دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز تابعی

عنوان

نامساوی های عملگری دانکل ـ ویلیامز

استاد راهنما

دکتر محمد صال مصلحیان

استادان مشاور

دکتر شیرین حجازیان و دکتر مجید میرزاوزیری

پژوهشگر

فرزاد دادی پور

آبان ۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: دادی پور　　　　　نام: فرزاد

عنوان: نامساوی های عملگری دانکل ـ ویلیامز

استاد راهنما: دکتر محمد صال مصلحیان
استادان مشاور: دکتر شیرین حجازیان و دکتر مجید میرزاوزیری

مقطع تحصیلی: دکتری　　　رشته: ریاضی محض　　　گرایش: آنالیز تابعی

دانشگاه: فردوسی مشهد　　　دانشکده علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: آبان ۱۳۹۰　　　تعداد صفحات: ۶۷

واژگان کلیدی: نامساوی دانکل ـ ویلیامز، نامساوی عملگری، نامساوی نرم دار، فاصله $p-$ زاویه ای، مشخصه سازی فضاهای ضرب داخلی، C^*- مدول ضرب داخلی.

چکیده

صورت های عملگری نامساوی های عددی به شکل ها و روش های متنوعی مورد بررسی قرار گرفته اند. در این پایان نامه ضمن تعمیم نامساوی کلاسیک دانکل-ویلیامز در فضاهای نرمدار نمونه های متنوعی از صورت های عملگری آن را می یابیم ونیز چندین شرط لازم و کافی برای حالت تساوی ارائه می دهیم.

در مطالعه نامساوی دانکل-ویلیامز در فضاهای دیگر، نخست آن را در فضاهای ضرب داخلی بررسی کرده وبر مبنای تعمیمی از آن به یک مشخصه سازی از فضای ضرب داخلی دست می یابیم. همچنین نامساوی دانکل-ویلیامز و تعمیم آن را در C^*- مدول های ضرب داخلی ارائه می دهیم.

در پایان حالت تساوی را در تعمیم نامساوی دانکل-ویلیامز در C^*- مدولهای ضرب داخلی برمبنای وجود حالت در C^*- جبر زمینه مشخصه سازی می کنیم.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

و

استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر مصلحیان

سپاس‌گزاری...

در آغاز از زحمات بی‌دریغ استاد ارجمندم آقای دکتر محمد صال مصلحیان که در طول دوران تحصیلم همیشه یار و راهنمای من بوده اند صمیمانه قدردانی و سپاسگزاری می کنم.
از آقای دکتر مجید میرزاوزیری و خانم دکتر شیرین حجازیان که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را کشیده اند و اینجانب را مورد راهنمایی قرار داده اند کمال تقدیر و تشکر را دارم.
همچنین از هیات محترم داوران آقای دکتر عباس سالمی، خانم دکتر مریم خسروی، آقای دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی و آقای دکتر علیرضا کامل میرمصطفایی که پایان نامه را مورد مطالعه قرار داده و پیشنهادات و نظریات سازنده ای ارائه کرده اند نیز بسیار سپاسگزارم.
در پایان از مدیر محترم گروه ریاضی محض آقای دکتر رجبعلی کامیابی گل که همواره به اینجانب محبت داشته اند و نیز از نماینده محترم تحصیلات تکمیلی دانشکده علوم ریاضی آقای دکتر محمد جانفدا که در جلسه دفاعیه حضور داشتند بسیار متشکرم.

فرزاد دادی پور
آبان ۱۳۹۰

فهرست مطالب

پیش گفتار

نامساوی ها از ابزارهای مهم در ریاضیات هستند که در بعضی حوزه های آن پدیدار می شوند. یکی از دستاوردهای عمده آنالیز ریاضی از نیوتون و اویلر تا کاربردهای نوین آن، نهادینه شدن نامساوی های ریاضی در علوم فیزیک، مهندسی و حوزه های دیگر می باشد. نخستین بار در سال ۱۹۳۴ کتابی جامع با نام "نامساوی ها" توسط هاردی، لیتل وود و پولیا نگاشته شد و توسط انتشارات دانشگاه کمبریج چاپ شد، هم چنان که در سال های بعد نیز ریاضی دانان به چاپ و نشر کتاب و مقالات در حوزه نامساوی ها رو آوردند.

یکی از زمینه های بنیادی تحقیق و پژوهش در نظریه عملگرها، نامساوی های عملگری است که رابطه ترتیبی جزئی "$\leq$" در بین عناصر خودالحاق یک C^*- جبر منشأ پیدایش آن در حوزه عملگرها می باشد. نامساوی های عملگری در بهبود و گسترش شاخه های متنوعی از ریاضیات همچون نظریه کنترل، سیستم و بهینه سازی و نیز در فیزیک کوانتومی نقش دارند. نامساوی های عملگری موضوعات مختلفی چون نرم عملگری، میانگین های عملگری، توابع محدب عملگری و نیز نامساوی های ماتریسی در رابطه با ضرب های ماتریسی، مقادیر ویژه و مقادیر منفرد ماتریس ها را در بر می گیرد.

نامساوی کلاسیک دانکل ـ ویلیامز در سال ۱۹۶۴ به عنوان بهبودی از نامساوی مثلثی به صورت $\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| \leq ۴\frac{\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|}$ در فضاهای نرم دار مطرح شد [۱۳] . مالیگراندا [۲۴] در سال ۲۰۰۶ و مرسر [۲۸] در سال ۲۰۰۷ بهبودی برای نامساوی دانکل ـ ویلیامز و نیز وارون آن ارائه کردند. در سال ۲۰۰۷ پچریچ و رائیچ [۳۸] با نشان دادن نامساوی

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| \leq \min_{1\leq i\leq n}\left\{\frac{1}{\|x_i\|}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}x_j\right\|+\sum_{j=1}^{n}\big|\,\|x_j\|-\|x_i\|\,\big|\right)\right\}$$

و وارون آن، نتایج مالیگراندا و مرسر را برای هر تعداد متناهی بردار در یک فضای نرم دار تعمیم دادند. همچنانکه دراگومیر [۱۲] در سال ۲۰۰۹ ضمن یافتن کران های بالا و پایین مناسب برای نرم ترکیب خطی $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j$ وقتی α_j ها اسکالرند، نتایج پچریچ و رائیچ را تعمیم داده است.
در فصل نخست علاوه بر مطالعه بهبودها، وارون ها و تعمیم های نامساوی دانکل ـ ویلیامز و با توجه به مفهوم فاصله $p-$ زاویه ای بین هر دو بردار ناصفر یک فضای نرم دار به صورت $\alpha_p[x,y]=\big\|\|x\|^{p-1}x-\|y\|^{p-1}y\big\|$ ، نامساوی

$$\alpha_p[x,y]\leq 2^{1+\frac{1}{q}}\frac{\|x-y\|}{\left(\|x\|^{(1-p)q}+\|y\|^{(1-p)q}\right)^{\frac{1}{q}}}$$

به عنوان گسترش نامساوی دانکل ـ ویلیامز در رابطه با فاصله $p-$ زاویه ای ارائه می شود.

در فصل دوم ابتدا نامساوی عملگری دانکل ـ ویلیامز را برای عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ که قدرمطلق آنها وارون پذیر است مورد مطالعه قرار می دهیم. این نامساوی های عملگری نخست در سال ۲۰۱۰ توسط پچریچ و رائیچ [۳۶] با برآورد

$$\big|A|A|^{-1}-B|B|^{-1}\big|$$

به عنوان فاصله زاویه ای عملگرها مورد بررسی قرار گرفت.

صورت عملگری نامساوی بوهر در سال ۲۰۰۳ توسط حرزالله [۱۶] با نشان دادن

$$|A-B|^2\leq r|A|^2+s|B|^2 \qquad \left(\frac{1}{s}+\frac{1}{r}=1\ ,\ r>1\right)$$

ارائه شد. همچنین او ثابت کرد تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $B = (1-r)A$. با استفاده از نامساوی عملگری بوهر، نامساوی دانکل ـ ویلیامز را در رابطه با فاصله $p-$ زاویه ای $(p \in \mathbb{R})$ برای عملگرهایی با قدرمطلق وارون پذیر به صورت

$$\left| A|A|^{p-1} - B|B|^{p-1} \right| \leq |A|^{p-1}(r|A-B|^2 + s||B|^p|A|^{1-p} - |B||^2)|A|^{p-1}$$

گسترش می دهیم. همچنین در فصل دوم شرط های لازم و کافی متعددی برای حالت تساوی در نامساوی فوق ارائه می شود.

در فصل سوم با رویکردی متفاوت به نامساوی های عملگری دانکل ـ ویلیامز و همچنین حالت تساوی بدون هرگونه شرط وارون پذیری عملگرها خواهیم پرداخت. در این فصل از تجزیه قطبی عملگرها به عنوان روشی مفید جهت پرهیز از تحمیل هرگونه شرط اضافی بر عملگرها بهره می بریم. این روش در سال ۲۰۱۰ توسط سایتو و تومیناگا [۴۰] در اثبات نامساوی عملگری دانکل ـ ویلیامز با نشان دادن

$$|(U-V)|A||^2 \leq r|A-B|^2 + s(|A|-|B|)^2$$

وقتی $A = U|A|$ و $B = V|B|$، تجزیه قطبی عملگرها A و B هستند به کار رفت. همچنین آنها نشان دادند که تساوی برقرار است اگر و فقط اگر

$$U^*U = V^*V \text{ و } r(A-B) = sV(|A|-|B|)$$

در ادامه این فصل همه عملگرهایی که به ازای آنها حالت تساوی در نامساوی سایتو ـ تومیناگا برقرار است مشخصه سازی می شود. همچنین با ارائه نامساوی

$$|(U|A|^p - V|B|^p)|A|^{1-p}|^2 \leq (1+t)|A-B|^2 + (1+\frac{1}{t})||B|^p|A|^{1-p} - |B||^2$$

وقتی $A = U|A|$ و $B = V|B|$، تجزیه قطبی عملگرها A و B هستند، نامساوی دانکل ـ ویلیامز در رابطه با فاصله $p-$ زاویه ای را در حالت $0 < p \leq 1$ بهبود می دهیم.

در فصل چهارم نامساوی دانکل ـ ویلیامز را در فضاهای ضرب داخلی بررسی می کنیم. نخست دقت می کنیم عدد ثابت "۴" در نامساوی دانکل ـ ویلیامز بهترین گزینه در فضاهای نرم دار می باشد. برای بررسی این امر گیریم $X=\mathbb{R}^2$ ونرم $x=(x_1,x_2)$ را $\|x\|=|x_1|+|x_2|$ می گیریم و فرض می کنیم $x=(1,\varepsilon)$ و $y=(1,0)$ که در آن ε عدد مثبت کوچکی است. داریم

$$\alpha[x,y]\frac{\|x\|_1+\|y\|_1}{\|x-y\|_1}=\frac{4+2\varepsilon}{1+\varepsilon}\longrightarrow 4 \ (\text{وقتی } \varepsilon\longrightarrow 0).$$

مشخصه سازی معروف کرک ـ اسمایلی از فضاهای ضرب داخلی بر مبنای دقت بخشیدن به نامساوی نرمی دانکل ـ ویلیامز صورت گرفت. در سال ۱۹۶۴ کرک و اسمایلی [۲۱] در واقع ثابت کردند که جایگزینی "۲"به جای "۴" در نامساوی دانکل ـ ویلیامز یک فضای ضرب داخلی را مشخصه سازی می کند.

به این ترتیب با معرفی ثابت دانکل ـ ویلیامز فضای نرم دار $(X,\|.\|)$ که در سال ۲۰۰۸ توسط جیمنز ـ ملادو، لورنس ـ فوستر و مازکونان ـ ناوارو [۱۷] و به صورت

$$DW(X):=\sup\{\alpha[x,y]\frac{\|x\|+\|y\|}{\|x-y\|}:x,y\in X,x\neq 0,y\neq 0,x\neq y\}$$

انجام گرفت، مشاهده می شود که $2\leq DW(X)\leq 4$ و نیز $DW(X)=2$ فقط وقتی که X یک فضای ضرب داخلی باشد.

در ادامه فصل چهارم به بهبود نامساوی $\alpha_p[x,y]\leq 2^{1+\frac{1}{q}}\frac{\|x-y\|}{(\|x\|^{(1-p)q}+\|y\|^{(1-p)q})^{\frac{1}{q}}}$ در فضاهای ضرب داخلی می پردازیم که در فصل اول به عنوان گسترش نامساوی دانکل ـ ویلیامز در رابطه با فاصله $p-$ زاویه ای ارائه شد. در واقع ثابت می کنیم که در فضاهای ضرب داخلی می توان $2^{1+\frac{1}{q}}$ را با $2^{\frac{1}{q}}$ جایگزین کرد. همچنین نشان می دهیم که با فرض $p\in[0,1)$ برقراری نامساوی $\alpha_p[x,y]\leq 2^{\frac{1}{q}}\frac{\|x-y\|}{(\|x\|^{(1-p)q}+\|y\|^{(1-p)q})^{\frac{1}{q}}}$ به ازای دست کم یک $q>0$ و هر $x,y\neq 0$ فضاهای

ضرب داخلی را مشخصه سازی می کند.

مفهوم فضاهای C^*- مدول ضرب داخلی تعمیمی از فضاهای هیلبرت است با این توضیح که در C^*- مدول های ضرب داخلی به جای مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ یک C^*- جبر جایگزین حوزه مقادیر ضرب داخلی می شود. به این ترتیب در این فضاها به علت وجود ضرب داخلی با حوزه مقادیر C^*- جبرها و بهره مندی از ابزارهای موجود در چنین جبرهایی توانمندی ما در ارائه نامساوی ها و بررسی آنها افزایش می یابد.

در فصل پنجم ضمن معرفی مفاهیم مربوط به فضاهای C^*- مدول ضرب داخلی، تعمیم نامساوی دانکل ـ ویلیامز و وارونش را در چنین فضاهایی ارائه می دهیم و نیز نامساوی عملگری دانکل ـ ویلیامز در رابطه با فاصله $p-$ زاویه ای را در C^*- مدول های هیلبرت گسترش می دهیم.

همچنین در این فصل با به کار گیری مشخصه سازی تساوی مثلثی در C^*- مدول های ضرب داخلی منسوب به آرامباسیچ و رائیچ [۴] حالت تساوی در تعمیم نامساوی دانکل ـ ویلیامز در C^*- مدول های ضرب داخلی مشخصه سازی می شود که با استفاده از آن، نتایج به دست آمده توسط پچریچ و رائیچ [۳۷] به عنوان حالت خاص به دست می آید.

فصل ۱
نامساوی های نرمی دانکل ـ ویلیامز

۱.۱ مقدمه

در سال ۱۹۶۴ دانکل و ویلیامز [۱۳] به یک بهبود مهم از نامساوی مثلثی برای بردارهای یکه دست یافتند. آنها نشان دادند که در فضای نرم دار $(X, \|.\|)$ به ازای هر دو عنصر ناصفر $x, y \in X$ نامساوی زیر برقرار است.

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{۴\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|} \tag{۱.۱}$$

برای نشان دادن نامساوی دانکل ـ ویلیامز مشاهده می شود که

$$\begin{aligned}
&\|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&\leq \|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\| + \|x\| \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&= \|x-y\| + \left\| \frac{(\|y\|-\|x\|)y}{\|y\|} \right\| \\
&= \|x-y\| + |\|y\|-\|x\|| \\
&\leq ۲\|x-y\|. \qquad (۲.۱)
\end{aligned}$$

مشابهاً داریم

$$\|y\|\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|\leq ۲\|x-y\|. \qquad (۳.۱)$$

اینک نامساوی (۱.۱) از جمع نامساوی های(۲.۱) و (۳.۱) به دست می آید.

در همان سال کرک و اسمایلی [۲۱] نشان دادند که تساوی در نامساوی دانکل ـ ویلیامز برقرار است اگر و فقط اگر $x=y$.

با معرفی فاصله زاویه ای یا فاصله کلارکسون [۸] بین هر دو عنصر ناصفر $x,y\in X$ به صورت $\alpha[x,y]:=\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|$، نامساوی دانکل ـ ویلیامز در واقع کران بالایی را برای فاصله زاویه ای بین هر دو بردار ناصفر یک فضای نرم دار به دست می دهد.

با توجه به نامساوی زیر

$$\alpha[x,y]\leq\frac{۲\|x-y\|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} \qquad (۴.۱)$$

که توسط ماسرا و شافر [۲۶] ارائه شده است، مشاهده می کنیم که نامساوی دانکل ـ ویلیامز حالت ضعیف تری از نامساوی (۴.۱) می باشد.

نامساوی دانکل ـ ویلیامز بهبودها، وارون ها و تعمیم های متعددی دارد که در این بخش به آنها می پردازیم.

در سال ۲۰۰۶ مالیگراندا [۲۴] بهبودی برای نامساوی مثلثی و نیز وارون آن چنین ارائه کرد

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|-\left(۲-\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\min\{\|x\|,\|y\|\} \qquad (۵.۱)$$

$$\|x+y\| \geq \|x\|+\|y\|-\left(۲-\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\max\{\|x\|,\|y\|\} \quad (۶.۱)$$

با بازنویسی نامساوی های مالیگراندا (۵.۱) و (۶.۱) به بهبودی برای نامساوی دانکل ـ ویلیامز و نیز وارون آن به فرم زیر دست می یابیم.

$$\alpha[x,y] \leq \frac{\|x-y\|+|\|x\|-\|y\||}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} \quad (۷.۱)$$

$$\alpha[x,y] \geq \frac{\|x-y\|-|\|x\|-\|y\||}{\min\{\|x\|,\|y\|\}} \quad (۸.۱)$$

همچنین مرسر [۲۸] با ارائه برهانی دیگر نامساوی (۸.۱) را مستقلاً اثبات نموده است.

در سال ۲۰۱۰ پچریچ و رائیچ [۳۶] با نشان دادن نامساوی زیر بهبودی دیگر از نامساوی دانکل ـ ویلیامز را به دست آوردند.

$$\alpha[x,y] \leq \frac{\left(۲\|x-y\|^{۲}+۲(\|x\|-\|y\|)^{۲}\right)^{۱/۲}}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} \quad (۹.۱)$$

توجه می کنیم که نامساوی (۹.۱) از نامساوی ماسرا ـ شافر (۴.۱) قوی تر و از نامساوی مالیگراندا (۷.۱) ضعیف تر است.

در قضیه زیر پچریچ و رائیچ نامساوی دانکل ـ ویلیامز و وارونش را برای هر تعداد متناهی بردار در یک فضای نرم دار تعمیم دادند.

قضیه ۱.۱.۱. [۳۸] گیریم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم دار و $x_1, \ldots, x_n \in X$ عناصر مخالف صفر باشند. در این صورت نامساوی های زیر برقرار است.

$$۱)\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| \leq \min_{1\leq i\leq n}\left\{\frac{1}{\|x_i\|}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}x_j\right\| + \sum_{j=1}^{n}\big|\,\|x_j\|-\|x_i\|\,\big|\right)\right\} \quad (۱۰.۱)$$

$$۲)\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| \geq \max_{1\leq i\leq n}\left\{\frac{1}{\|x_i\|}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}x_j\right\| - \sum_{j=1}^{n}\big|\,\|x_j\|-\|x_i\|\,\big|\right)\right\} \quad (۱۱.۱)$$

تبصره ۲.۱.۱. مشاهده می شود که در حالت $n = 2$ با قرار دادن $x_1 = x$ و $x_2 = -y$ در قضیه ۱.۱.۱ نامساوی های مالیگراندا (۷.۱) و (۸.۱) بدست می آیند.

همچنین پچریچ و رائیچ در [۳۸] حالت تساوی در قضیه ۱.۱.۱ را در فضاهای نرم دار اکیداً محدب مشخصه سازی کرده اند. در دو قضیه بعدی مشخصه سازی تساوی در (۱۰.۱) و (۱۱.۱) را بررسی می کنیم.

قضیه ۳.۱.۱. [۳۸] گیریم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم دار اکیداً محدب و $x_1, \ldots, x_n \in X$ عناصر مخالف صفر باشند. در این صورت گزاره های زیر با همدیگر معادلند.

(i) $\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| = \min_{1\leq i\leq n}\left\{\frac{1}{\|x_i\|}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}x_j\right\| + \sum_{j=1}^{n}\big|\,\|x_j\|-\|x_i\|\,\big|\right)\right\}$ ؛

(ii) $\|x_1\| = \ldots = \|x_n\|$ یا $i \in \{1, \ldots, n\}$ و $v \in X$ وجود دارند به قسمی که

$\sum_{k=1}^{n} x_k = \|\sum_{k=1}^{n} x_k\| v$ و $\operatorname{sgn}(\|x_i\| - \|x_j\|)\frac{x_j}{\|x_j\|} = v$

برای تمام j هایی $(j = 1, \cdots, n)$ که $\|x_i\| \neq \|x_j\|$.

قضیه ۴.۱.۱ [۳۸] گیریم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم دار اکیداً محدب و $x_1, \ldots, x_n \in X$ عناصر مخالف صفر باشند. در این صورت گزاره های زیر با همدیگر معادلند.

(i) $\left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\frac{1}{\|x_i\|}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| - \sum_{j=1}^{n} \left|\|x_j\| - \|x_i\|\right|\right)\right\}$ ؛

(ii) $\|x_1\| = \ldots = \|x_n\|$ یا $i \in \{1, \ldots, n\}$ و $v \in X$ وجود دارند به قسمی که

$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\|x_k\|} = \|\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\|x_k\|}\|v$ و $\operatorname{sgn}(\|x_j\| - \|x_i\|)\frac{x_j}{\|x_j\|} = v$

برای تمام j هایی $(j = 1, \cdots, n)$ که $\|x_j\| \neq \|x_i\|$.

در سال ۲۰۰۹ دراگومیر [۱۲] قضیه ۱.۱.۱ را با فراهم کردن کران های بالا و پائین مناسب برای نرم ترکیب خطی $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ (α_j ها اسکالر و $x_j \in X$ برای $j \in \{1, \ldots, n\}$) چنین تعمیم داده است.

قضیه ۵.۱.۱ [۱۲] گیریم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم دار، $x_1, \ldots, x_n \in X$ و $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ اسکالرهای دلخواهی باشند. در این صورت نامساوی های زیر برقرار است.

$$۱)\ \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right\| \leq \min_{1\leq i\leq n}\left\{|\alpha_i|\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - \alpha_i|\|x_j\|\right\}$$

$$۲)\ \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right\| \geq \max_{1\leq i\leq n}\left\{|\alpha_i|\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| - \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - \alpha_i|\|x_j\|\right\}$$

برای دیدن تعمیم های بیشتر نتایج دراگومیر می توان به [۴۳] مراجعه کرد.

۲.۱ گسترش نامساوی دانکل ـ ویلیامز در رابطه با فاصله $p-$ زاویه ای

الراشد [۱] با به کارگیری پارامتر مثبت q نامساوی دانکل ـ ویلیامز را چنین گسترش داد.

قضیه ۱.۲.۱. [۱] گیریم $(X, \|.\|)$ فضای نرم دار و $q \in \mathbb{R}$ $(q > 0)$ باشند. در این صورت گزاره های زیر برقرار است.

۱) اگر $0 < q \leq 1$ آنگاه $\alpha[x, y] \leq 2^{1+\frac{1}{q}} \frac{\|x-y\|}{(\|x\|^q+\|y\|^q)^{\frac{1}{q}}}$.

۲) اگر $q \geq 1$ آنگاه $\alpha[x, y] \leq 4 \frac{\|x-y\|}{(\|x\|^q+\|y\|^q)^{\frac{1}{q}}}$.

مفهوم فاصله $p-$ زاویه ای $(p \in \mathbb{R}, p \geq 0)$ به عنوان تعمیم فاصله زاویه ای بین هر دو بردار ناصفر یک فضای نرم دار چنین مطرح می شود (ببینید [۸، ۲۴]).

$$\alpha_p[x, y] := \|\|x\|^{p-1}x - \|y\|^{p-1}y\|$$

مالیگراندا با ارائه کران بالایی برای فاصله $p-$ زاویه ای نامساوی ماسرا ـ شافر (۲.۱) را چنین تعمیم داده است.

گزاره ۲.۲.۱. [۲۴] گیریم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم دار و $p \in \mathbb{R}$ $(p \geq 0)$ باشند. برای هر $x, y \in X\backslash\{0\}$ گزاره های زیر برقرار است.

۱) اگر $0 \leq p \leq 1$ آنگاه $\alpha_p[x, y] \leq (2 - p)\frac{\|x-y\|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}^{1-p}}$.

۲) اگر $p \geq 1$ آنگاه $\alpha_p[x, y] \leq p \max\{\|x\|, \|y\|\}^{p-1}\|x - y\|$.

اینک گسترش زیر از نامساوی دانکل ـ ویلیامز را در رابطه با مفهوم فاصله $p-$ زاویه ای ارائه می دهیم. همچنین نامساوی (۱۲.۱)، قضیه ۱.۲.۱ را تعمیم می دهد.

قضیه ۳.۲.۱ [۱۱] گیریم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم دار، $p \in [0, 1]$ و $q > 0$ مفروض باشند. در این صورت به ازای هر $x, y \in X \backslash \{0\}$ نامساوی زیر برقرار است.

$$\alpha_p[x, y] \leq 2^{1+\frac{1}{q}} \frac{\|x-y\|}{\left(\|x\|^{(1-p)q} + \|y\|^{(1-p)q}\right)^{\frac{1}{q}}} \tag{12.1}$$

برهان. با توجه به گزاره ۲.۲.۱ کافی است نشان دهیم

$$(2-p)\frac{\|x-y\|}{\max\{\|x\|, \|y\|\}^{1-p}} \leq 2^{1+\frac{1}{q}} \frac{\|x-y\|}{\left(\|x\|^{(1-p)q} + \|y\|^{(1-p)q}\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

بدون کاستن از کلیت، گیریم $\|x\| \leq \|y\|$.

از آنجایی که $p \leq 1$ و $q > 0$ مشاهده می کنیم که $\|x\|^{(1-p)q} + \|y\|^{(1-p)q} \leq 2\|y\|^{(1-p)q}$.

بنابراین $\left(\|x\|^{(1-p)q} + \|y\|^{(1-p)q}\right)^{1/q} \leq 2^{\frac{1}{q}}\|y\|^{1-p}$ یا معادلاً

$$\frac{1}{\|y\|^{1-p}} \leq \frac{2^{\frac{1}{q}}}{\left(\|x\|^{(1-p)q} + \|y\|^{(1-p)q}\right)^{\frac{1}{q}}}$$

و از آنجا نتیجه می گیریم که

$$(2-p)\frac{\|x-y\|}{\max\{\|x\|, \|y\|\}^{1-p}} \leq \frac{2\|x-y\|}{\|y\|^{1-p}} \leq 2^{1+\frac{1}{q}} \frac{\|x-y\|}{\left(\|x\|^{(1-p)q} + \|y\|^{(1-p)q}\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

□

فصل ۲
نامساوی های عملگری دانکل ـ ویلیامز I

۱.۲ مقدمه

در این فصل نامساوی دانکل ـ ویلیامز را برای عملگرهایی با قدر مطلق وارون پذیر مورد مطالعه قرار می دهیم.

جبر همه عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت $(\mathcal{H},\langle .,.\rangle)$ را با $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ نشان می دهیم. عملگر خودالحاقی $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را مثبت گوئیم و با نماد $A \geq ۰$ نشان می دهیم هرگاه برای هر $x \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $\langle Ax, x\rangle \geq ۰$. رابطه ترتیبی جزئی " $\leq$ " را روی عملگرهای خودالحاق $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ چنین تعریف می کنیم:

$$\text{“}A \leq B \text{ هر گاه } B - A \text{ مثبت باشد.”}$$

قدر مطلق عملگر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را به عنوان ریشه دوم عملگر مثبت A^*A تعریف می کنیم، یعنی $|A| := (A^*A)^{\frac{۱}{۲}}$ که در آن A^* عملگر الحاقی A می باشد.

در پایان این بخش به نامساوی عملگری بوهر اشاره می شود که ابزار مناسبی جهت بررسی برخی از نامساوی های عملگری می باشد. صورت زیر از نامساوی عملگری بوهر را حرزالله در سال۲۰۰۳ اثبات کرده است. برای دیدن تعمیم های نتایج حرزالله می توان به مقالات مصلحیان و ژانگ

[۳۴] و مصلحیان و رائیچ [۳۲] مراجعه کرد.

قضیه ۲.۱.۱. [۱۶] به ازای عملگرهای $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ و $\frac{۱}{r} + \frac{۱}{s} = ۱$ $(r > ۱)$ داریم

$$|A - B|^{۲} \leq r|A|^{۲} + s|B|^{۲} \tag{۲.۱}$$

همچنین تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $B = (۱ - r)A$.

همچنین نامساوی عملگری بوهر (۲.۱) را می توان به عنوان نتیجه ای از اتحاد زیر (قانون متوازی الاضلاع تعمیم یافته برای عملگرها) در نظر گرفت

$$|A - B|^{۲} + \frac{۱}{t}|tA + B|^{۲} = (۱ + t)|A|^{۲} + (۱ + \frac{۱}{t})|B|^{۲} \qquad (t \in \mathbb{R}\backslash\{۰\})$$

و به صورت زیر بازنویسی کرد.

نتیجه ۲.۱.۲. [۹] به ازای عملگرهای $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ و $t > ۰$ داریم

$$|A - B|^{۲} \leq (۱ + t)|A|^{۲} + (۱ + \frac{۱}{t})|B|^{۲}$$

همچنین تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $tA + B = ۰$.

۲.۲ نامساوی عملگری دانکل ـ ویلیامز

نخستین صورت عملگری نامساوی دانکل ـ ویلیامز را پچریچ و رائیچ در سال ۲۰۱۰ به دست آوردند. آنها با برآورد $\left|A|A|^{-۱} - B|B|^{-۱}\right|$ برای فاصله زاویه ای، وقتی AوB عملگرهایی با