های متناهی[2] و عناصر مرزی[3] می‌باشد. روش‌های مانده‌ی وزن دار یک گروه خاص از روش‌های تقریب می‌باشند که در آنها مانده[4] (خطا) به طریقی مشخص، مینیمم می‌شود و این منجر به روش‌های خاصی شامل گالرکین[5]، پترو-گالرکین[6]، هم‌محلی و تائو[7] می‌شود.

### ۱.۲.۱ روش‌های مانده‌ی وزن دار

در این بخش به معرفی روش‌های مانده‌ی وزن دار می‌پردازیم. معادله‌ی انتگرالی ولترا را در حالت عملگری زیر در نظر می‌گیریم

$$Ly = f, \quad (Ly)(x) = f(x), \quad x \in [-1, 1] \tag{۱۱.۱}$$

که در آن $y$ تابع مجهول و $f$ تابع نیرو و $L$ عملگر انتگرالی ولترا در حالت کلی است. نقطه‌ی شروع روش‌های مانده‌ی وزن دار تقریب جواب $y$ در (۱۱.۱) توسط مجموع متناهی

$$y(x) \approx y_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \phi_k(x). \tag{۱۲.۱}$$

می‌باشد که در آن $\{\phi_k\}_{k=0}^{N}$ توابع پایه‌ای اند. و ضرایب مجهول $\{a_k\}_{k=0}^{N}$ باید تعیین شوند. با جایگزینی $y_N$ به جای $y$ در (۱۱.۱) مانده (خطا) حاصل می‌شود، یعنی

$$R_N(x) = Ly_N(x) - f(x)\ ,\ x \in [-1, 1]. \tag{۱۳.۱}$$

[1]Weighted residual methods [2]Finite volumes [3]Boundry elements [4]Residual [5]Galerkin
[6]Petrove–Galerkin [7]Tau

اکنون ایده‌ی روش‌های مانده‌ی وزن‌دار این است که مانده در یکی از شرایط زیر صدق کند

الف)

$$(R_N, \psi_j)_w = \int_{-1}^{1} R_N(x)\psi_j(x)w(x)dx = 0, \quad 0 \le j \le N \qquad (۱۴.۱)$$

که در آن $\{\psi_j\}_{j=0}^{N}$ توابع آزمون [۱] نامیده می‌شوند و $w$ یک تابع وزن[۲] مثبت است.

یا

ب)

$$< R_N, \psi_j >_{N,w}= \sum_{k=0}^{N} R_N(x_k)\psi_j(x_k)w_k = 0, \quad 0 \le j \le N \qquad (۱۵.۱)$$

که در آن $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ نقاط از پیش تعیین شده‌ی هم‌محلی هستند و $\{w_k\}_{k=0}^{N}$ وزن‌های فرمول انتگرال‌گیری عددی[۳] می‌باشند.

انتخاب توابع آزمون قاعده‌های زیر را از هم متمایز می‌کند[۱۰]

- گالرکین: توابع آزمون همان توابع پایه ای اند. (یعنی، $\phi_k = \psi_k$ در (۱۴.۱) یا (۱۵.۱))
- پترو-گالرکین: توابع آزمون متفاوت از توابع پایه ای اند.
- هم‌محلی: توابع آزمون $\{\psi_k\}$ در (۱۵.۱) چندجمله‌ای‌های پایه‌ای لاگرانژ[۴] اند که $\psi_k(x_j) = \delta_{jk}$، و نقاط $\{x_j\}$ نقاط هم‌محلی از پیش تعیین شده اند. بنابراین مانده مجبور به صفر شدن در نقاط $\{x_j\}$ می‌شود، یعنی $R_N(x_j) = 0$.

در این پایان‌نامه به بررسی روش‌های طیفی از نوع گالرکین و هم‌محلی می‌پردازیم.

[۱] Test functions [۲] Weight function [۳] Numerical quadrature [۴] Lagrange

## ۲.۲.۱ چندجمله‌ای‌های متعامد و نتایج وابسته

چندجمله‌ای‌های متعامد نقش بسیار مهمی را در روش‌های طیفی ایفا می‌کنند، از این رو مطالعه‌ی آنها حائز اهمیت است. در این بخش چند قضیه اساسی را بدون اثبات بیان می‌کنیم و سپس به مرور بعضی از نتایج موجود در مورد ریشه‌های چندجمله‌ای‌های متعامد می‌پردازیم. همچنین در مورد بعضی از موضوعات مهم نظیر فرمول‌های انتگرال‌گیری گاوسی[۱]، درونیابی و تبدیلات گسسته[۲] بحث می‌کنیم.

### چندجمله‌ای‌های متعامد

**تعریف ۱.۲.۱.** *بازه‌ی باز $I=(a,b)$ که $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ و تابع وزن $w$ به قسمی که*

$$w(x) > 0, \forall x \in I, w \in L^1(I) \tag{۱۶.۱}$$

*را در نظر می‌گیریم، توابع $f$ و $g$ در فضای $L^2_w(a,b)$ نسبت به $w$ متعامد نامیده می‌شوند، هرگاه*

$$(f,g)_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx = 0.$$
$$\left(L^2_w(a,b) = \{v : \text{اندازه‌پذیر } v, \|v\|_w = (\int_{-1}^{1} |v(x)|^2 w(x)dx)^{\frac{1}{2}} < \infty\}\right)$$

**تعریف ۲.۲.۱.** *دنباله چندجمله‌ای $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ با $deg(p_n)=n$، در فضای $L^2_w(a,b)$ متعامد نامیده می‌شود، هرگاه*

$$(p_n,p_m)_w = \int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x)dx = \gamma_n \delta_{mn} \tag{۱۷.۱}$$

[۱] Gaussian quadrature formula [۲] Discrete transforms