دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی- گرایش آنالیز عددی

عنوان:

طرح نمایی مرتبه بالا برای حل معادله ی انتقال - پخش تک بعدی متغیر

استاد راهنما:

دکتر مریم عرب عامری

تحقیق و نگارش:

منیره دهمرده

بهمن ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

پدر عزیز و مادر مهربانم

که تمامی لحظات زندگیم را به آنها مدیونم

و

تمام عزیزانی که صمیمانه دوستشان دارم.

سپاسگزاری

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند و سلام و درود بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، والاتر از آن است که در مقام قدرانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ برحسب وظیفه

از پدر و مادر عزیزم ، این دو معلم بزرگوارم که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند.

از استاد با کمالات و شایسته، سرکار خانم دکتر مریم عرب عامری که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را برعهده گرفتند.

از نماینده محترم تحصیلات تکمیلی، سرکار خانم دکتر فرانک حسین زاده سلجوقی و داوران محترم جناب آقای دکتر پرویز سرگلزایی و جناب آقای دکتر مرتضی سنجرانی پور کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

در این پایان نامه، یک طرح نمایی مرتبه بالا (HOE[۱]) برای حل معادله ی انتقال - پخش متغیر یک بعدی معرفی گردیده است. این طرح، فرمول تفاضل نمایی فشرده ی مرتبه ی چهارم را برای گسسته سازی مکانی و تقریب پد $(۲,۲)$ را برای گسسته سازی زمانی بکار می برد. طرح ارائه شده دقتی از مرتبه ی چهار نسبت به متغیرهای زمان و مکان دارد و غیرمشروط پایدار می باشد. همچنین روش دینگ و ژانگ [۲] را نیز معرفی کرده و نشان می دهیم این روش نیز بطور غیرمشروط پایدار می باشد .

در پایان، نتایج عددی سه روش دینگ و ژانگ، کرانک نیکلسون [۳] و (HOE) بطور مجزا با هم مقایسه شده اند.

واژگان کلیدی: طرح نمایی مرتبه بالا، تقریب پد، پایداری غیرمشروط، معادله انتقال - پخش.

---

[۱] High - Order Exponential

[۲] Ding and Zhang

[۳] Crank - Nicolson

پیشگفتار

بسیاری از مسائل فیزیک از قبیل مکانیک، انتقال حرارت، نظریه الکترومغناطیس و غیره توسط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مدل سازی می شوند و کاربرد زیادی در دنیای امروز پیدا کرده اند به طوری که پیشرفت علم بدون معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی امکان پذیر نیست. معادلاتی از قبیل معادله موج، انتقال حرارت، لاپلاس و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که در مهندسی مورد بررسی قرار می گیرند از این قبیل می باشند. معادلات انتقال - پخش، یکی از مهمترین معادلاتی هستند که از مدل بندی پدیده های فیزیکی بوجود می آیند و انتقال - پخش مفاهیمی نظیر گرما، انرژی و ... را شرح می دهند. لذا ارائه ی روش عددی کارا و مناسب برای حل چنین معادلاتی ضروری به نظر می رسد. بدین منظور تلاشهای بسیاری برای توسعه ی روشهای تفاضل متناهی جهت تقریب عددی معادله ی انتقال - پخش انجام شده است.
هرش [۴] بر اساس طرحهای پد مرتبه ی چهارم برای مشتقات مکانی مرتبه ی اول و دوم، یک طرح تفاضل متناهی فشرده ی مرتبه ی چهار، سه نقطه ای برای مسائل سهموی تک بعدی ارائه کرد. این طرح دقتی بالاتر از طرحهای مرتبه ی دوم دارد و تکنیکی موثر در محاسبات مسائل مکانیک سیالات می باشد [۵].
ریگال [۵] نیز مجموعه ای کلی از طرحهای تفاضل متناهی فشرده ی مرتبه ی دو زمانی و مرتبه ی چهار مکانی، سه نقطه ای که شامل چندین طرح پیشنهاد شده توسط نویسنده های متفاوت می باشد را بیان کرد [۱۲]. این طرحها ساختاری کاملاً متفاوت دارند و برخی از آنها عبارتند از:
طرح $M1$، که نخستین بار توسط مانوهار [۶] ، آینگار [۷] و کریشنا [۸] در سال ۱۹۸۸ برای مسائل سهموی با ضرایب متغیر ارائه شد که طرحی کاملاً پایدار و بدون نوسان می باشد. طرح N، که از ترکیب طرح بهینه ی پسرو و طرح عددی لکس - وندروف [۹] بدست آمده، در سال ۱۹۹۰ توسط نوی [۱۰] ارائه شد و ...[۱۲].
برای مسائل انتقال - پخش دو بعدی و سه بعدی نیز روشهای فشرده ی مرتبه بالای ضمنی جهت تناوبی (ADI[۱۱]) ارائه شده که بسیاری از این طرحهای تفاضلی دارای دقتی از مرتبه ی دوم نسبت به متغیر زمان و مرتبه ی چهارم نسبت به متغیر مکان می باشند. این روشها غیرمشروط پایدارند و به آسانی برای مسائل انتقال - پخش چند بعدی نیز قابل تعمیم می باشند و از ویژگی های قابل توجه این روشها می توان به کاهش چشمگیر حجم محاسبات اشاره کرد [۹, ۱۰, ۱۷].

---

[۴] Hirsh
[۵] Rigal
[۶] Manohar
[۷] Iyengar
[۸] Krishnaiah
[۹] Lax-Wendroff
[۱۰] Noye
[۱۱] Alternating Direction Implicit

اساس کار این پایان نامه ارائه ی یک طرح جدید برای حل معادله ی انتقال - پخش می باشد که گسسته سازی مکانی به کمک تفاضلات مرکزی انجام می شود و نشان داده می شود این روش غیرمشروط پایدار است. همچنین دینگ و ژانگ نیز با بکار بردن تکنیک های جدید، طرح تفاضلی جدیدی برای حل مسائل انتقال - پخش ارائه دادند که این طرح نیز غیرمشروط پایدار است، اما فرمول تفاضلی ارائه شده توسط دینگ و ژانگ نسبت به متغیر مکان طرح کم دقتی است لذا برای حل مسائل مناسب نمی باشد [۲۲, ۱۷, ۱۶].
قالب کلی این پایان نامه به صورت زیر است: در فصل اول ابتدا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تعریف می شود سپس برخی تعاریف و مقدمات مورد نیاز برای فصل های بعدی بیان می شود. در فصل دوم روش تابع گرین را بیان می کنیم همچنین به معرفی روشهای عددی حل معادله انتقال - پخش نیز می پردازیم، در فصل سوم به تحلیل پایداری طرح های تفاضلی بدست آمده در فصل دوم می پردازیم و نهایتاً در فصل چهارم چگونگی پیاده سازی و اجرای روش بر روی برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی بیان می شود و نتایج عددی مربوط به سه روش دینگ و ژانگ، کرانک نیکلسون و HOE (روش بکار رفته در این پایان نامه) را مقایسه خواهیم کرد.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱-۱ مقدمه

در این فصل، به اختصار به ارائه ی برخی مفاهیم مورد نیاز در سایر فصل ها شامل مفاهیم مربوط به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE[۱]) می پردازیم.

۱-۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

اکثر پدیده های فیزیکی چه در دینامیک سیالات، مغناطیس، مکانیک و نور باشد یا در شار گرما، با معادلات دیفرانسل با مشتقات جزئی توصیف می شوند. بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک نیز به صورت PDE می باشند، همچنین فرمول بندی ریاضی مسائل زیادی در علوم که شامل نرخ تغییرات، نسبت به دو یا تعداد بیشتری متغیر مستقل همانند طول، زمان یا زاویه می باشند منجر به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا مجموعه ای از چنین معادلاتی می شود.
معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادله ای است که شامل متغیر وابسته و متغیرهای مستقل و مشتقات جزئی متغیر وابسته نسبت به یک یا چند متغیر مستقل می باشد، که در حالت کلی به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$f(x, y, ..., u, u_x, u_y, ...u_{xx}, u_{yy}, ...) = 0, \qquad (۱-۱)$$

ملاحظه می کنیم که این معادله شامل متغیرهای مستقل مانند $x, y, ...$ و متغیر وابسته و مشتقات نسبی متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل است که به صورت $u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{yy}, ...$ نمایش داده شده اند.
معادله $(۱-۱)$ در یک دامنه مناسب D از فضای n بعدی $\mathbb{R}$ با مختصات $x, y, ...$ در نظر گرفته می شود.
منظور از حل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، پیدا کردن توابعی مانند $u = u(x, y, ...)$ است که در ناحیه D متحداً در معادله $(۱-۱)$ صدق می کنند چنین توابعی در صورت وجود، جواب های معادله $(۱-۱)$ نامیده می شوند. جوابی که در شرایط مورد نظر صدق کند، یک جواب خصوصی خواهد بود.

[۱] Partial Differential Equation

به عنوان مثال

$$uu_{xy} + u_x = y,$$

$$u_{xx} + ۲yu_{xy} + ۳xu_{yy} = ۴\sin x,$$

$$(u_x)^۲ + (u_y)^۲ = ۱,$$

$$u_{xx} - u_{yy} = ۰.$$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی هستند.

۱-۳ روشهای مختلف حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

روشهای زیادی برای حل یک PDE وجود دارد که مهمترین آنها روش هایی می باشند که PDE را به ODE تغییر می دهند. این تکنیک ها عبارتند از:

۱- جداسازی متغیرها: این تکنیک یک PDE با n متغیر را به n معادله دیفرانسیل معمولی تحویل می کند.

۲- تبدیل های انتگرالی: این روند یک PDE با n متغیر مستقل را به یک PDE با $n-۱$ متغیر تحویل می کند، از این رو یک PDE دو متغیره را می توان به یک ODE تغییر داد.

۳- تغییر مختصات: این روش با تغییر مختصات مسئله (مانند دوران) PDE را به یک ODE یا PDE دیگر تغییر می دهد.

۴- تبدیل متغیر وابسته: این روش مجهول یک PDE را به یک مجهول جدید که آسانتر بدست می آید تبدیل می کند.

۵- روشهای عددی: همیشه نمی توان یک PDE را به صورت تحلیلی بررسی و حل نمود، لذا بایستی که این معادلات به صورت عددی تحلیل و بررسی شوند. علاوه بر آن حالت هایی وجود دارد که جواب تحلیلی دارای ضابطه ی پیچیده ای است، بنابراین برای محاسبه جواب معادله در یک نقطه ی خاص روش های عددی ترجیح داده می شوند. معروف ترین روشهای موجود برای حل عددی چنین معادلاتی، روش تفاضل متناهی ([۲]FD)، روش عنصر متناهی ([۳]FE) و روش حجم متناهی ([۴]FV) می باشد.

۶- روش اختلال: این روش یک مسئله غیر خطی را به یک رشته مسائل خطی که مسئله غیر خطی را تقریب می کنند تغییر می دهد .

۷- معادلات انتگرال: این تکنیک یک PDE را به یک معادله انتگرال (معادله ای که در آن تابع مجهول داخل

---

[۲] Finite Difference
[۳] Finite Element
[۴] Finite Volome

انتگرال قرار دارد) تغییر می دهد. سپس معادله انتگرال با تکنیک های مختلف حل می شود.
۸- روشهای حساب تغییرات: این روشها جواب PDE را با تنظیم مجدد معادله به صورت یک مساله مینیمم سازی می یابند. معلوم می شود که مینیمم یک عبارت جواب PDE نیز هست.
۹- بسط تابع ویژه ای: این روش جواب یک PDE را به صورت یک مجموع نامتناهی از توابع ویژه می یابد. این توابع ویژه با حل آنچه به عنوان یک مسئله مقدار ویژه نظیر مسئله اصلی معروف است بدست می آیند.

برخی ویژگی های معادلات دیفرانسیل جزئی به شکل زیر است:

تعریف ۱.۱. مرتبه ی معادلات دیفرانسیل جزئی: مرتبه ی یک معادله دیفرانسیل مرتبه ی بالاترین مشتق جزئی در معادله است؛ مثلاً،

$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ (مرتبه دوم)

$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x},$ (مرتبه اول)

$\frac{\partial u}{\partial t}=u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\sin x.$ (مرتبه سوم)

تعریف ۲.۱. تعداد متغیرها: تعداد متغیرها، تعداد متغیرهای مستقل است؛ مثلاً،

$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ (دو متغیر: x و t)

$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$ (سه متغیر: r، θ و t)

تعریف ۳.۱. خطی یا غیرخطی بودن: یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی نامیده می شود، هرگاه نسبت به متغیر وابسته و مشتقات آن خطی باشد و ضرایب معادله تنها به متغیرهای مستقل بستگی داشته باشند. معادله ای که خطی نباشد غیر خطی نامیده می شود و معادله را شبه خطی می گویند هر گاه نسبت به بالاترین مشتق موجود در معادله خطی باشد. مثلاً،

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=e^{-y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos y,$ (خطی)

$u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=0,$ (نیمه خطی)

$u\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$ (غیر خطی)

طیف وسیعی از مدل ریاضی پدیده های فیزیکی معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی هستند که در قالب زیر می گنجد:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu+g=0, \quad (۱-۲)$$

برای معادله ی (۱ − ۲) مفهوم خطی و غیرخطی بودن به شکل زیر تبدیل می گردد.
اگر $a, b, ..., g$ اعداد ثابت یا توابعی فقط از x و y باشند معادله خطی است. اگر ضرایب مذکور توابعی فقط از x، y و u باشند معادله نیمه خطی ولی اگر توابعی از $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$، $\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}$، $\frac{\partial^{2} u}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}}$ باشند، غیر خطی گفته می شود.

تعریف ۴.۱. همگنی: معادله ی (۱ − ۲) را همگن نامند اگر $g(x, y)$ به ازای هر x و y متحد صفر باشد. در غیر این صورت معادله غیر همگن نامیده می شود.

تعریف ۵.۱. انواع ضرایب: هرگاه ضرایب a، b، c، d، e و f در معادله (۱ − ۲) ثابت باشند آنگاه گوییم (۱ − ۲) دارای ضرایب ثابت است. در غیر اینصورت گوییم ضرایب متغیر دارد.

معادله مرتبه دوم (۱ − ۲) در نقطه (x_{0}, y_{0}) بر حسب اینکه عبارت $\Delta = b^{2}(x_{0}, y_{0}) - 4a(x_{0}, y_{0})c(x_{0}, y_{0})$ یا به طور خلاصه $\Delta = b^{2} - 4ac$ دارای چه علامتی است به سه دسته تقسیم می شوند:
بیضوی: معادلات بیضوی بیانگر تعادل یا حالت دائمی مسائل می باشند و درخاصیت $b^{2} - 4ac < 0$ صدق می نمایند.
سهموی: معادلات سهموی روندهای انتقال گرما و پخش را توصیف و درخاصیت $b^{2} - 4ac = 0$ صدق می کنند.
هذلولوی: معادلات هذلولوی دستگاه های مرتعش و حرکت موج را توصیف و درخاصیت $b^{2} - 4ac > 0$ صدق می نمایند.
بطور مثال:

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}},$	$b^{2} - 4ac = 0$	(سهموی)
$\frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}} = \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}},$	$b^{2} - 4ac = 4 > 0$	(هذلولوی)
$\frac{\partial^{2} u^{2}}{\partial y^{2}} + y\frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}} + u^{2} = 0.$	$b^{2} - 4ac = -4 < 0$	(بیضوی)

معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی روی خط، صفحه و یا فضا تعریف می شوند. در بسیاری از کاربردها، مقادیر متغیر u در مرز ناحیه یا فضا یا روی خط معلوم می باشد. در برخی کاربردها نیز مقدار تابع u در نقطه شروع زمان و مکان معلوم می باشد. مسائل گروه اول، مسائل مقدار مرزی (BVP[5]) و مسائل گروه دوم را مسائل مقدار اولیه (IVP[6]) می نامیم.

---

[5] Boundary Value Problems
[6] Initial Value Problems

۱-۴ روشهای گسسته سازی و معادلات تفاضلی

مشتقات جزئی را می توان به وسیله ی تفاضلهای محدود به طرق مختلف تقریب زد. کلیه ی این روشها دارای خطای برشی هستند که با علامت O نمایش داده می شود. اگر تابع U و مشتقات آن به صورت توابعی متناهی و پیوسته از متغیر x باشند در این صورت به کمک بسط تیلور می توان $U(x-h)$ و $U(x+h)$ را حول x بدست آورد.
به معادلاتی که از بسط تیلور بدست می آیند معادلات تفاضلی گفته می شود.

$$U(x+h) = U(x) + hU'(x) + \frac{۱}{۲}h^۲U''(x) + \frac{۱}{۶}h^۳U'''(x) + O(h^۴), \qquad (۱-۳)$$

$$U(x-h) = U(x) - hU'(x) + \frac{۱}{۲}h^۲U''(x) - \frac{۱}{۶}h^۳U'''(x) + O(h^۴), \qquad (۱-۴)$$

از جمع روابط فوق و صرفنظر از جملات مرتبه ی بالاتر، رابطه ی زیر بدست می آید:

$$U(x+h) + U(x-h) = -۲U(x) + h^۲U''(x) + O(h^۴), \qquad (۱-۵)$$

که در آن $O(h^۴)$ بیانگر مرتبه ی خطای برشی است و اینکه جملات باقیمانده، شامل توان های چهارم و بیشتر می باشد.

$$U^{''}(x) = \frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲} = \frac{۱}{h^۲}(U(x+h) - ۲U(x) + U(x-h)) + O(h^۲), \qquad (۱-۶)$$

معادله فوق یک معادله تفاضلی برای تقریب $U''(x)$ است. با کم کردن روابط $(۱-۳)$ و $(۱-۴)$ و صرفنظر کردن از جملات مرتبه ی بالاتر روابط زیر بدست می آید:

$$U(x+h) - U(x-h) = ۲hU'(x) + O(h^۳), \qquad (۱-۷)$$

$$U'(x) = \frac{۱}{۲h}(U(x+h) - U(x-h)) + O(h^۲), \qquad (۱-۸)$$

معادله (۱ − ۸) معادله ی تفاضل مرکزی [۷] نامیده می شود. همچنین از روابط (۱ − ۳) و (۱ − ۴) معادله زیر را می توان بدست آورد،

$$U'(x) = \frac{۱}{h}(U(x+h) - U(x)) + O(h), \qquad (۱-۹)$$

که این معادله، معادله تفاضلی پیشرو [۸] نامیده می شود. همچنین می توان معادله ای به صورت زیر بدست آورد،

$$U'(x) = \frac{۱}{h}(U(x) - U(x-h)) + O(h), \qquad (۱-۱۰)$$

که این معادله نیز معادله تفاضلی پسرو [۹] نامیده می شود. معادلات (۱ − ۹) و (۱ − ۱۰) نشان می دهند که خطای برشی تقریبهای پیشرو و پسرو از مرتبه ی h می باشند.

۱-۵ نماد گذاری برای توابع چند متغیره

فرض کنید U تابعی از متغیرهای مستقل x و y باشد. صفحه xy را یک سری خطوط متساوی الفاصله موازی با محور oy بصورت $x_i = ih$ ، $i = ۰, \pm۱, \pm۲, ...$ و یک سری خطوط متساوی الفاصله موازی با محور ox به صورت $y_j = jk$ ، $j = ۰, \pm۱, \pm۲, ...$ مطابق شکل ۱ − ۱ تقسیم بندی می کنند. در ضمن $k = \delta t$ و $h = \delta x$ مقدار تابع U در نقطه مشخص شده $P(ih, jk)$ به صورت $U_P = U(ih, jk) = U_{i,j}$ نمایش داده می شود.

حال به کمک رابطه ی (۱ − ۶) می توان نوشت:

$$(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲})_P = (\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲})_{i,j} = \frac{U(ih+h, jk) - ۲U(ih, jk) + U(ih-h, jk)}{h^۲},$$

یعنی:

$$(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲})_{i,j} = \frac{U_{i+۱,j} - ۲U_{i,j} + U_{i-۱,j}}{h^۲},$$

[۷] Central Difference Formula
[۸] Forward Difference Formula
[۹] Backward Difference Formula

فرمول فوق دارای خطای برشی از مرتبه $h^۲$ است. بطور مشابه:

$$(\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲})_{i,j} = \frac{U_{i,j+۱} - ۲U_{i,j} + U_{i,j-۱}}{k^۲},$$

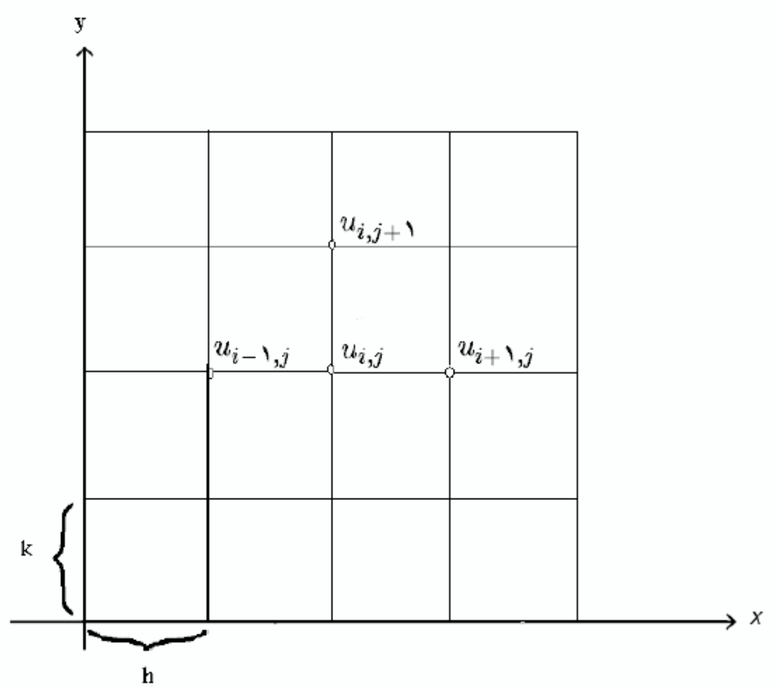
که دارای خطای برشی از مرتبه $k^۲$ است.

با این نمادگذاریها تقریبهای پیشرو و پسرو برای تابع $\frac{\partial U}{\partial y}$ در نقطه P به صورت زیر است:

$$(\frac{\partial U}{\partial y})_{i,j} = \frac{U_{i,j+۱} - U_{i,j}}{k},$$

$$(\frac{\partial U}{\partial y})_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-۱}}{k},$$

خطای برشی دو روش فوق از مرتبه k می باشد.



شکل ۱-۱: شبکه بندی محور x و y در یک گام زمانی.