دانشگاه پیام نور

مرکز مشهد

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت کارشناسی ارشد

عنوان:

تابعک های تقریبا ضربی روی رده خاصی از جبرهای باناخ

استاد راهنما:

آقای دکتر جلیلیان عطار

استاد مشاور:

آقای دکتر میرمصطفایی کامل

نگارش:

زهرا اکبری

شهریورماه 88

بسم الله الرحمن الرحيم

ت طا

فصل اول

مفاهیم و قضایای مقدماتی

!!! !!!! !!!! â !!!!!1! 1

1-1 تعریف

فضای برداری X را یک فضای نرمدار[1] نامیم اگر به هر $x \in X$ عددی حقیقی مانند $\| x \|$ ، به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که :

1) به ازای هر y,x در X، $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$

2) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد $\| \alpha x \| = | \alpha | \, \| x \|$

3) اگر $x \neq 0$، $\| x \| > 0$.

از واژه نرم به معنی تابعی که x را به $\| x \|$ می نگارد نیز استفاده می شود.

!!!!! !! ! !!! â !

1-2 تعریف

یک نیم نرم بر فضای برداری X تابعی است حقیقی مانند p بر X به طوری که به ازای هر y,x در X و جمیع اسکالرهای α،

1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

2) $p(\alpha x) = | \alpha | \, p(x)$

خاصیت (1) را زیرجمع پذیری[2] نامند. نیم نرم p در صورت صدق کردن در

3) اگر $x \neq 0$، $p(x) \neq 0$ یک نرم است.

---

[1] Normed space

[2] Summability

گوئیم خانواده P از نیم نرمها بر X جداساز است اگر به هر $x \neq 0$ دست کم یک $p \in P$ چنان باشد که $p(x) \neq 0$.

1-3 خواص نیم نرم

فرض کنیم p یک نیم نرم بر فضای برداری X باشد در این صورت

1) $p(0)=0$

2) $|p(x)-p(y)| \le p(x-y)$

3) $p(x) \ge 0$

4) $\{x : p(x)=0\}$ زیرفضای X است.

1-4 تعریف

اگر فضای برداری H بـرروی ¢ را داشـته باشـیم و متـر تعریـف شـده توسـط نگاشـت $H \times H \to$ ¢ که به صورت $(\alpha,\beta) \to <\alpha,\beta>$ می باشد H را تام کند آنگاه H را فضـای هیلبرت[3] نام دارد.

1-5 تعریف

هر فضای باناخ[4] یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام می باشد.

هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است.

البته ساده ترین فضای باناخ خود میدان مختلط با نرم $\|x\|=|x|$ می باشد.

فضای باناخ حقیقی را نیز می توان مطرح کرد. تعریف همان است جز آنکه تمام اسکالرها حقیقی فرض شوند.

1-6 تعریف

l^P فضای برداری همه دنبالـه های (x_K) است به طوری که $\sum |x_K|^P$ همگـراست وقتـی

---

[3] Hilbert space
[4] Banach space

$1 \le P < \infty$ می باشد.

1-7 قضیه

فرض کنید $1 \le P < \infty$ در این صورت l^P یک فضای باناخ با نرم

$$\| x \| = (\sum_{K=1}^{\infty} | x_K |^P)^{\frac{1}{P}}$$

وقتی که $x = (x_K) \in l^P$

برهان : [5]

1-8 تعریف

تبدیل خطی Λاز فضای خطی نرمدار X به توی فضای خطی نرمدار Y را در نظر گرفته و نرم آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\| \Lambda \| = \sup \{ \| \Lambda x \| : \| x \| \le 1 , \ x \in X \} \qquad (*)$$

$\| x \|$ نرم x در X و $\| \Lambda x \|$ نرم Λx در Y است. گاهی چند نرم همزمان می آیند. از قراین وضع آنها مشخص خواهد شد. در رابطه (*)می توان به بردارهای یکه محدود شد؛ یعنی به x هایی که $\| x \| = 1$ این امر سوپریمم را تغییر نمی دهد زیرا

$$\| \Lambda(\alpha x) \| = \| \alpha \Lambda x \| = | \alpha | \ \| \Lambda x \|$$

بنابراین رابطه زیر نتیجه می شود :

$$\| \Lambda \| = \sup \{ \| \Lambda x \| : \| x \| = 1 , \ x \in X \}$$

همچنین $\| \Lambda \|$کوچکترین عددی است که نامساوی

$$\| \Lambda x \| \le \| \Lambda \| \| x \|$$

به ازای هر $x \in X$ برقرار است .

1-9 تعریف

اگر X و Y فضاهای برداری توپولوژیکی باشند، $B(X,Y)$ نمایش مجموعه تمام نگاشتها (یا عملگرهای) خطی کراندار از X به توی Y است. برای سادگی $B(X,X)$ را با $B(X)$ نشان می دهیم. هر $B(X,Y)$ خودش یک فضای برداری نسبت به تعریف معمولی جمع و ضرب اسکالری تابعهاست.

1-10 تذکر

$B(H)$ یک فضای باناخ با نرم عملگر زیر است :

$$\| T \| = \sup\{\| Tx \| : \| x \| \le 1\}$$

1-11 تعریف

فضای دوگان ازیک فضای برداری X، فضای برداری X^* است که عناصرش تابعکهای خطی پیوسته روی X می باشند. توجه کنید که جمع و ضرب اسکالر تعریف شده در X^* به صورت زیر است :

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)\,(x) = \Lambda_1 x + \Lambda_2 x$$

$$(\alpha\Lambda)(x) = \alpha\Lambda x$$

!!!

1-12 تعریف

یک رابطه مانند $\le$ روی یک مجموعه Λ ترتیبی جزئی نامیده می شود. هرگاه منعکس، متعدی و پادمتقارن باشد. در این حالت $(\Lambda,\le)$ را یک مجموعه به طور جزئی مرتب می نامیم این مجموعه از بالا (پایین) جهتدار[5] نامیده می شود . هر گاه هر زیر مجموعه دو

---

[5] Direct

عضوی از آن تحت رابطه $\leq$ از بالا (پایین) کراندار باشد. Λ را یک مجموعه جهتدار می نامیم هر گاه هم از بالا و هم از پایین جهتدار باشد.

در حالت خاص که Λ تحت رابطه $\leq$ مرتب باشد یعنی به ازای هر $\alpha,\beta \in \Lambda$ داشته باشیم $\alpha \leq \beta$ یا $\beta \leq \alpha$، آنگاه Λ جهتدار خواهد بود لذا مثلا $\Lambda = R$ تحت رابطه ترتیبی معمولی یک مجموعه جهتدار است.

فرض کنیم X مجموعه ای دلخواه باشد و $\Lambda = p(X)$. در این صورت Λ تحت رابطه شمول $\subseteq$ یک مجموعه جهتدار می باشد. چون به ازای هر زیر مجموعه دو عضوی $\{A,B\}$ می توان گفت که $A\cap B, A\cup B$ به ترتیب کران های بالا و پایین $\{A,B\}$هستند.

1-13 تعریف

فرض کنیم $(\Lambda,\leq)$ مجموعه ای جهتدار و X مجموعه ای دلخواه باشد. در این صورت هر خانواده اندیس گذار مانند $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ از عناصر X که توسط مجموعه Λ اندیس گذاری شده باشد یک تور[6] در X اندیس شده یا جهتدار شده به وسیله Λ نامیده می شود.

در حالت خاص $\Lambda = N$ با رابطه معمولی روی N تور $\{x_n\}_{n\in N}$ همان دنباله $\{x_n\}$ می باشد و لذا تور تعمیمی از مفهوم دنباله است . اما در تور اندیس می تواند از مجموعه های قوی تر از N بیایند و لذا ممکن است یک تور شمارا نباشد مثل تور $\{\frac{1}{r^2+1}\}_{r\in[0,1]}$ که توری ناشماراست .

1-14 تعریف

فرض کنیم (X,d) فضای متریک و $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ توری در آن باشد تور $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ را همگرا به حد x گوییم و می نویسیم $x_\lambda \to x$ یا $\lim_\lambda x_\lambda = x$ هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ اندیس مانند

---

[6] Net

$\lambda_\varepsilon \in \Lambda$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $\lambda \geq \lambda_\varepsilon$ داشته باشیم $d(x_\lambda, x) < \varepsilon$ در غیر این صورت تور $\{x_\lambda\}$ واگرا نامیده می شود.

!!! â!! ‼ !!‼ !!!‼‼‼1! 2

فرض کنید X یک مجموعه و F خانواده از توابع از X به توی فضای توپولوژیکی Y باشد، توپولوژی ضعیف بر X که به وسیله F القا می شود، ضعیفترین (کوچکترین) توپولوژی بر Xاست که هر تابع F را پیوسته می سازد. بنابراین یک تور $\{x_\alpha\}$ در X به x در X در این توپولوژی همگراست اگر وفقط اگر $\{f(x_\alpha)\}$به $f(x)$ برای هر f در F همگرا باشد.

فرض کنید X یک فضای باناخ و X^* فضای باناخ دوگان X باشد. منظور از توپولوژی ضعیف بر X همیشه توپولوژی ضعیف القا شده توسط خانواده تمام تابعکهای خطی و کراندار بر X است. بنابراین یک تور $\{x_\alpha\}$ به xدر X به طور ضعیف همگراست (یعنی در توپولوژی ضعیف) اگر و فقط اگر $\{F(x_\alpha)\}$به $F(x)$ برای هر F در X^* همگرا باشد.

W^*–توپولوژی بر X^* عبارتست از توپولوژی ضعیف بر X^* که توسط خانواده $P = \{f_x : x \in X\}$ القا می شود که به ازای هر xدر X تابع $f_x : X^* \to ¢$ به صورت $f_x(F) = F(x)$ و $F \in X^*$ تعریف می شود. بنابراین یک تور $\{F_\alpha\}$ در X^* به F در X^* در W^*–توپولوژی همگراست اگر و فقط اگر $\{F_\alpha(x)\}$ به $F(x)$ به ازای هر xدر X همگرا باشد.

!![7]! !!!!!! !! !1! 3

15- 1تذکر

برای یک فضای هیلبرت H، فرض کنیم $B(H)$ فضای تمام عملگرهای خطی کراندار بر

---

[7] Banach Algebra

H باشد $B(H)$ نیز به وضوح با ساختار خطی و ترکیب به عنوان ضرب، یک جبر است.

1-16 تعریف

اگر A شامل عنصر واحد e باشد (یعنی برای هر $x \in A$ داشته باشیم $xe = ex = x$) آنگاه A را یک جبر یکدار گوئیم .

1-17 تعریف

یک جبر باناخ، جبر یکدار A به همراه نرم کامل $\| \ \|$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

1) $\|1\| = 1$

2) $\|xy\| \le \|x\| \|y\|$ به ازای تمام y,x ها در A.

1-18 تذکر

فرض کنیم X یک فضای باناخ و $B(X)$ فضای تمام توابع خطی کراندار بر X باشد. واضح است که $B(X)$ فضای برداری است. همچنین $B(X)$ یک جبر باناخ است اگر نرم به صورت $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \le 1\}$ تعریف شود و ضرب را ترکیب توابع تعریف کنیم.

1-19 تعریف

اگر A خاصیت جابجایی[8] داشته باشد (یعنی برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم $xy = yx$) آنگاه A را جبر باناخ جابجایی گوئیم.

1-20 مثالها

- ساده ترین جبر باناخ میدان مختلط $\mathbb{C}$ است که $\|z\| = |z|$ (قدر مطلق z).

---

[8] Commutative

- اگر X یک فضای هاسدورف فشرده غیرتهی باشد، مجموعه تمام تابعکهای پیوسته $f: X \to ¢$ را با $C(X)$ نشان می دهیم . $C(X)$ همراه با اعمال نقطه ای و نرم سوپریمم $\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$ تشکیل یک جبر باناخ جابجایی یکدار می دهد که تابع ثابت 1 عنصر واحد آن است زیرا :

با توجه به ضرب نقطه ای تعریف شده روی $C(X)$ یک جبر مختلط داریم و نرم فوق کامل است حال با توجه به

$$1: X \underset{x\to 1}{\to} ¢$$

داریم :

$$\|1\| = \sup_{x\in X}|1(x)| = 1$$

$$\begin{aligned}\|f.g\| &= \sup_{x\in X}|f(x)g(x)| \\ &= \sup_{x\in X}|f(x)|\,|g(x)| \\ &\le \|g\| \sup_{x\in X}|f(x)| \\ &= \|g\|\,\|f\|\end{aligned}$$

- اگر H یک فضای هیلبرت باشد، $B(H)$ یک جبر باناخ با نرم عملگر و ضرب عملگر (یعنی ترکیب) است. عملگر همانی I، یکه ضربی آن است.

متر تعریف شده توسط نرم عملگر فضای $B(H)$ را تام می کند و از طرفی داریم :

$$\begin{aligned}\|f.g\| &= \sup\{\|(fog)(x)\| \ : \ \|x\| \le 1\} \\ &= \sup\{\|f(g(x))\| \ : \ \|x\| \le 1\} \\ &\le \sup\{\|f\|\,\|g(x)\| \ : \ \|x\| \le 1\} \\ &= \|f\| \sup\{\|g(x)\| \ : \ \|x\| \le 1\} \\ &= \|f\|\,\|g\|\end{aligned}$$

و همچنین می دانیم که

$$(I.f)(x)=(Iof)(x)=f(x)$$

$$\|1\|=\|I\|=\sup\{\|I(x)\| \ : \|x\|\le 1\}$$

$$=\sup\{\|x\| \ : \|x\|\le 1\}=1$$

توجه کنید که وقتی ، $H=\phi^n$ فضای با بعد متناهی باشد، $B(\phi^n)$ را می توان با جبر $M_n(\phi)$ متشکل از تمام ماتریس های $n\times n$ با درایه های مختلط مشخص کرد. با این تناظر ضرب عملگر متناظر با ضرب ماتریسی است.

با تعریف زیر ϕ^n یک فضای هیلبرت می شود :

$$(x_1,...,x_n)\ .\ (y_1,...,y_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i$$

و $f\in B(\phi^n)$ متناظر است با یک ماتریس $n\times n$ که درایه های آن اعداد مختلط می باشند.

- Zرا با اندازه شمارشی در نظر می گیریم . در این صورت

$$L'(Z)=\{(a_n)_{-\infty}^{+\infty} : \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|<\infty\}$$

با ضربی که در زیر تعریف می شود یک جبر باناخ است زیرا :

$$f\in L'(Z)\Rightarrow f(n)=a_n \qquad (\text{به ازای هر } n\in Z)$$

$L'(Z)$ یک فضای برداری است نرم در $L'(Z)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\|f\|=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|f(n)|$$

نرم فوق فضا را تام می کند. (نرم فوق همان نرم $\|\ \|_P$ برای $L^P(\mu)$ می باشد که چون اندازه شمارشی است به صورت فوق درآمده است.)

ضرب تعریف شده در $L'(Z)$ به صورت زیر است :

$$f*g(n)=\sum_{K=-\infty}^{+\infty} f(n-k)g(k) \qquad (n\in Z\,, \quad f,g\in L'(Z))$$

بنابر قضیه فوبینی :

$$\|f*g\|=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{K=-\infty}^{+\infty} f(n-k)g(k)\right|$$

$$\leq\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{K=-\infty}^{+\infty}|f(n-k)|\,|g(k)|$$

$$=\sum_{K=-\infty}^{+\infty}|g(k)|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|f(n-k)|=\|f\|\,\|g\|$$

بنابراین :

$$\|f*g\|\leq\|f\|\,\|g\|$$

یکه ضربی در $L'(Z)$ تابع 1 است که بـه صـورت $1(0)=1$ و $1(n)=0$ بـرای $n\in Z\setminus\{0\}$ تعریف می شود و

$$\|1\|=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|1(n)|=1$$

بنابراین $L'(Z)$ یک جبر باناخ جابجایی یکدار است.

!!!! !!!!!!!!!!! â !1! 4

فرض کنید A یک جبر باشد . در این صورت $\widetilde{A}=A\oplus ¢$ یک فضای برداری است در این صورت عمل ضرب را در $\widetilde{A}$ به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$(a,\lambda)\,(b,\mu)=(ab+\lambda b+\mu a,\lambda\mu)$$

در این صورت $\widetilde{A}$ یک جبر با یکه $(0,1)$ است. جبر $\widetilde{A}$ را یکه دار شـده A نـامیم. نگاشـت $\underset{a\to(a,0)}{A\to\widetilde{A}}$ یک یکریختی است به طوری کـه A یـک ایـده آل از $\widetilde{A}$ اسـت. $a+\lambda$ را در ازای

(a,λ) می نویسیم . نگاشت $\underset{a+\lambda\to\lambda}{\tilde{A}\to ¢}$ یک همریختی یکانی با هسته A است و همریختی متعارف نامیده می شود.

اگر A یک جبر نرمدار باشد نرم در $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\| a+\lambda \| = \| a \| + | \lambda |$$

$\tilde{A}$ دارای خواص زیر است :

$$(a,\lambda) + (b,\mu) = (a+b, \lambda+\mu)$$

$$\theta(a,\lambda) = (\theta a, \theta\lambda)$$

اگر A یک جبر باناخ باشد آنگاه $\tilde{A}$ نیز یک جبر باناخ است.

!!!! â Ÿ!!! !!!!!!!!!!!1! 5

1-21 تعریف

در جبر باناخ A فرض کنید $G(A)$ مجموعه تمام عناصر وارون پذیردر A باشد. به وضوح $G(A)$ یک گروه ضربی است.

1 -22 **مثالها** :

- اگر X یک فضای هاسدورف فشرده باشد گروه وارون پذیر $C(X)$ دقیقا متشکل از تمام توابعی است که صفر نمی شود.
- فرض کنید برای یک فضای هیلبرت H، T در $B(H)$باشد. T در $B(H)$ وارون پذیر است اگر و فقط اگر نگاشتی یک به یک و پوشا باشد . هر گاه H بعد متناهی داشته باشد $T \in B(H)$ وارون پذیر است اگر و فقط اگر T یک به یک باشد. حقیقتی که در جبر خطی معروف است.

- در جبر پیچشی $L'(Z)$[9] یک دنباله دو طرفه $f=\{f(n):\, n\in Z\}$ از اعداد مختلط در $L'(Z)$ وارون پذیر است اگر و فقط اگر تابع پیوسته $\sum_{n\in Z} f(n)\, z^n$ روی دایره واحد صفر نشود.

برهان [23]

1-23 گزاره

اگر A یک جبر باناخ و x در A باشد با $\|x\|<1$ آنگاه $1-x$ در $G(A)$ است و $\|(1-x)^{-1}\|\le(1-\|x\|)^{-1}$.

برهان [23]

1-24 گزاره

برای هر جبر باناخ A گروه وارون پذیر $G(A)$ یک مجموعه باز در A است.

برهان

فرض کنید x در $G(A)$ باشد. نشان می دهیم مجموعه

$$\{y\in A\,,\ \|y-x\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}\}$$

در $G(A)$ قرار دارد و این به وضوح نشان خواهد داد که $G(A)$ باز است. اگر y در A باشد و $\|y-x\|<\|x^{-1}\|^{-1}$ واضح است که $\|x^{-1}\|\,\|y-x\|<1$ و بنابراین $\|x^{-1}(y-x)\|<1$ و یا $\|1-x^{-1}y\|<1$ با توجه به گزاره (1-23) $x^{-1}y$ وارون پذیر است و از آنجا که x در $G(A)$ می باشدبنابراین y نیز وارون پذیر است.

---

[9] Convolution algebra

1-25 تذکر

فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط با عنصر همانی 1 باشد و $Inv(A)$ و $Sing(A)$ به ترتیب نمایش مجموعه تمام عناصر وارون پذیر در A و عناصر تکین A باشد . به عبارتی $Sing(A) = A \setminus Inv(A)$ است.

فرض کنید $a \in A$ و $r > 0$ باشد $D(a,r)$ دیسک باز به مرکز a و شعاع r است. اگر $a \in Inv(A)$ آنگاه

$$D(a, \frac{1}{\| a^{-1} \|}) \subseteq Inv(A)$$

بنابراین

$$d(a, \sin g(A)) = \inf\{\| a - b \| : b \in \sin g(A)\} \geq \frac{1}{\| a^{-1} \|}$$

می باشد.

1-26گزاره

فرض کنید A یک جبر باناخ است. انعکاس $x \to x^{-1}$ بر $G(A)$ پیوسته است.

برهان [23]

!![10]! â ! !1! 6

1-27 تعریف

فرض کنید Aیک جبر باناخ و x در A باشد. طیف x که با $\sigma_A(x)$ یا ساده تر با $\sigma(x)$ نمایش داده می شود مجموعه تمام اعداد مختلطی مانند λ است که $\lambda 1 - x$ در A وارون پذیر نباشد.

$$\sigma_A(x) = \sigma(x) = \{\lambda \in \text{¢} \ : \lambda 1 - x \notin G(A)\}$$

---

[10] Spectrum

مکمل $\sigma(x)$ در ¢را مجموعه حلال[11] x نامیم.

توجه کنید که مفهوم طیف کاملا جبری است و فقط به ساختار جبری یک جبر باناخ بستگی دارد.

1-28 مثالها

- فرض کنید $A = C(X)$ که در آن X فشرده و هاسدورف است. در این صورت برای هر f در A، $\sigma(x) = f(x)$ زیرا :

$$\sigma(x) = \{\lambda \in ¢ \ : \lambda 1 - f \notin G(A)\}$$

$$= \{\lambda \in ¢ \ : \exists x \in X \quad s.t \quad \lambda = f(x)\}$$

$$= f(x)$$

- فرض کنید $A = B(¢^n) = M_n(¢)$، جبر ماتریس های $n \times n$و در این صورت برای هر T در A،

$$\sigma(T) = \{\lambda \in ¢ \ : \lambda 1 - T \notin G(A)\}$$

$$= \{\lambda \in ¢ \ : \det(\lambda 1 - T) = 0\}$$

بنابراین طیف $\sigma(x)$ از تمام مقادیر ویژه ماتریس T تشکیل شده است. (λ یک مقدار ویژه A است اگر به ازای $x \neq 0$، $Ax - \lambda x = 0$)

طیف ماتریس A در $M_n(¢)$ مجموعه تمام مقادیر ویژه A است.

- فرض کنید $A = B(H)$ که H یک فضای هیلبرت با بعد نامتناهی است و فرض کنید $T \in A$ در این صورت اگر λ یک مقدار ویژه T باشد آنگاه $\lambda \in \sigma(T)$.

فرض کنیم λ یک مقدار ویژه T باشد در این صورت

$$\exists x \in H \quad , \quad x \neq 0 \ \ s.t \ \ (T - \lambda 1)(x) = 0$$

---

[11] Radical