بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

الگوریتم‌های عددی برای محاسبه معکوس مور – پنرز یک ماتریس

استاد راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

توسط

سلیمه ناصری ننه‌کران

دانشگاه محقق اردبیلی

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی.

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

و تقدیم به

همسر مهربانم

به پاس قدر دانی از قلبی آکنده از عشق و معرفت

که محیطی سرشار ازسلامت و امنیت و آرامش

را برای من فراهم آورد.

تقدیر و تشکر:

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او گذاردن نتوانند.

در آغاز از پدر و مادر عزیزم این دو معلم بزرگوار که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند سپاسگزارم.

از همسرم که با واژه نجیب و مغرور تلاش آشنایی دارد و مرا در راه رسیدن به اهداف عالی یاری می‌رساند متشکرم.

از استاد فرزانه و دلسوزم جناب آقای دکتر داود خجسته سالکویه که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، کمال سپاسگزاری را دارم.

از اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر عبداله برهانی فر و جناب آقای دکتر محمد ضارب نیا که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

در پایان از زحمات اساتید محترم و دانشجویان عزیز دانشگاه محقق اردبیلی و بخصوص از همکلاسی‌های خود که در طی دوران تحصیل مشوق و همراه من بودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

سلیمه ناصری ننه کران

مرداد ۱۳۹۱

نام خانوادگی: ناصری ننه کران **نام:** سلیمه

عنوان پایان نامه :

الگوریتم‌های عددی برای محاسبه معکوس مور – پنرز یک ماتریس

استاد راهنما: دکتر داود خجسته سالکویه

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** آنالیزعددی
دانشگاه: محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱/۶/۲۸ **تعداد صفحه:**۷۸

کلید واژه‌ها :
معکوس مور – پنرز، روش تکراری، همگرایی، انباشتگی خطا

چکیده:
فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ مختلط باشد. ماتریس X را معکوس مور – پنرز ماتریس A گویند هرگاه در چهار شرط $AXA = A$، $XAX = X$، $(AX)^* = (AX)$ و $(XA)^* = (XA)$ صدق کند. در این پایان نامه چند روش تکراری برای محاسبه معکوس یک ماتریس بیان می‌کنیم. همچنین چند روش تکراری و غیر تکراری برای محاسبه معکوس مور– پنرز یک ماتریس را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در پایان یک روش تکراری جدید را که اخیرا توسط پتکوویچ و استانیمیروویچ با استفاده از معادلات دوم و چهارم از معادلات مور– پنرز ارائه شده است را بررسی می‌کنیم. همگرایی روش جدید را بررسی کرده و همچنین چند مثال عددی برای بررسی دقت و کارایی این روش‌ها ارائه می‌کنیم.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

لیست جداول

مقدمه

دستگاه معادلات ماتریسی

$$AX = I, \qquad (۱.۰)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و نامنفرد و I ماتریس همانی از مرتبه n می‌باشد. روشن است که $A^{-۱}$ جواب معادله (۱.۰) می‌باشد. محاسبه معکوس یک ماتریس بزرگ با روش‌های مستقیم ممکن است زمان بسیار زیادی لازم داشته باشد و حافظه کامپیوتر نیز ممکن است قادر به انجام دادن بخشی از محاسبات نباشد. بعلاوه اگر ماتریس ضرایب A بدحالت باشد حتی روش‌های مستقیم مطمئن مانند الگوریتم گوس — جردن [۱۸] یا محاسبات موازی [۸] برای محاسبه معکوس A نیز ممکن است به اندازه کافی دقیق نباشد. در اینگونه موارد استفاده از روش‌های تکراری برای محاسبه معکوس یک ماتریس می‌تواند مفید واقع شود. یک روش تکراری کلی برای محاسبه $A^{-۱}$ به صورت

$$V_{k+۱} = V_k(I + (I - AV_k)(I + \alpha(I - AV_k)),$$

می‌باشد که در آن $V_۰$ یک تقریب اولیه مناسب برای $A^{-۱}$ و α یک پارامتر حقیقی می‌باشد. با انتخاب αهای مختلف روش‌های تکراری مختلفی برای محاسبه $A^{-۱}$ بدست می آید.

همچنین در اوائل قرن ۱۹ احساس شد که در آمار، پردازش داده و حساب مشاهدات احتیاج به تعریف چند نوع معکوس ضعیف برای ماتریس‌های مربعی منفرد و همچنین ماتریس‌های مستطیلی مورد نیاز است که این مسأله منجر به گسترش نظریه معکوس تعمیم یافته یک ماتریس گردید [۳, ۱۲, ۵, ۱۸, ۱۹]. معکوس‌های تعمیم یافته کاربردهای زیادی در آمار، علوم و مهندسی مانند تقریب کمترین توان‌های دوم، معادلات دیفرانسیل و معادلات تفاضلی در

زنجیرهای مارکف دستگاه‌های چند منظوره دینامیکی و رمزنویسی دارند [۶, ۱۱]. در سال ۱۹۲۰ معکوس تعمیم‌یافته ماتریس‌هاتوسط مور در [۱۶] که یک معکوس تعمیم‌یافته منحصر به فرد به کمک مفهوم ماتریس های تصویر ارائه داده بود معرفی شد. زمانی که خواص کمترین توان‌های دوم و برخی معکوس‌های تعمیم‌یافته کشف شد ارتباط معکوس‌های تعمیم‌یافته با جواب دستگاه‌های خطی موضوعات جالبی را به وجود آورد. پنرز در سال ۱۹۵۵ نشان داد که معکوس تعمیم یافته منحصر به فرد یک ماتریس در چهار معادله‌ی ماتریسی صدق می‌کند. این کشف مهم مطالعه معکوس‌های تعمیم‌یافته را دوباره رواج داد. به افتخار همکاری مور و پنرز این معکوس تعمیم یافته منحصر به فرد معکوس مور—پنرز نامیده می‌شود.

روش‌های مستقیم مختلفی برای محاسبه معکوس مور — پنرز یک ماتریس، از جمله طرح بازگشتی گرویل در سال ۱۹۶۰ توسط گرویل [۱۵]، روش SVD، روش GSO با استفاده از فرآیند متعامد سازی گرام — اشمیت و روش Geninv (معکوس تعمیم یافته) توسط کوریو ارائه شده است.

علاوه بر روش‌های مستقیم روش‌های تکراری که بر اساس معادلات مور — پنرز می‌باشند نیز برای محاسبه معکوس مور— پنرز یک ماتریس ارائه شده است. پی‌یرس چند روش تکراری در [۱۹] که بر اساس معادلات مور — پنرز برای محاسبه معکوس مور — پنرز بررسی کرده است.

در فصل اول این پایان‌نامه برخی تعاریف و قضایای مورد نیاز را یادآوری می‌کنیم. در فصل دوم به بیان برخی خواص معکوس مور — پنرز و معرفی روش‌های مستقیم برای محاسبه‌ی معکوس مور — پنرز یک ماتریس می‌پردازیم. در فصل سوم چند روش تکراری برای محاسبه معکوس یک ماتریس و تعمیم این روش‌ها می‌پردازیم. در فصل چهارم چند روش تکراری بر اساس معادلات مور — پنرز برای محاسبه معکوس مور — پنرز یک ماتریس بیان کرده و به معرفی یک روش تکراری جدید و بررسی این روش که در [۱۸] معرفی شده است می‌پردازیم.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این بخش برخی از تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. یک نرم روی V تابع‌ای است مثل $||.||$ از V به $\mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) به ازای هر $x \in V$، $||x|| \geq ۰$. بعلاوه $||x|| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$؛

(ب) به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in V$، $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$؛

(ج) به ازای هر $x, y \in V$، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (نامساوی مثلث).

در صورتی که $V = \mathbb{C}^n$، نرم را نرم برداری و در صورتی که $V = \mathbb{C}^{n\times n}$، نرم را نرم ماتریسی گوئیم.

مثال ۱.۱ فرض کنید $V = \mathbb{C}^n$. به ازای $p \geq ۱$، p ـنرم بردار $x = (x_۱, \ldots, x_n)^T \in V$ به صورت $||x||_p = (\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p)^{۱/p}$ (نرم هلدر[1]) تعریف می‌شود. به ازای $p = ۲$، نرم هلدر را نرم اقلیدسی و به ازای $p = ۱$، نرم مجموع قدرمطلق نامند. به ازای $p = \infty$، داریم

$$||x||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||x||_p = \lim_{p\to\infty} (\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p)^{۱/p} = \max_i |x_i|,$$

که این نرم را نرم بینهایت یا نرم ماکزیمم نامند.

---

[1] Holder

تعریف ۲.۱ یک ضرب داخلی روی فضای برداری حقیقی (یا مختلط) V، تابع‌ای است که به هر زوج مرتب از بردارهای x و y در V، اسکالر حقیقی (یا مختلط) (x,y) نسبت می‌دهد به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) (x,x) حقیقی باشد و $(x,x) \geq 0$. بعلاوه $(x,x) = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

(ب) برای هر اسکالرλ، $(x, \lambda y) = \lambda(x,y)$؛

(ج) برای هر $z \in V$، $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$؛

(د) $(x,y) = \overline{(y,x)}$.

تعریف ۳.۱ هر فضای برداری مختلط یا حقیقی که یک ضرب داخلی در آن تعریف شده باشد یک فضای حاصل‌ضرب داخلی نامیده می‌شود.

مثال ۲.۱ برای هر دو بردار x و y در $\mathbb{C}^n$، ضرب داخلی استاندارد آنها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i x_i.$$

تعریف ۴.۱ مجموعه بردارهای $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ را یک مجموعه یکامتعامد نامند هرگاه به ازای هر i ,$||u_i|| = 1$ و به ازای هر i,j با شرط $i \neq j$ داشته باشیم $u_i \perp u_j$، به عبارت دیگر

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

تعریف ۵.۱ اگر $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک پایه برای فضای ضرب داخلی V باشد، دنباله حاصل از فرآیند گرام—اشمیت به صورت

$$u_1 = \frac{x_1}{||x_1||}, \quad u_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1}(u_i, x_k)u_i}{||x_k - \sum_{i=1}^{k-1}(u_i, x_k)u_i||}, \qquad k = 2, \ldots, n,$$

تعریف می‌شود. در این‌صورت $\{u_۱, u_۲, \ldots, u_n\}$ یک پایه یکا متعامد برای فضای ضرب داخلی V می‌باشد. فرآیند گرام—اشمیت را در قالب الگوریتم می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

الگوریتم ۱: الگوریتم گرام—اشمیت

1. $u_۱ := \frac{x_۱}{||x_۱||}$
2. For $k = ۲, \ldots, n$, Do
3. $\quad w_k := x_k - \sum_{i=۱}^{k-۱}(u_i, x_k)u_i$
4. $\quad u_k := \frac{w_k}{||w_k||}$
5. EndDo

تعریف ۶.۱ مجموعه تمام ماتریس‌های $m \times n$ حقیقی (یا مختلط) را با $\mathbb{R}^{m\times n}$ (یا $\mathbb{C}^{m\times n}$) نشان می‌دهیم. فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (یا $\mathbb{C}^{n\times n}$). در این‌صورت ماتریس A را

- قطری گویند، هرگاه $a_{ij} = ۰$، $i \neq j$. یک ماتریس قطری معمولاً با $diag(a_{۱۱}, a_{۲۲}, \ldots, a_{nn})$ نشان داده می‌شود.
- متقارن گویند، هرگاه $A^T = A$ $((A^T)_{ij} = a_{ji})$.
- هرمیتی گویند، هرگاه $A^* = A$ $((A^*)_{ij} = \bar{a}_{ji})$.
- همانی گویند و معمولاً با I یا I_n نشان می‌دهند، هرگاه $I_n = I = diag(۱, ۱, \ldots, ۱)$.
- بالا مثلثی گویند، هرگاه $a_{ij} = ۰$ به ازای $i > j$.
- پایین مثلثی گویند، هرگاه $a_{ij} = ۰$ به ازای $i < j$.
- متعامد گویند، هرگاه $A^TA = AA^T = I$.
- یکانی گویند، هر گاه $A^*A = AA^* = I$.

- ماتریس A را یک ماتریس جایگشت گویند، هرگاه ستون‌های آن جایگشتی از ستون‌های ماتریس همانی باشند.
- ماتریس A را نامنفرد گویند، هرگاه $det(A) \neq 0$ و منفرد گویند، هرگاه $det(A) = 0$.

تعریف **۷.۱** برای هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ زیر فضاهای برد و پوچ A را می‌توان به ترتیب به صورت زیر تعریف کرد:

$$R(A) = \{y \in \mathbb{C}^m : y = Ax, \text{به ازای } x \text{ ی در } \mathbb{C}^n\},$$
$$N(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}.$$

به وضوح اگر $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$، آنگاه $R(A) = span\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. رتبه ماتریس A را با $rank(A)$ نشان می‌دهند و به صورت $rank(A) = dim(R(A))$ تعریف می‌شود. می‌توان نشان داد که

$$rank(A) = rank(A^T),$$
$$dim(N(A)) + dim(R(A)) = n.$$

تعریف **۸.۱** مجموعه تمام ماتریس‌های $m \times n$ حقیقی (یا مختلط) با رتبه r را با $\mathbb{R}_r^{m\times n}$ (یا $\mathbb{C}_r^{m\times n}$) نمایش می‌دهند.

قضیه **۱.۱** برای هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$،

$$N(A) = R(A^*)^{\perp},$$
$$N(A^*) = R(A)^{\perp}.$$

برهان : مرجع [۲] را ببینید. $\square$

تعریف **۹.۱** ماتریس A را از رتبه‌ی کامل گویند هرگاه دارای رتبه‌ی کامل سطری یا ستونی باشد.

تعریف ۱۰.۱ ماتریس A را معین مثبت هرمیتی (HPD)[۱] گویند، هرگاه هرمیتی بوده و بعلاوه به ازای هر بردار غیر صفر $x \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم $(Ax, x) = x^*Ax > 0$ و همچنین A را نیمه معین مثبت هرمیتی $(HPSD)$[۲] گویند، هرگاه هرمیتی بوده و $(Ax, x) = x^*Ax \geq 0$.

تعریف ۱۱.۱ λ یک مقدار ویژه ماتریس A متناظر با بردار ویژه x است، هرگاه $Ax = \lambda x$ و $x \neq 0$،

- مجموعه تمام مقادیر ویژه A را طیف A نامیده و با $\sigma(A)$ نشان می‌دهند.
- بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A را از حیث قدر مطلق، شعاع طیفی ماتریس A نامیده می‌شود و با $\rho(A)$ نشان می‌دهند، به عبارت دیگر $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید که $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ باشد. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A اثر A نامیده می‌شود و با نماد $trace(A)$ یا $Tr(A)$ نمایش داده می‌شود

$$Tr(A) = trace(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

قضیه ۲.۱ فرض کنید که $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ باشد. در این‌صورت اگر λ_i، $i = 1, \ldots, n$ مقادیر ویژه A باشند، آنگاه $trace(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.

تعریف ۱۳.۱ (نرم‌طبیعی یا نرم القایی). فرض کنید $||.||$ یک نرم برداری روی $\mathbb{C}^n$ و $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$، در این‌صورت نرم طبیعی متناظر به این نرم برداری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax||.$$

---

[۱] Hermitian positive definite

[۲] Hermitian positive semidefinite

قضیه ۳.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، در این‌صورت برای نرم‌های طبیعی تولید شده توسط نرم برداری مجموع قدر مطلق، نرم برداری اقلیدسی و نرم برداری بی‌نهایت داریم

$$\begin{aligned}||A||_1 &= \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|,\\ ||A||_2 &= \sqrt{\rho(A^*A)},\\ ||A||_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|.\end{aligned}$$

برهان : مرجع [۱] را ببینید. □

قضیه ۴.۱ فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد. در این‌صورت برای هر نرم طبیعی $||.||$ داریم

$$|\lambda| \le ||A||.$$

برهان : مرجع [۱] را ببینید. □

قضیه ۵.۱ (شکل شور یک ماتریس). برای هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ یک ماتریس یکانی مانند $U \in \mathbb{C}^{m\times n}$ وجود دارد که

$$U^*AU = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

که در آن λ_i، $i = 1, \ldots, n$ مقادیر ویژه A (نه لزوماً متمایز) می‌باشد. در این‌جا ماتریس بالامثلثی T را شکل شور ماتریس A گویند.

برهان : مرجع [۱] را ببینید. □

لم ۱.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. در این‌صورت حداقل یک نرم ماتریسی $||.||$ وجود دارد بطوریکه

$$\rho(A) \le \|A\| \le \rho(A) + \varepsilon. \tag{1.1}$$

برهان : با توجه به قضیه ۵.۱ شکل شور ماتریس A را به شکل

$$A = U^*TU,$$

در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $D_t = diag(t, t^2, \ldots, t^n)$، $t > 0$. بنابراین داریم

$$D_tTD_t^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t^{-1}d_{12} & t^{-2}d_{23} & \cdots & t^{-n+1}d_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t^{-1}d_{23} & \cdots & t^{-n+2}d_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & t^{-n+3}d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^{-1}d_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که برای t به قدر کافی بزرگ، مجموع قدرمطلق درایه‌های غیر قطری ماتریس $D_tTD_t^{-1}$ کمتر از ϵ می‌باشد. به خصوص می توان نتیجه گرفت که برای t به قدر کافی بزرگ $||D_tAD_t^{-1}||_1 \leq \rho(A) + \epsilon$. حال اگر برای هر ماتریس $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و t به قدر کافی بزرگ نرم ماتریسی $||.||$ به صورت

$$||B|| = ||D_tU^*BUD_t^{-1}||_1 = ||(UD_t^{-1})^{-1}B(UD_t^{-1})||_1,$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین یک نرم ماتریسی تولید کردیم به طوری که $||A|| \leq \rho(A) + \epsilon$. از طرفی از قضیه ۴.۱ برای هر نرم ماتریسی داریم $\rho(A) \leq ||A||$. به این ترتیب اثبات تمام می‌شود. □

لم ۲.۱ اگر $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ بطوریکه $P = P^2$ و $PS = SP$. در این‌صورت

$$\rho(PS) \leq \rho(S).$$

برهان : فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس PS باشد و x بردار ویژه متناظر به مقدار ویژه λ باشد. در این‌صورت $PSx = \lambda x$. حال داریم

$$PSx = SPx = SP^2x = SPPx = PSPx = P\lambda x,$$

بنابراین $P\lambda x = \lambda x$ در نتیجه $\lambda = ۰$ یا $\lambda = ۱$. اگر $\lambda = ۱$ باشد در این‌صورت $Px = x$، لذا $Sx = SPx = PSx = \lambda x$، که این نتیجه می‌دهد که λ یک مقدار ویژه S نیز است. بنابراین مجموعه مقادیر ویژه PS زیر مجموعه مقادیر ویژه S اجتماعش با $\{۰\}$ می‌باشد. در نتیجه $\rho(PS) \leq \rho(S)$. □

قضیه **۶.۱** (قضیه گرشگورین[۱])
فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $m \times n$، D قرص‌هایی به مرکز a_{ii} و به شعاع r_i که $r_i = \sum_{j=۱, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ باشد، در این‌صورت مقادیر ویژه ماتریس A در $\cup_{i=۱}^{n} D_i$ قرار دارند.

برهان: مرجع [۱] را ببینید. □

تعریف **۱۴.۱** فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. قرار می‌دهیم $B = A^* A$. ماتریس B نیمه معین مثبت هرمیتی است، زیرا اولاً هرمیتی است و ثانیاً برای هر بردار غیر صفر $x \in \mathbb{C}^n$، داریم

$$x^* B x = x^* A^* A x = (Ax)^* Ax = ||A||_۲^۲.$$

در نتیجه مقادیر ویژه آن نامنفی‌اند. فرض کنید $\lambda_۱ \geq \lambda_۲ \geq \ldots \geq \lambda_n \geq ۰$ مقادیر ویژه B باشند، قرار می دهیم

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n.$$

مقادیر $\sigma_۱ \geq \sigma_۲ \geq \ldots \geq \sigma_n \geq ۰$ را مقادیر تکین A می‌نامند.

تعریف **۱۵.۱** اندیس ماتریس A کوچکترین عدد صحیح نامنفی k است، به طوری که حداقل یکی از عبارت‌های زیر برقرار باشد:

(۱) $rank(A^k) = rank(A^{k+۱})$،

(۲) $R(A^k) = R(A^{k+۱})$،

(۳) $N(A^k) = N(A^{k+۱})$.

---
[۱] Gerschgorin

تعریف ۱.۱۶ فرض کنید A از رتبه کامل باشد. تجزیه QR ماتریس A تجزیه‌ای به صورت $A = QR$ است که در آن Q یک ماتریس متعامد $(Q^TQ = I)$ و ماتریس R یک ماتریس بالامثلثی یا به صورت

$$R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix},$$

است که $\tilde{R}$ یک ماتریس بالامثلثی است. در حالت اول Q یک ماتریس $m \times n$ و R یک ماتریس $n \times n$ است و در حالت دوم Q یک ماتریس $m \times m$ و R یک ماتریس $m \times n$ است ($\tilde{R}$ یک ماتریس $n \times n$ و ۰ ماتریس صفر با بعد $(m-n) \times n$ است).

تجزیه‌ی QR با استفاده از الگوریتم گرام—اشمیت

فرض کنید ماتریس $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ با بردارهای ستونی مستقل خطی a_i، $i = 1, 2, \ldots, n$ باشد. با استفاده از الگوریتم گرام—اشمیت مجموعه یکامتعامد $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ به صورت زیر حاصل می شود:

$$q_1 = \frac{a_1}{v_1}, \qquad q_k = \frac{a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (q_i^T a_k) q_i}{v_k}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

که در آن $v_1 = ||a_1||_2$، $v_k = ||a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (q_i^T a_k) q_i||_2$. در نتیجه داریم

$$a_1 = v_1 q_1, \qquad a_k = (q_1^T a_k) q_1 + \ldots + (q_{k-1}^T a_k) q_{k-1} + v_k q_k,, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

با نوشتن این روابط به صورت ماتریسی داریم

$$A = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \begin{pmatrix} v_1 & q_1^T a_2 & q_1^T a_3 & \cdots & q_1^T a_n \\ 0 & v_2 & q_2^T a_3 & \cdots & q_2^T a_n \\ 0 & 0 & v_3 & \cdots & q_3^T a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = QR.$$

که در آن Q یک ماتریس $m \times n$ متعامد است و R یک ماتریس $n \times n$ بالامثلثی است. برای حالت دوم می‌توان $m - n$ بردار q_{n+1}،...،q_m را طوری ساخت که $\{q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots, q_m\}$