بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه زنجان

دانشکده علوم- گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد

عنوان:

خودریختی‌های مرکزی گروههای متناهی

دانشجو:

خیرالنسا محمدیان

استاد راهنما:

دکتر سید مجید جعفریان امیری

استاد مشاور:

دکتر عباس جعفرزاده

مهر ۱۳۹۰

تقدیم به:

روح پاک پدرم؛
مادرم، به پاس زحمات بی‌شائبه‌اش؛
و تمامی اعضای خانواده‌ام.

سپاسگزاری

سپاس خداوند متعال راست که اندیشه را سرمایه‌ی جان آدمی ساخت برای کشف رمز اعداد و چینش آن‌ها در قالبی به نام فرمول زندگی. با امید به اینکه این بنده‌ی حقیر نیز شامل این سرمایه بوده باشد. وظیفه‌ی خود میدانم از تمام کسانی که در مراحل انجام این کار مرا یاری رسانیده‌اند تقدیر و تشکر نمایم.

بدین منظور از استاد راهنمای دلسوزم آقای دکتر جعفریان امیری که در تمام این مدت صبورانه من را یاری رسانیده و در جهت بهتر شدن کار همیشه از راهنمایی‌های ایشان استفاده نموده‌ام کمال تشکر را دارم.

همچنین از استاد مشاورم آقای دکتر جعفرزاده و اساتید محترم آقایان دکتر آرین نژاد و دکتر اسم خانی به خاطر زحمت داوری پایان نامه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه ما گروه خودریختی‌های مرکزی گروه‌های متناهی و ساختار آن در حالت‌های مختلف را مطالعه می‌کنیم و سپس به بررسی ارتباط بین گروه خودریختی‌های مرکزی با گروه خودریختی‌های داخلی، مرکز گروه خودریختی‌های داخلی و گروه شامل خودریختی‌های مرکزی که مرکز را به‌طور نقطه‌وار ثابت نگه می‌دارند، می‌پردازیم. همچنین شرایط لازم و کافی برای این‌که گروه خودریختی‌های مرکزی با گروه‌های ذکر شده برابر باشد بدست می‌آوریم. از طرفی به بررسی پوچتوانی و حلپذیری گروه خودریختی‌های مرکزی پرداخته و در آخر مثال‌هایی از $p-$گروه‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که گروه خودریختی‌های آنها با گروه خودریختی‌های مرکزیشان برابر است.

کلمات کلیدی: گروه خودریختی‌های مرکزی، گروه به‌طورمطلق‌غیرآبلی، گروه خاص، گروه پوچتوان، گروه حلپذیر.

فهرست مطالب

مقدمه

قبل از این‌که شرح مختصری از این پایان‌نامه را بیان کنیم لازم است بگوییم که ما در سراسر این پایان‌نامه با گروه‌های متناهی سروکار داریم.

خودریختی σ از گروه G را مرکزی نامیم، اگر σ با هر خودریختی داخلی در $Inn(G)$ جابه‌جا شود. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های مرکزی G را با $Aut_c(G)$ نشان می‌دهیم.

برای اولین بار، در سال ۱۹۰۸، پی هیلتن [۱] این سوال را مطرح کرد که آیا گروه غیرآبلی Gای وجود دارد که $Aut(G)$ آبلی باشد؟

در سال ۱۹۱۳ به این سوال توسط میلر [۲] در مرجع [۱۷] پاسخ مثبت داده شد. میلر یک ۲$-$گروه غیرآبلی از اندازه‌ی $۲^۶$ ساخت که دارای $Aut(G)$ آبلی و از اندازه‌ی $۲^۷$ است. البته در مرجع [۱۵] مثال‌های بیشتری از چنین ۲$-$گروه‌هایی توسط علیرضا جمالی در سال ۲۰۰۲ ساخته شده است.

اگر $Aut(G)$ آبلی باشد، $Aut_c(G) = Aut(G)$ و در مقاله‌های مختلف توسط موریجی [۳] در مرجع [۱۸]، میلر و کوران [۴] این حالت در نظر گرفته شده است. اما اگر $Aut(G)$ غیرآبلی هم باشد، ممکن است $Aut_c(G) = Aut(G)$ باشد. این حالت در مقاله‌های مختلف توسط کوران در مرجع [۶]، مالون [۵] در مرجع [۱۶] و گلسبی [۶] در نظر گرفته شده است.

در سال ۱۹۷۵، ارنلی [۷] مطالعات خود را روی $p-$گروه‌های G که $Aut(G)$ آبلی است گسترش داده و ثابت کرد:

الف) گروهی از اندازه‌ی p^5 یافت نمی‌شود که $Aut(G)$ آبلی باشد.

ب) برای هر عدد صحیح مثبت n که $n \geq ۴$، یک $p-$گروه G با n مولد یافت می‌شود که $Aut(G)$ آبلی است.

[۱] P. Hilton
[۲] Miller
[۳] Morigi
[۴] Curran
[۵] Malone
[۶] Glasby
[۷] Earnley

در سال ۱۹۹۴، موریجی [۸] در مرجع [۱۷] ثابت کرد گروهی از اندازه‌ی p^{6} به‌طوری‌که $Aut(G)$ آبلی باشد وجود ندارد و $p-$گروه‌هایی از اندازه‌ی $p^{n^{2}+3n+3}$ ساخت که $Aut(G)$ آبلی است(در این‌جا $n \geq 1$ و p فرد است). او در همین سال ثابت کرد که مینیمال اندازه‌ی یک $p-$گروه که $Aut(G)$ آبلی است p^{7} می‌باشد. یک سال بعد، یعنی در سال ۱۹۹۵، موریجی ثابت کرد مینیمال مولد یک $p-$ گروه که $Aut(G)$ آبلی است چهار می‌باشد.

هدف اصلی این پایان‌نامه خودریختی‌های مرکزی می‌باشد که بنا به ضرورت به گروه خودریختی‌های یک گروه نیز می‌پردازیم.

این پایان‌نامه شامل ۴ فصل همراه با بخش هایی به شرح زیر می‌باشد:

فصل اول شامل ۳ بخش، مفاهیم و قضایای مقدماتی مربوط به جابه‌جاگرها و گروه‌های پوچتوان، مقدماتی از همریختی‌ها و خودریختی‌های گروه‌ها که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌باشد.

فصل دوم شامل ۶ بخش می‌باشد. در بخش اول مفاهیم و قضایای مقدماتی در مورد خودریختی‌های مرکزی بیان شده است. در بخش دوم به بررسی ساختار و اندازه‌ی گروه خودریختی‌های مرکزی می‌پردازیم. در بخش سوم گروه‌هایی که گروه خودریختی‌های مرکزی آنها آبلی‌مقدماتی است را مورد بررسی قرار داده و در بخش چهارم، پنجم و ششم به‌ترتیب رابطه گروه خودریختی‌های مرکزی با گروه خودریختی‌های داخلی، مرکز گروه خودریختی‌های داخلی و خودریختی‌های مرکزی که مرکز را به‌طور نقطه‌وار ثابت نگه می‌دارند، می‌پردازیم.

فصل سوم شامل ۲ بخش می‌باشد که در بخش اول و دوم به‌ترتیب پوچتوانی و حلپذیری گروه خودریختی‌های مرکزی گروه‌های متناهی را بیان می‌کنیم.

فصل چهارم شامل ۲ بخش می‌باشد که در بخش اول $p-$ گروه‌هایی که گروه خودریختی‌های آنها آبلی و برابر با گروه خودریختی‌های مرکزیشان است مورد بررسی قرار گرفته و در بخش دوم $p-$ گروه‌هایی که گروه خودریختی‌های آنها غیرآبلی و برابر با گروه خودریختی‌های مرکزیشان است در نظر گرفته شده است.

[۸] Morigi

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

در این فصل به ذکر تعاریف، لم‌ها و قضایای مورد نیاز در این پایان‌نامه می‌پردازیم.

۱.۱ مقدماتی از جابه‌جاگرها و گروه‌های پوچتوان

تعریف. فرض کنید G یک گروه باشد. سری نرمال

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_r = G$$

را یک سری مرکزی G گوییم، در صورتی که به ازای هر i، $1 \leq i \leq r$،

$$\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-1}}).$$

تعریف. گروه G را پوچتوان نامیم، در صورتی که یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی G را رده‌ی پوچتوانی G گویند.

تعریف. (سری مرکزی بالایی) فرض کنید G یک گروه باشد. سری نرمال

$$1 = Z_0(G) \trianglelefteq Z_1(G) \trianglelefteq \dots \trianglelefteq Z_i(G) \trianglelefteq \dots$$

که در این‌جا به ازای هر $i \geq 0$،

$$\frac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} = Z(\frac{G}{Z_i(G)}), \quad Z_1(G) = Z(G)$$

سری مرکزی بالایی برای G می‌نامیم.

تعریف. فرض کنید G یک گروه و $x, y \in G$. دراین‌صورت $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$ را جابه‌جاگر x و y می‌نامیم. زیرگروه G که توسط تمام $[x,y]$ها پدید می‌آید زیرگروه جابه‌جاگر یا مشتق نامیده می‌شود که با G' نمایش داده می‌شود یعنی:

$$G' =< [x,y] | x, y \in G > .$$

تعریف. (جابه‌جاگر دو زیرگروه) فرض کنید G یک گروه و H و K زیرگروههای G باشند. دراین‌صورت جابه‌جاگر H و K که با $[H,K]$ نمایش داده می‌شود عبارت است از:

$$[H,K] =< [h,k] \big| h \in H, k \in K > .$$

تعریف. (سری مرکزی پایینی) برای گروه دلخواه G، سری نرمال

$$G = \gamma_1(G) \trianglerighteq \gamma_2(G) \trianglerighteq ... \trianglerighteq \gamma_i(G) \trianglerighteq ...$$

که در این‌جا به ازای هر $i > 1$،

$$\gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G]$$

سری مرکزی پایینی برای G می‌نامیم.

نتیجه ۱.۱.۱. *اگر c کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد به‌طوری‌که $\gamma_{c+1}(G) = 1$، آن‌گاه رده‌ی پوچتوانی G برابر با c خواهد بود.*

لم ۲.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه از رده‌ی پوچتوانی حداکثر ۲ باشد. برای هر $x, y, z \in G$، $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم:*

الف) $[x, yz] = [x,z][x,y]$.

ب) $[xy, z] = [x,z][y,z]$.

ج) $[x, y^m] = [x^m, y] = [x,y]^m$.

د) $(xy)^n = x^n y^n [y,x]^{\binom{n}{2}}$.

برهان. الف) به‌وضوح با استفاده از روابط بین جابه‌جاگرها، $[x, yz] = [x,z][x,y]^z$. اما چون G

یک گروه از رده‌ی پوچتوانی ۲ است،

$$۱ = \gamma_۳(G) = [\gamma_۲(G), G] = [G', G].$$

لذا $G' \leq Z(G)$. حال چون $[x, y] \in G'$، $[x, y] \in Z(G)$. درنتیجه $[x, y]^z = [x, y]$. بنابراین، $[x, yz] = [x, z][x, y]$.

ب) به‌وضوح $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$. باز هم بنا به این‌که G یک گروه از رده‌ی پوچتوانی ۲ است، $G' \leq Z(G)$. بنابراین، $[x, z]^y = [x, z]$. درنتیجه $[xy, z] = [x, z][y, z]$.

ج) برای اثبات این قسمت، از استقرا روی m استفاده می‌کنیم که برای ۱ $= m$ به‌وضوح حکم برقرار است. فرض می‌کنیم (فرض استقرا) حکم برای اعداد صحیح کمتر از m برقرار باشد. برای عدد صحیح m داریم،

$$[x, y^m] = [x, y^{m-۱}y] \overset{\star}{=} [x, y][x, y^{m-۱}] \overset{\star\star}{=} [x, y][x, y]^{m-۱} = [x, y]^m.$$

تساوی $\star$ با توجه به قسمت (الف)، برقرار است.

تساوی $\star\star$ با توجه به فرض استقرا، برقرار است.

$$[x^m, y] = [x^{m-۱}x, y] = [x^{m-۱}, y][x, y] = [x, y]^{m-۱}[x, y] = [x, y]^m.$$

بنابراین، $[x, y^m] = [x^m, y] = [x, y]^m$.

د) برای اثبات این قسمت نیز از استقرا استفاده می‌کنیم که برای ۱ $= n$ به‌وضوح حکم برقرار است. فرض می‌کنیم (فرض استقرا) حکم برای اعداد صحیح کمتر از ۱ $+ n$ برقرار باشد. برای عدد صحیح ۱ $+ n$ داریم،

$$(xy)^{n+۱} = (xy)^n(xy) \overset{\star}{=} x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{۲}}(xy) \overset{\star\star}{=} x^n(y^n x)y[y, x]^{\binom{n}{۲}}.$$

تساوی $\star$ با توجه به فرض استقرا، برقرار است.

تساوی $\star\star$ با توجه به این‌که $[y, x]^{\binom{n}{۲}} \in G' \leq Z(G)$، برقرار است.

چون $[y^n, x] = [y, x]^n$، $y^n x = xy^n[y, x]^n$. بنابراین،

$$(xy)^{n+۱} = x^n xy^n[y, x]^n y[y, x]^{\binom{n}{۲}} = x^{n+۱}y^{n+۱}[y, x]^{n+\binom{n}{۲}} = x^{n+۱}y^{n+۱}[y, x]^{\binom{n+۱}{۲}}.$$

(در اینجا توجه داریم که اگر G یک گروه از رده‌ی پوچتوانی یک باشد، آبلی بوده و بوضوح حکم برای آن برقرار است.) □

تعریف. گروه آبلی متناهی G از رتبه‌ی[۱] n است، اگر G مجموع مستقیم n تا از زیرگروه‌های دوری باشد. در این‌جا n کمترین مقدار ممکن است.

تعریف. کوچکترین مقدار عدد صحیح n به‌طوری‌که به ازای هر $x \in G$، $x^n = ۱$ باشد را نمای G [۲] می‌نامیم و آن را با $exp(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۱.۱. *(قضیه‌ی بنیادی $p-$ گروه‌های آبلی متناهی) فرض کنید G یک $p-$گروه آبلی متناهی غیربدیهی باشد. دراین‌صورت یک عدد صحیح $n \geq ۱$ و اعداد صحیح $e_۱, ..., e_n$ که در این‌جا برای هر $۱ \leq i \leq n$، $e_i \geq ۱$ است وجود دارند به طوری که G با حاصلضرب مستقیم n تا از کپی‌های گروه دوری $C_{p^{e_i}}$ یکریخت است. به‌علاوه عدد صحیح n و اعداد صحیح p^{e_i} به‌طور یکتا تعین می‌شوند.(در این حالت ما می‌گوییم G از نوع $(p^{e_۱}, ..., p^{e_n})$. در این‌جا p^{e_i}، $۱ \leq i \leq n$ را پایاهای G گوییم.)*

تعریف. با توجه به نمادهای در قضیه‌ی بالا، یک $p-$گروه آبلی متناهی را هم‌دوری[۳] از نوع p^e گوییم، اگر برای هر $۱ \leq i \leq n$، $e_i = e$ باشد.

تعریف. فرض کنید G یک $p-$ گروه آبلی متناهی از نوع $(p^n, p, ..., p)$ باشد که در این‌جا $n > ۱$. اگر $G = A \times B$ باشد به‌طوری‌که در این‌جا A دوری از اندازه‌ی p^n و B آبلی‌مقدماتی است، ما می‌گوییم A و B به‌ترتیب قسمت دوری و مقدماتی G هستند. چنین گروهی را $ce-$گروه می‌نامیم.

قضیه ۴.۱.۱. *اگر G یک $p-$گروه متناهی پوچتوان از رده‌ی پوچتوانی ۲ باشد، آن‌گاه*

الف) $exp(G') = exp(\frac{G}{Z(G)})$.

ب) تجزیه‌ی $\frac{G}{Z(G)}$ به حاصل ضرب مستقیم $p-$گروه‌های دوری، حداقل دارای دو عامل از اندازه‌ی ماکسیمال می‌باشد. یعنی اگر $exp(\frac{G}{Z(G)}) = p^c$ باشد، آن‌گاه تجزیه‌ی $\frac{G}{Z(G)}$ به شکل $C_{p^c} \times C_{p^c} \times C$، که C یک $p-$گروه آبلی (یا احتمالاً بدیهی) است، می‌باشد.

برهان. الف) از این‌که G متناهی است فرض می‌کنیم $G =< x_۱, x_۲, ..., x_n >$. بنابراین، $\frac{G}{Z(G)} =< x_۱Z(G), x_۲Z(G), ..., x_nZ(G) >$. از این‌که $G =< x_۱, x_۲, ..., x_n >$ بنا

[۱] Rank
[۲] exponent(G)
[۳] homocyclic

به لم ۲.۱.۱، $G' =< [x_i, x_j] | i, j = ۱, ۲, ..., n >$. فرض می‌کنیم $exp(\frac{G}{Z(G)})$ و $exp(G')$ به‌ترتیب برابر با n و m باشند. نشان می‌دهیم $m = n$. بنا به لم ۲.۱.۱، به ازای هر $[x_i, x_j] \in G'$، $[x_i, x_j]^n = [x_i^n, x_j]$. از طرفی به ازای هر $i = ۱, ۲, ۳, ..., n$، چون $exp(\frac{G}{Z(G)})$ برابر با n است،

$$Z(G) = (x_i Z(G))^n = x_i^n Z(G) \Rightarrow x_i^n \in Z(G) \Rightarrow (x_i^n)^{-۱} \in Z(G).$$

بنابراین به ازای هر $i = ۱, ۲, ۳, ..., n$،

$$[x_i, x_j]^n = [x_i^n, x_j] = (x_i^n)^{-۱} x_j^{-۱} x_i^n x_j = ۱.$$

از این‌که به ازای هر $i, j = ۱, ۲, ..., n$، $[x_i, x_j]$ مولدهای G' و $G' \leq Z(G)$، $exp(G') \big| n$.
اکنون نشان می‌دهیم $exp(\frac{G}{Z(G)}) \big| m$. از این‌که $exp(G') = m$، به ازای هر $i, j = ۱, ۲, ..., n$ داریم $[x_i^m, x_j] = [x_i, x_j]^m = ۱$. بنابراین، $(x_i^m)^{-۱}(x_j)^{-۱} x_i^m x_j = ۱$. حال بنا به این‌که به ازای هر $۱ \leq j \leq n$، x_jها مولدهای G می‌باشند، $x_i^m \in Z(G)$. بنابراین،

$$Z(G) = x_i^m Z(G) = (x_i Z(G))^m$$

و چون $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی است، $exp(\frac{G}{Z(G)}) | m$. درنتیجه $m = n$.
(ب) به مرجع [۳] رجوع شود. □

قرارداد. اگر G یک $p-$ گروه غیرآبلی پوچتوان از رده‌ی پوچتوانی ۲ باشد، از این به بعد فرض می‌کنیم $exp(G') = exp(\frac{G}{Z(G)}) = p^c$ باشد. همچنین رتبه‌های $\frac{G}{Z(G)}$، G' و $Z(G)$ را به‌ترتیب برابر با r، d و z قرار می‌دهیم. اگر $r = ۱$ باشد، آن‌گاه $\frac{G}{Z(G)}$ دوری است. درنتیجه G آبلی و تناقض با این‌که ما G را غیرآبلی فرض کرده بودیم، می‌باشد. بنابراین، $r \geq ۲$. چون G پوچتوان از رده‌ی پوچتوانی ۲ است، $G' \leq Z(G)$. درنتیجه $Z(G)$ دارای نمای حداقل p^c است.

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه غیربدیهی متناهی باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر دوبه‌دو با هم معادلند:*
الف) G پوچتوان است؛
ب) هر زیرگروه ماکسیمال G، نرمال است؛
ج) هر $p-$ زیرگروه سیلوی G، نرمال است؛
د) هر دو عضو G که اندازه‌هایشان نسبت به هم اولند، با هم جابه‌جا می‌شوند؛

و) G حاصلضرب مستقیم زیرگروههای سیلوی خود است.

برهان. به قضیه‌ی ۸.۱.۱۰ در مرجع [۲۳] رجوع شود. $\square$

تعریف. فرض کنید G یک گروه باشد. اشتراک همه‌ی زیرگروه های ماکسیمال G را زیرگروه فراتینی G گویند و آن را با علامت $\Phi(G)$ نشان می‌دهند. هرگاه G فاقد زیرگروه ماکسیمال باشد، بر طبق قرارداد $\Phi(G) = G$.

لم ۶.۱.۱. *اگر G یک $p-$گروه باشد، آن‌گاه زیرگروه فراتینی G کوچکترین زیرگروه نرمال از G است به‌طوری‌که گروه خارج قسمتی آن آبلی‌مقدماتی است.*

برهان. فرض می‌کنیم N یک زیرگروه نرمال از G باشد به‌طوری‌که $\frac{G}{N}$ آبلی‌مقدماتی است. با توجه به ۱۳.۲.۵ در مرجع [۲۰] و با توجه به این‌که زیرگروه فراتینی هر گروه آبلی‌مقدماتی ۱ می‌باشد،

$$۱ = \Phi(\frac{G}{N}) \geq \frac{\Phi(G)N}{N}.$$

درنتیجه $\Phi(G) \leq N$. $\square$

تعریف. اگر X زیر مجموعه‌ای از G و $G =< g, X >$ نتیجه دهد $G =< X >$، آن‌گاه g را عنصر نامولد G می‌نامیم.

قضیه ۷.۱.۱. *برای هر گروه G، زیرگروه فراتینی با مجموعه‌ی عناصر نامولد G برابر است.*

برهان. به قضیه‌ی ۱۲.۲.۵ در مرجع [۲۰] رجوع شود. $\square$

قضیه ۸.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. دراین‌صورت G پوچتوان است اگروفقط‌اگر* $G' \leq \Phi(G)$.

برهان. به قضیه‌ی ۱۶.۲.۵ در مرجع [۲۰] رجوع شود. $\square$

قضیه ۹.۱.۱. *فرض کنید G یک $p-$گروه متناهی باشد. دراین‌صورت،* $\Phi(G) = G'G^p$.
($G^p =< x^p | x \in G >$.)

برهان. به قضیه‌ی ۶.۳.۱۰ در مرجع [۲۳] رجوع شود. $\square$

تعریف. برای هر عدد اول p، $p-$گروه متناهی G خاص [۴] نامیده می‌شود اگر مرکز، زیرگروه فراتینی و زیرگروه مشتق آن با هم برابر باشند. اگر این زیرگروه‌ها با هم برابر و دوری از اندازه‌ی p باشند، این $p-$گروه متناهی را ابرخاص [۵] گویند. یعنی:

$$\Phi(G) = Z(G) = G' \cong C_p.$$

گزاره ۱۰.۱.۱. *هر گروه غیرآبلی از اندازه‌ی $p^۳$، ابرخاص است.*

برهان. اگر G یک گروه غیرآبلی از اندازه‌ی $p^۳$ باشد، چون G یک $p-$گروه است $Z(G) \neq ۱$ و درنتیجه اندازه‌ی $\frac{G}{Z(G)}$ برابر با p یا $p^۲$ است. اگر برابر با p باشد، نتیجه می‌شود G آبلی است و این تناقض است. درنتیجه اندازه‌ی $\frac{G}{Z(G)}$ برابر با $p^۲$ خواهد بود. لذا $Z(G) \cong C_p$. حال از این‌که $\frac{G}{Z(G)}$ گروهی آبلی است، $G' \leq Z(G)$ است و بنا به این‌که $G' \neq ۱$، $G' = Z(G)$. اکنون از این‌که $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی‌مقدماتی و $\Phi(G)$ کوچکترین زیرگروه نرمال از G است که گروه خارج قسمتی آن آبلی‌مقدماتی است، $G' \leq \Phi(G) \leq Z(G)$. درنتیجه

$$\Phi(G) = Z(G) = G' \cong C_p.$$

□

قضیه ۱۱.۱.۱. *اگر $G =< X|R >$ و $C = \{[x, y] \big| x, y \in X, y \neq x\}$ باشد، آن‌گاه*

$$\frac{G}{G'} \cong < X|R \cup C > .$$

برهان. به قضیه‌ی ۴.۲.۷ در مرجع [۲۳] رجوع شود. □

تعریف. $p-$گروه متناهی G را منظم [۶] گوییم، اگر به ازای هر $a, b \in G$، عنصر c در زیرگروه مشتق H' از زیرگروه H از G تولید شده توسط a, b موجود باشد به‌طوری‌که $a^p.b^p = (ab)^p.c^p$.

لم ۱۲.۱.۱. *فرض می‌کنیم G یک $p-$گروه از رده‌ی پوچتوانی حداکثر ۲ باشد. اگر G' آبلی‌مقدماتی باشد، آن‌گاه G منظم است(p یک عدد اول فرد است).*

---

[۴] Special

[۵] Extra-Special

[۶] Regular

برهان. بنا به لم ۲.۱.۱، به ازای هر $x, y \in G$ داریم

$$(xy)^p = x^p y^p [x,y]^{\frac{1}{2}p(p-1)}.$$

چون G'، $p-$گروه آبلی‌مقدماتی است، نمای آن p است. از طرفی p یک عدد اول فرد است. بنابراین، $[x,y]^{\frac{1}{2}p(p-1)} = 1$. درنتیجه $(xy)^p = x^p y^p$ و بنا به تعریف $p-$گروه منظم، G منظم خواهد بود. □

۲.۱ مقدماتی از همریختی گروهها

لم ۱.۲.۱. *فرض می‌کنیم C, B, A، گروه‌های آبلی باشند. دراین‌صورت*

الف) $Hom(A \times B, C) \cong Hom(A, C) \times Hom(B, C)$.

ب) $Hom(A, B \times C) \cong Hom(A, B) \times Hom(B, C)$.

ج) $Hom(C_{p^m}, C_{p^n}) \cong C_{p^{min(m,n)}}$،

د) $Hom(A, B) \cong Hom(B, A)$.

و) *اگر B یک زیرگروه خارج قسمتی از A باشد، آن‌گاه $Hom(B, U)$ که در این‌جا U گروهی آبلی است، یک زیرگروه از $Hom(A, U)$ می‌باشد.*

ه) *فرض می‌کنیم U, A، $p-$گروه‌های آبلی غیربدیهی باشند. اگر B زیرگروه سره (خارج قسمتی) از A و V زیرگروه سره (خارج قسمتی) از U باشد، آن‌گاه $Hom(B, V)$ با زیرگروه سره‌ای از $Hom(A, U)$ یکریخت است. هر چند اگر $Min(\frac{|A|}{|B|}, \frac{|U|}{|V|}) = p^m$ باشد، آن‌گاه p^m، $\frac{|Hom(A,U)|}{|Hom(B,V)|}$ را عاد می‌کند.*

برهان. قسمت (الف) و (ب) با توجه به قضیه‌ی ۷.۴.۴ در مرجع [۲۵]، بدیهی است. قسمت (ج) با توجه به (الف) و (ب) و چون A, B گروه‌های آبلی بوده و می‌توان آنها را به حاصل‌ضرب گروه‌های دوری تجزیه‌ی کرد، برقرار می‌باشد.

(د) برای اثبات این قسمت فرض کنید $C_{p^m} = < a >$. برای هر $1 \neq c \in C_{p^n}$ به‌طوری‌که $|c|\,\big|\,|a|$ ما همریختی غیربدیهی $T_c : C_{p^m} \to C_{p^n}$ به‌طوری‌که $T_c(a) = c$ را خواهیم داشت. اگر $m \geq n$ باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $1 \neq c \in C_{p^n}$، $|c|\,\big|\,p^n$ و بنابراین $|c|\,\big|\,p^m$. لذا $|Hom(C_{p^m}, C_{p^n})| = p^n$.

فرض کنید $C_{p^n} =< b >$ و $T_b(a) = b$. اگر $c \in C_{p^n}$ دلخواه باشد، آنگاه $c = rb$. بنابراین $T_c(a) = T_{rb}(a) = rb = rT_b(a)$. لذا $Hom(C_{p^m}, C_{p^n}) =< T_b >$. با توجه به قسمت (ج) اگر $n \geq m$ باشد، اثبات واضح است.

(و) اگر B یک زیرگروه خارج قسمتی از A باشد، آن‌گاه

$$\circ \longrightarrow ker(g) \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \longrightarrow \circ$$

یک دنباله‌ی کامل بوده و درنتیجه بنا به ۳.۴.۴ در مرجع [۲۵]،

$$\circ \longrightarrow Hom(B,U) \xrightarrow{\bar{g}} Hom(A,U) \xrightarrow{\bar{f}} Hom(ker(g),U)$$

یک دنباله‌ی کامل است. لذا بنا ۱۶.۱.۴ در مرجع [۲۵]، $Hom(B,U) \leq Hom(A,U)$.

(ه) ابتدا فرض می‌کنیم اندیس B در A و V در U برابر با p باشد. اگر B یک عامل مستقیم از A باشد، اثبات با توجه به قسمت (الف) برقرار است. (به‌طور مشابه اگر V یک عامل مستقیم از U باشد.) درغیراین‌صورت، برای یک S و i، $A \cong S \times C_{p^{i+1}}$ و $B \cong S \times C_{p^i}$ و برای یک T و j، $U \cong T \times C_{p^{j+1}}$ و $V \cong T \times C_{p^j}$. دراین‌صورت با محاسبه‌ی $Hom(A,U)$ و $Hom(B,V)$ داریم

$$\begin{aligned} Hom(A,U) \cong Hom(S,T) \times Hom(S,C_{p^{j+1}}) \times Hom(C_{p^{i+1}},T)\times \\ Hom(C_{p^{i+1}},C_{p^{j+1}}), \end{aligned}$$

$$Hom(B,V) \cong Hom(S,T) \times Hom(S,C_{p^j}) \times Hom(C_{p^i},T) \times Hom(C_{p^i},C_{p^j}).$$

همان گونه که در بالا نیز مشاهده می‌کنیم، همه‌ی عامل‌های در $Hom(B,V)$ زیرگروهی از عامل‌های در $Hom(A,U)$ می‌باشند. ولی حداقل یک عامل در $Hom(B,V)$ است به‌طوری‌که زیرگروه سره‌ای از یکی از عامل‌های در $Hom(A,U)$ می‌باشد. لذا $Hom(B,V)$ زیرگروه سره‌ای از $Hom(A,U)$ خواهد بود.

حال فرض می‌کنیم $Min(\frac{|A|}{|B|}, \frac{|U|}{|V|}) = p^m$. ثابت می‌کنیم p^m، $\frac{|Hom(A,U)|}{|Hom(B,V)|}$ را عاد می‌کند. برای انجام اثبات، از استقرا روی m استفاده می‌کنیم. برای $m = ۱$، بنا به آنچه در بالا گفتیم، حکم

برقرار است. فرض می‌کنیم فرض استقرا برقرار باشد و نشان می‌دهیم اگر برای $m > ۱$،

$$\frac{|A|}{|B|} = \frac{|U|}{|V|} = p^m$$

باشد، آن‌گاه p^m، $\frac{|Hom(A,U)|}{|Hom(B,V)|}$ را عاد می‌کند. در این حالت A دارای یک زیرگروه ماکسیمال مانند C است به‌طوری‌که $\frac{|C|}{|B|} = p^{m-۱}$. لذا با توجه به فرض استقرا داریم

$$p^{m-۱}\Big|\frac{|Hom(C,U)|}{|Hom(B,V)|}.$$

چون C یک زیرگروه ماکسیمال از A و $\frac{|A|}{|C|} = p$، با توجه به پایه‌ی استقرا داریم، $p\Big|\frac{|Hom(A,U)|}{|Hom(C,V)|}$. بنا به اینکه $|Hom(C,V)| \geq |Hom(C,U)|$ و $p^m\Big|\frac{p|Hom(C,U)|}{|Hom(B,V)|}$،

$$p^m\Big|\frac{|Hom(A,U)|}{|Hom(B,V)|}.$$

□

قضیه ۲.۲.۱. *فرض کنید K یک $p-$گروه آبلی متناهی با نمای p^c و A یک گروه دوری باشد که اندازه‌اش توسط p^c عاد می‌شود. دراین‌صورت $Hom(K, A) \cong K$.*

برهان. چون طبق فرض اندازه گروه دوری A توسط p^c عاد می‌شود، عدد صحیح نامنفی mی وجود دارد به‌طوری‌که $|A| = p^c m$. طبق قضیه بنیادی از $p-$گروه‌های آبلی متناهی،

$$K = K_۱ \times K_۲ \times K_۳ \times ... \times K_s,$$

که در این‌جا K_iها دوری و از اندازه‌ی توانی از p می‌باشند. (چون نمای K، p^c است اندازه هر K_i از p^c بزرگتر نیست.) طبق لم ۱.۲.۱،

$$\begin{aligned} Hom(K, A) &\cong Hom(K_۱, A) \times Hom(K_۲, A) \times ... \times Hom(K_s, A) \\ &\cong K_۱ \times K_۲ \times K_۳ \times ... \times K_s = K. \end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۲.۱. *فرض کنید K یک $p-$گروه آبلی متناهی از رتبه‌ی r و A دوری از اندازه p باشد. دراین‌صورت $Hom(K, A) \cong (C_p)^r$.*

برهان. چون K یک $p-$گروه آبلی از رتبه‌ی r است فرض می‌کنیم، $K = C_{p^{n_1}} \times ... \times C_{p^{n_r}}$. طبق لم ۱.۲.۱،

$$Hom(K, A) \cong Hom(C_{p^{n_1}}, C_p) \times ... \times Hom(C_{p^{n_r}}, C_p)$$
$$\cong C_p \times ... \times C_p = (C_p)^r.$$

□

لم ۴.۲.۱. *فرض کنید G یک $p-$گروه غیرآبلی از رده‌ی پوچتوانی ۲ باشد. دراین‌صورت*
الف) $|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))| \geq |\frac{G}{Z(G)}|p^{r(z-1)}$.
ب) $|Hom(\frac{G}{Z(G)}, G')| \geq |\frac{G}{Z(G)}|p^{r(d-1)}$.
(در این‌جا r، d و z به‌ترتیب رتبه‌های $\frac{G}{Z(G)}$، G' و $Z(G)$ می‌باشند.)

برهان. الف) از این‌که رتبه‌ی $Z(G)$ برابر با z است، فرض می‌کنیم $Z(G) = K_1 \times K_2 \times ... \times K_z$. در این‌جا به ازای هر $1 \leq i \leq z$ ، K_iها $p-$گروه‌های دوری از اندازه‌ی توانی از عدد اول p می‌باشند. طبق لم ۱.۲.۱،

$$Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G)) \cong Hom(\frac{G}{Z(G)}, K_1) \times ... \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, K_z).$$

از این‌که G یک $p-$گروه غیرآبلی از رده‌ی پوچتوانی ۲ است، $G' \leq Z(G)$ و نمای $Z(G)$ حداقل p^c است. پس حداقل یکی از این K_iها، $1 \leq i \leq z$ ، دارای اندازه p^c است. که در این‌جا فرض می‌کنیم، K_1 چنین باشد. زیرا درغیراین‌صورت اگر اندازه تمام K_iها، $1 \leq i \leq z$ ، به‌طور سره بزرگتر یا کوچکتر از p^c باشد، به تناقض با این‌که نمای $Z(G)$ حداقل p^c است می‌رسیم. حال طبق قضایای ۲.۲.۱ و ۳.۲.۱ داریم

$$Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G)) \cong \frac{G}{Z(G)} \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, K_2) \times ... \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, K_z)$$
$$\geq \frac{G}{Z(G)} \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, C_p) \times ... \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, C_p)$$
$$\cong \frac{G}{Z(G)} \times (C_p)^r \times ... \times (C_p)^r.$$

درنتیجه

$$|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))| \geq |\frac{G}{Z(G)}|p^{r(z-1)}.$$