بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض-جبر

انرژی لاپلاسین گراف‌ها

استاد راهنما:

دکتر محمدعلی ایرانمنش

استاد مشاور:

دکتر سعید علیخانی

پژوهش و نگارش:

محبوبه خان‌زاده مهرآبادی

مهر ۱۳۹۱

تقدیم به او که باغبان زندگی ام است و دستان پر مهر او همیشه سایه سرم است

پدر بزرگوارم.

تقدیم به او که با صبر و شکیبایش در تمام دوران زندگی ام امید موفقیت را در من زنده نگاه داشت

مادر مهربانم.

تقدیم به او که پیام آور طراوت باران است در کشت آباد دلتنگی ام و تبسم سبز بهار است در طلوع هستی ام،

مهربانی که نامش بر بلندای عشق است

همسرم.

سپاس‌گزاری...

به‌نام خداوندگار بزرگی که عقل را محل تراوش اندیشه‌ها قرار داد.

در آغاز بر خود واجب می‌دانم از زحمات استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمدعلی ایرانمنش که با راهنمایی‌های فراوانشان، مرا یاری نمودند، تشکر کنم.

همچنین از جناب آقای دکتر سعید علیخانی، استاد مشاور ارجمندم، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از خانواده عزیزم که پیوسته یاریگرم بودند و هر لحظه تلاشم با فداکاری آن‌ها میسر گشته، زیبایی حضور همسرم در کنارم، که خستگی‌های این راه را به امید و روشنی راه تبدیل کرده و امیدوارم بتوانم در آینده‌ای نزدیک جوابگوی این همه محبت آنها باشم، سپاس‌گزاری می‌کنم.

چکیده

انرژی و انرژی لاپلاسین (بدون علامت) کمیت‌هایی هستند که به ترتیب برحسب مقادیر ویژه و مقادیر ویژه لاپلاسین (بدون علامت) تعریف می‌شوند. مقادیر ویژه و مقادیر ویژه لاپلاسین (بدون علامت) گراف G که همان مقادیر ویژه ماتریس مجاورت و ماتریس لاپلاسین (بدون علامت) G هستند، اهمیت زیادی در مطالعه ویژگی‌های گراف G دارند. در این پایان نامه سعی بر این است که برخی از کران‌های انرژی لاپلاسین و انرژی لاپلاسین بدون علامت را بررسی کنیم. در این مباحث گراف را ساده در نظر می‌گیریم. انرژی لاپلاسین برای گراف جهت‌دار را انرژی لاپلاسین اریب می‌نامیم و در این پایان نامه بخش مختصری به آن اختصاص داده‌ایم.

کلمات کلیدی:

انرژی لاپلاسین ، انرژی لاپلاسین بدون علامت، انرژی لاپلاسین اریب، طیف گراف.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

نمادها

G . . . . گراف

$V(G)$ . . . . مجوعه رئوس گراف G

$E(G)$ . . . . مجموعه یال‌های گراف G

G^c یا $\bar{G}$ . . . . مکمل G

$tr(A)$ . . . . اثر ماتریس A

$spec(G)$ . . . . طیف گراف G

$||v||$ . . . . نرم بردار v

x^t . . . . ترانهاده‌ی بردار x

$\bar{v}$ . . . . مزدوج بردار v

x^* . . . . مزدوج ترانهاده‌ی بردار x

U^* . . . . ماتریس الحاقی U

$\mathcal{L}$ . . . . ماتریس لاپلاسین

$\mathcal{L}^+$ . . . . ماتریس لاپلاسین بدون علامت

L_S . . . . ماتریس لاپلاسین اریب

$LE(G)$ . . . . انرژی لاپلاسین گراف G

$LE^{+}(G)$ . . . . انرژی لاپلاسین بدون علامت گراف G

$L(G)$ . . . . گراف یالی گراف G

$\mathbb{C}^n$ . . . . مجموعه اعداد مختلط n تایی

$\mathbb{R}^n$ . . . . مجموعه اعداد حقیقی n تایی

$Q^{-۱}$ . . . . وارون ماتریس Q

$span$ . . . . تولید شده توسط

$(x_۱, \ldots, x_n)^t$ . . . . ترانهاده‌ی بردار $(x_۱, \ldots, x_n)$

K_n . . . . گراف کامل با n رأس

$\mathbb{Q}$ . . . . مجموعه اعداد گویا

$\mathbb{R}$ . . . . مجموعه اعداد حقیقی

$K_{۱,n}$ . . . . گراف ستاره

Δ . . . . ماکزیمم درجه رئوس

δ . . . . مینیمم درجه رئوس

$\mathcal{L}_G(x)$ . . . . چندجمله‌ای مشخصه لاپلاسین گراف G

۱.۰ پیشگفتار

نظریه گراف شاخه‌ای از ریاضیات است. این نظریه کاربردهای زیادی در شیمی، فیزیک، بیولوژی و علوم نانو دارد. امروزه با استفاده از دانش ریاضی، مسائل زیادی از این علوم با دقت زیاد مورد مطالعه قرار گرفته است.

نظریه‌ی گراف شیمیایی یک شاخه‌ی توپولوژی از ریاضی-شیمی است و نظریه‌ی گراف برای مدل سازی ریاضی از پدیده‌های شیمیایی کاربرد دارد.

ایوان گوتمن [۱] در سال ۱۹۷۸ انرژی یک گراف را برابر با مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت آن تعریف کرد. با آن که این مفهوم در علم شیمی کاربرد دارد اما در عین حال مورد توجه ریاضیدانان در مباحثی نظیر نظریه ی جبری گراف نیز می باشد و به عنوان یک پارامتر جبری گراف مطرح است.

ماتریس لاپلاسین از تفاضل ماتریس های قطری درجه رئوس و مجاورت گراف حاصل می‌شود. کمیت انرژی لاپلاسین گراف از جمع قدرمطلق تفاضل مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین و میانگین درجه رئوس گراف به دست می‌آید. اخیراً در این زمینه بسیار کار شده است و مقاله‌های زیادی در مورد آن وجود دارند.

در این پایان نامه انرژی لاپلاسین را بررسی می‌کنیم. این پایان نامه به صورت زیر سازمان دهی شده است:

در فصل اول مفاهیم و مقدماتی از نظریه گراف بیان شده است.

فصل دوم را به طیف لاپلاسین اختصاص می‌دهیم. این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول طیف گراف و در بخش دوم رابطه طیف لاپلاسین و اعمال گراف را بررسی می‌کنیم. در این فصل از مراجع [۱۵], [۲۶], [۲۴], [۲۳], [۲۵], [۱۰], [۹], [۶], [۴] استفاده شده است.

فصل سوم در پنج بخش ارائه شده است. انرژی لاپلاسین و لاپلاسین بدون علامت و رابطه انرژی لاپلاسین و اعمال گراف در سه بخش بیان شده اند. در بخش چهارم و بخش پنجم به انرژی لاپلاسین اریب می‌پردازیم.

مراجع این فصل [۳۳], [۲۷], [۲۰], [۲۱], [۱۸], [۱۴], [۱۳], [۸], [۷], [۳], [۲], [۱] می‌باشند.

---

[۱] Ivan Gutman

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

۱.۱ مطالبی درمورد نظریه گراف

واژه‌ی گراف که نخستین بار توسط سیلوستر [۱] به کار گرفته شد، برای اولین بار توسط لئوناردو اویلر [۲] ریاضیدان معروف سوئیسی در قرن هجدهم برای حل معمای پل‌های گونیسبرگ از گراف مورد استفاده قرار گرفت. اما نظریه گراف در آغاز مورد توجه نبود، زیرا برای حل معماها و تحلیل بازی‌ها به کار می‌رفت و از قرن نوزدهم به بعد بود که ریاضیدانان به توانایی گراف برای مدل‌سازی بسیاری از مسائل کاربردی و نظری پی بردند. نظریه‌ی گراف شاخه‌ای جدید از ریاضیات است و کاربرد زیادی در سایر علوم دارد.

با توجه به این‌که دانشجویان رشته ریاضی در دوره کارشناسی با درس گراف آشنا می‌شوند، در این فصل از پرداختن به مطالب ساده‌ی گراف چشم پوشی کرده‌ایم. برای مطالعه بیش‌تر در مورد گراف‌ها مراجع [۵] و [۳۰] را به خواننده پیشنهاد می‌کنیم.

یک گشت در گراف G دنباله‌ای از رئوس به صورت $v_۰v_۱\dots v_m$ است که به ازای هر $۰ \leq i \leq m-۱$ داشته باشیم $v_iv_{i+۱} \in E$.

این تعریف برای تمام گراف‌ها اعم از ساده، چندگانه و جهت‌دار برقرار است. در یک گشت به صورت $v_۰v_۱v_۲\dots v_m$، که آن را گشتی بین $v_۰$ و v_m تعریف می‌کنیم، هم رئوس و هم یال‌ها می‌توانند تکراری باشند. طول یک گشت شامل m رأس به صورت $v_۰v_۱v_۲\dots v_{m-۱}$ را برابر با $m-۱$ می‌گیریم و بیان‌گر تعداد یال‌هایی است که این گشت می‌پیماید.

اگر در یک گشت رئوس ابتدا و انتهای آن یکسان باشند، یعنی $v_۱v_۲\dots v_{m-۱} = v_۱$، آن را یک گشت بسته می‌نامیم.

اگر در تعریف گشت این شرط را هم اضافه کنیم که یال تکراری نداشته باشیم آن را گذر می‌نامیم. به عبارت دیگر گذر، گشتی است که یال تکراری ندارد. تعریف طول گذر نیز مانند گشت می باشد. گذر بسته مانند گشت بسته، به گذری می‌گوییم که رئوس ابتدایی و انتهایی آن یکسان باشند.

اگر علاوه بر یال‌ها، رئوس یک گشت هم غیر تکراری باشند آن را مسیر می‌نامیم. به عبارت دیگر مسیر، گذری با رئوس غیر تکراری می‌باشد. در مسیر $v_۱v_۲v_۳\dots v_mv_{m+۱}$ که $m \geq ۳$، اگر $v_۱ = v_{m+۱}$ باشد

[۱] Silvester

[۲] L. Euler

آن را یک دور می‌نامیم. طول یک دور با m رأس، به صورت $v_1v_2\dots v_mv_1$ را برابر با m می‌گیریم و بیان‌گر تعداد یال‌های آن می‌باشد.

لم ۱.۱.۱. در گراف G هر گشت بسته با طول فرد، شامل دوری فرد است.

برهان. گزاره به وسیله استقرا روی طول گشت‌های فرد بسته بین دو رأس u و v که آن را با k نشان می‌دهیم، ثابت می‌شود.

گام اول: $k = 3$. گشت بسته به طول ۳، دور به طول ۳ را پیمایش می‌کند. در نتیجه درستی قضیه در این حالت برقرار است.

گام استقرا: $k > 3$. فرض می‌کنیم ادعا برای تمام گشت‌های بسته با طول فرد و کم‌تر از k برقرار است. گشت بسته با طول فرد به صورت $W : x_1x_2\dots x_kx_1$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت اگر W به جزء دو رأس ابتدا و انتها، شامل هیچ رأس تکراری نباشد دوری با طول فرد است، و اگر در میان رئوس x_1، x_2، ...،x_k دو رأس یکسان وجود داشته باشد مثلاً $x_i = x_j$ که در آن $0 \leq i < j \leq k$، آن‌گاه $W_1 : x_1x_2\dots x_ix_{j+1}\dots x_kx_1$ و $W_2 : x_ix_{i+1}\dots x_{j-1}x_j = x_i$ دو گشت بسته در گراف G هستند. طول W_1 و W_2 را به ترتیب با k_1 و k_2 نشان می‌دهیم. در این صورت $k_1 + k_2 = k$ و چون k عددی فرد است، در نتیجه یکی از اعداد طبیعی k_1 یا k_2 فرد می‌باشند. این یعنی یکی از گشت‌های بسته W_1 و W_2 دارای طولی فرد و از طول گشت W کم‌تر است. که با توجه به فرض استقرا، این گشت و به طبع آن گشت بسته با طول فرد W شامل دوری فرد است. □

گراف G را همبند گوییم، هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد. گرافی که همبند نباشد را ناهمبند می‌نامیم. به زیرگراف‌های همبند با بیش‌ترین اندازه، مؤلفه‌های گراف G گفته می‌شود. بنابراین اگر G دارای دقیقاً یک مؤلفه باشد آن‌گاه گرافی همبند، و در غیر این صورت گرافی ناهمبند است. تعداد مؤلفه‌های G را با $w(G)$ نشان می‌دهیم. در گراف G اگر برای رأسی مانند v، $w(G-v) > w(G)$ باشد v را رأس برشی می‌نامیم. هم‌چنین یال e از گراف G را یال برشی گوییم هرگاه $w(G-e) > w(G)$. زیر مجموعه S از $V(G)$ را برش رأسی گراف G می‌گوییم هرگاه $G - S$ ناهمبند باشد. همبندی رأسی G که آن را با $\kappa(G)$ نشان می‌دهیم، برابر مینیمم تعداد رئوس مجموعه S می‌باشد به طوری‌که $G - S$ گرافی ناهمبند و یا تک رأسی است. گراف G را k - همبند می‌نامیم هرگاه $\kappa(G) \geq k$.

گراف همبند بدون دور را درخت می‌نامیم.

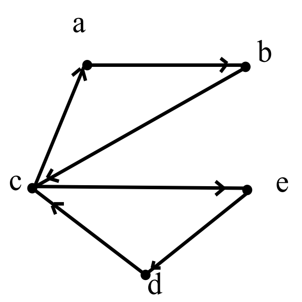
لم ۲.۱.۱. یال e از گراف G، یال برشی G است، اگر و تنها اگر e در هیچ دور G واقع نباشد.

برهان. فرض کنیم e یال برشی G است. چون $\omega(G-e) > \omega(G)$، بنابراین رأس‌های u و v از G موجودند که در G به هم متصل‌اند، اما در $G-e$ به هم متصل نیستند. بنابراین مسیر P بین دو رأس u و v در G وجود دارد که لزوماً e را طی می‌کند.

حال فرض کنیم که x, y دو انتهای e هستند و x قبل از y روی P است. در $G-e$، u به x به وسیله بخشی از P وصل شده و y به v به وسیله بخشی از P متصل می‌شود. اگر e در دور C می‌بود، x و y باید در $G-e$ به وسیله مسیر $C-e$ به هم متصل باشند. بنابراین، u و v در $G-e$ به هم متصل خواهند بود، که این یک تناقض است.

برعکس، فرض کنیم e در هیچ دور G واقع نیست. نشان می‌دهیم e یال برشی گراف G است. فرض کنیم که $e = xy$ یال برشی G نیست؛ بنابراین $\omega(G-e) = \omega(G)$. چون مسیری بین x و y در G وجود دارد، پس x و y در یک مؤلفه G هستند. نتیجه می‌شود که x و y در یک مؤلفه $G-e$ بوده و از این‌رو مسیر P بین x و y در $G-e$ وجود دارد. اما در این صورت e روی دور $P+e$ از G است که یک تناقض است. $\square$

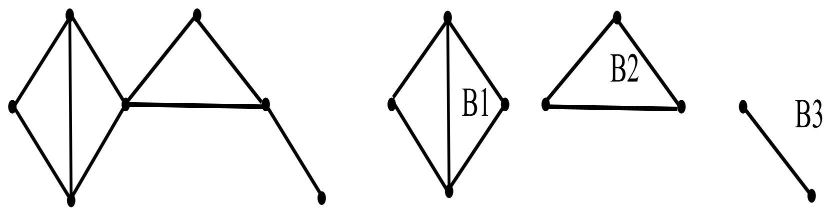
گراف جهت‌دار G را قویاً همبند گوییم، اگر مسیری از هر رأس گراف به رأس‌های دیگر وجود داشته باشد. مثلاً اگر مسیری از a به b باشد مسیری از b به a نیز وجود داشته باشد.



شکل ۱.۱: گراف قویاً همبند

زیرگراف همبند بیشینه G را که رأس برشی نداشته باشد بلوک می‌نامیم. اگر G همبند و رأس برشی نداشته باشد خود یک بلوک است. در شکل ۲۰۱ گراف G و بلوک‌های $B۱$، $B۲$ و $B۳$ نشان داده

شده است. گراف بلوکی، گراف همبندی است که هر یک از بلوک‌های آن گراف کامل هستند. از این رو درخت‌هایی که هر بلوک آن‌ها با $K_۲$ یکریخت می‌باشند، گراف‌های بلوکی هستند.



شکل ۲.۱: گراف G و بلوک‌های آن

گراف G و بلوک‌هایش دارای ویژگی‌های زیر هستند:

۱. هر یال G در یکی از بلوک‌هایش قرار دارد. بنابراین G برابر اجتماع بلوک‌هایش است.

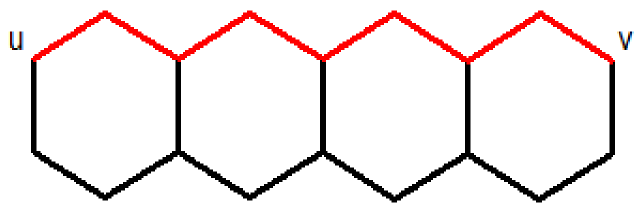
۲. دو بلوک از G حداکثر در یک رأس مشترک بوده و این رأس در گراف G، رأس برشی است.

۳. هر رأس G که رأس برشی نباشد دقیقاً به یکی از بلوک‌های G تعلق دارد.

فرض کنیم G گرافی همبند و u و v دو رأس آن هستند. فاصله دو رأس u و v در گراف G، که آن را با $d_G(u,v)$ نشان می‌دهیم، برابر طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v است. گاهی اوقات برای سادگی، فاصله دو رأس u و v را با $d(u,v)$ نیز نشان می‌دهیم. فاصله رأس u از گراف G برابر مجموع فاصله بین رأس u و تمامی رئوس گراف است که آن را با $d(u)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر:

$$d(u) := \sum_{u\in V(G)} d_G(u,v).$$

مثلاً در گراف شکل ۳.۱، فاصله بین دو رأس u و v برابر با ۸ است، یعنی $d(u,v)=۸$.



شکل ۳.۱: فاصله بین دو رأس u و v

خروج از مرکز رأس دلخواه u از گراف همبند G برابر با بزرگ‌ترین فاصله بین u و تمامی رئوس گراف می‌باشد که آن را با $ecc_G(u)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$ecc_G(u) := Max_{v \in V(G)}\{d_G(u,v)\}.$$

بزرگ‌ترین خروج مرکز روی تمام رئوس گراف G را قطر گراف G و کم‌ترین خروج از مرکز را شعاع گراف G می‌نامیم. قطر گراف G را با $D(G)$ و شعاع آن را با $R(G)$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$D(G) := Max_{u \in V(G)}\{ecc_G(u)\},$$

$$R(G) := Min_{u \in V(G)}\{ecc_G(u)\}.$$

اگر در گراف G خروج از مرکز هر رأس برابر شعاع گراف باشد آن‌گاه G را گراف خود مرکزی گوییم. در این صورت واضح است که $R(G) = D(G)$. به طور مثال گراف K_3 خود مرکز است.

لم ۳.۱.۱. فرض کنیم H زیرگرافی از G است. در این صورت برای هر دو رأس دلخواه u و v از زیرگراف H داریم $d_G(u,v) \leq d_H(u,v)$.

برهان. فرض کنیم u و v رأس‌های دلخواهی از گراف H هستند. در این صورت مسیر بین این دو رأس در H، همان مسیر بین این دو رأس در G نیز می‌باشد. بنابراین طول کوتاه‌ترین مسیر بین این دو رأس در G نمی‌تواند بزرگ‌تر از طول کوتاه‌ترین مسیر بین این دو رأس در H باشد. در نتیجه $d_G(u,v) \leq d_H(u,v)$. □

لم ۴.۱.۱. برای هر سه رأس دلخواه u، v و w از گراف همبند G داریم $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$.

برهان. فرض کنیم u و v و w سه رأس گراف G هستند به طوری که

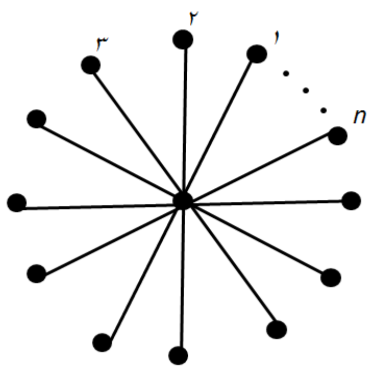
$$d(u,v) > d(u,w) + d(w,v).$$

در این صورت اگر p_1 و p_2 دو کوتاه‌ترین مسیر در گراف G به ترتیب بین دو رأس u و w و دو رأس w و v باشند، آن‌گاه p_1p_2 گشتی بین دو رأس u و v و با طول $d(u,w) + d(w,v)$ است. این یعنی مسیری بین u و v وجود دارد که طول آن کم‌تر از $d(u,v)$ است که با تعریف فاصله بین این دو رأس در تناقض است. بنابراین $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$. □

گراف G را دوبخشی می‌نامیم، هرگاه مجموعه‌ی رأس‌های G را بتوان به دو زیر مجموعه X و Y چنان افراز نمود که هر یال در G، دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد. اگر هر رأس X با همه رئوس Y مجاور باشد آن‌گاه G را گراف دوبخشی کامل نامیده و آن‌را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم، که در آن $|X| = n$ و $|Y| = m$. مفهوم گراف دوبخشی کامل را می‌توان به گراف‌های k - بخشی کامل نیز تعمیم داد. برای $k > ۲$ گراف G را k - بخشی کامل گوییم، هرگاه $V(G)$ را بتوان به k زیر مجموعه مجزا افراز کنیم به‌طوری‌که هر رأس از یک مجموعه با تمامی رأس‌های سایر مجموعه‌ها مجاور باشند.

گراف G، k - منتظم است اگر برای هر $v \in V$، $deg(v) = k$. در نتیجه گراف منتظم، گرافی است که به ازای kیی، k - منتظم باشد.

به هر گراف n رأسی G، به قسمی که دارای یک رأس از درجه‌ی $n - ۱$ و $n - ۱$ رأس دیگر از درجه یک باشند، گراف ستاره می‌گوییم.



شکل ۴.۱: گراف ستاره با $n + ۱$ رأس

لم ۵.۱.۱. فرض کنیم گراف G دوبخشی با بخش‌های X و Y است. در این صورت:

$$\sum_{x\in X} deg_G(x) = \sum_{y\in Y} deg_G(y) = |E(G)|. \qquad (۱.۱)$$

برهان. درجه هر رأس $x \in X$ برابر مجموع یال‌هائی از گراف G است که رأس x روی آن‌ها قرار دارد. از طرفی هر یال $e = x'y' \in |E(G)|$ یک و فقط یک رأس انتهائی آن در مجموعه X است. بنابراین $\sum_{x\in X} deg_G(x) = |E(G)|$ و با همین استدلال $\sum_{y\in Y} deg_G(y) = |E(G)|$. □

لم ۶.۱.۱. گراف G دوبخشی است، اگر و تنها اگر شامل دور فرد نباشد.

برهان. فرض می‌کنیم G گرافی دوبخشی با بخش‌های X و Y است. اگر $C: v_0v_1\ldots v_nv_0$ دوری با طول فرد از گراف G باشد، آن‌گاه n عددی زوج است. بدون کاستن از کلیت مسأله، فرض کنیم $v_0 \in X$. چون $v_0v_1 \in E$ و گراف G دوبخشی است، در نتیجه $v_1 \in Y$. به طور مشابه $v_2 \in X$ و در حالت کلی، $v_{2i} \in X$ و $v_{2i+1} \in Y$. بنابراین $v_n \in Y$. از طرفی داریم $v_0 \in X$ و $v_0v_n \in E$، که این با دوبخشی بودن گراف G در تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که گراف G فاقد هر گونه دور فرد است.

حال اگر نشان دهیم مؤلفه‌های همبندی گراف G دوبخشی هستند آن‌گاه خود G نیز دوبخشی خواهد بود. زیرا اگر هر یک از مؤلفه‌های G_1، ...، G_r از گراف G دوبخشی باشند، آن‌گاه برای هر $1 \leq i \leq r$، بخش‌های مؤلفه G_i را به صورت X_i و Y_i در نظر می‌گیریم. در این صورت $X' = \cup_{i=1}^{r} X_i$ و $Y' = \cup_{i=1}^{r} Y_i$ دو مجموعه مستقل از رئوس $V(G)$ هستند. بنابراین کافی است حکم را برای گراف‌های همبند ثابت کنیم. فرض کنیم G گرافی همبند و v رأس دلخواهی از آن است، در این صورت دو مجموعه X و Y با تعاریف:

$$X = \{u \in V; 2 \mid d(u,v)\},$$

$$Y = \{u \in V; 2 \nmid d(u,v)\}.$$

افرازی از مجموعه رئوس V است. کافی است نشان دهیم این دو مجموعه مستقل‌اند.

فرض کنیم X مستقل نیست. در این صورت دو رأس مجاور مانند u_1 و u_2 در X وجود دارند. حال اگر $p_1: u_1 = a_1a_2\ldots a_r = v$ و $p_2: u_2 = a'_1a'_2\ldots a'_s = v$ دو کوتاه‌ترین راه به ترتیب بین دو رأس u_1 و v و دو رأس u_2 و v در گراف G باشند، آن‌گاه با توجه به انتخاب u_1 و u_2، طول این دو راه زوج است. بنابراین گشت W به صورت زیر

$$W: u_1 = a_1a_2\ldots a_{r-1}a_r(=v=)a'_sa'_{s-1}\ldots a'_2a'_1 = u_2$$

گشت بسته‌ای در گراف G و با طول فرد است. در نتیجه بنابر لم ۱۰۱۰۱ گراف G دارای دور فرد است و این با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه X مستقل است. با استدلالی مشابه ثابت می‌شود Y نیز مستقل است. بنابراین گراف G دوبخشی است. □

لم ۷.۱.۱. گراف G دوبخشی است، اگر و تنها اگر برای هر دو رأس دلخواه از گراف، طول هر گشت بین این دو رأس یا همواره زوج یا همواره فرد باشد.

برهان. فرض کنیم گراف G دوبخشی بوده و دو رأس u و v از گراف G دارای دو گشت به صورت $W_۱ : u = x_۱x_۲ \dots x_r = v$ و $W_۲ : u = y_۱y_۲ \dots y_s = v$ هستند، به طوری که یکی دارای طول فرد و دیگری دارای طول زوج است. در این صورت $W_۳ : u = x_۱x_۲ \dots x_r(= v =)y_sy_{s-۱} \dots y_۱ = u$ گشت بسته‌ای در گراف G می‌باشد که طول آن فرد است. حال طبق لم ۱۰۱۰۱ گراف G شامل دور فرد بوده و این تناقض است.

حال فرض کنیم G گرافی غیر دوبخشی است، در این صورت G شامل دور فردی چون C می‌باشد. برای هر رأس دلخواه u و v از گراف G یک مسیر بین این دو رأس را P در نظر می‌گیریم. حال گشت W بین دو رأس u و v از گراف G را به صورت زیر می‌سازیم:

ابتدا از رأس u حرکت و مسیر بین این رأس تا یکی از رئوس دور C که آن را Q می‌نامیم، پیموده و پس از پیمایش دور C، از مسیر $Q^{-۱}$ به رأس u باز می‌گردیم و در پایان از مسیر P به رأس v می‌رویم، واضح است که طول دو گشت بین رئوس u و v (یعنی P و W)، یکی زوج و دیگری فرد است. □

گراف‌های دوبخشی اهمیت ویژه‌ی در نظریه گراف دارند. اولین و مهم‌ترین گراف‌های دوبخشی، درخت‌ها هستند. همان‌طور که گفته شد درخت گرافی همبند است که شامل هیچ دوری نیست. گرافی که هر مؤلفه آن درخت باشد را جنگل می‌نامند. در این‌جا با توجه به اهمیت درخت‌ها، به ارائه و اثبات چند لم و قضیه‌ی زیر می‌پردازیم.

لم ۸.۱.۱. بین هر دو رأس متمایز یک درخت، مسیری یکتا وجود دارد.

برهان. فرض کنیم T یک درخت و بین دو رأس آن مانند u و v دو مسیر متفاوت P و Q وجود داشته باشد. چون $P \neq Q$، بنابراین یالی چون $e = xy$ متعلق به P موجود است به‌طوری‌که e یالی از Q نیست. واضح است که $(P \cup Q) - e$ زیرگرافی همبند از درخت T بوده و در نتیجه بین رئوس x و y مسیری چون P' در این زیرگراف وجود دارد. این یعنی $P' + e$ دوری در درخت T بوده که تناقض است. □

لم ۹.۱.۱. برای هر درخت T داریم $|E(T)| = |V(T)| - ۱$.

برهان. قضیه را با استفاده از استقرا روی $n = |V(T)|$ ثابت می‌کنیم. برقراری حکم برای $n = ۱$ واضح است. فرض کنیم نتیجه برای درخت‌های با کم‌تر از k رأس برقرار است. T را درختی با مرتبه $n = k$

و اندازه m در نظر می‌گیریم. دراین‌صورت هر $e \in E(T)$ یک یال برشی است، بنابراین $T - e$ یک جنگل با دو مؤلفه است. مؤلفه‌های $T - e$ را که با $T_۱$ و $T_۲$ نشان می‌دهیم هر کدام کم‌تر از k رأس دارند دراین‌صورت بنا به فرض استقرا $|E(T_۱)| = |V(T_۱)| - ۱$ و $|E(T_۲)| = |V(T_۲)| - ۱$. بنابراین

$$|E(T)| = |E(T_۱)| + |E(T_۲)| + ۱ = |V(T_۱)| + |V(T_۲)| - ۱ = |V(T)| - ۱. \qquad \square$$

قضیه ۱۰.۱.۱. هر درخت نابدیهی لاقل دو رأس از درجه‌ی یک دارد.

برهان. فرض کنیم G درختی نابدیهی است، در این صورت

$$deg(v) \geq ۱ \qquad \text{به ازای هر } v \in V$$

هم‌چنین، بنابر لم ۱۰۱۰۹، داریم

$$\sum_{v\in V} deg(v) = ۲m = ۲n - ۲;$$

حال نتیجه می‌شود برای حداقل دو رأس v، $deg(v) = ۱$. $\square$

قضیه ۱۱.۱.۱. گراف همبند G درخت است، اگر وتنها اگر هر یال آن، یال برشی باشد.

برهان. فرض کنیم G درخت و e یالی از G است. چون G بدون دور است، e در هیچ دور G قرار ندارد و در نتیجه بنابر قضیه ۱۰۱۰۲، یال برشی G است.

بر عکس، فرض کنیم که G همبند است اما درخت نباشد. در این صورت G شامل دور C است. بنابراین بنابر قضیه ۱۰۱۰۲، هیچ یال C نمی‌تواند یال برشی G باشد. $\square$

گراف G، با n رأس را قویاً منتظم گوییم اگر شرایط زیر برقرار باشد.

۱) عدد صحیح مانند k، موجود باشد، به طوری که گراف k-منتظم باشد.

۲) یک عدد صحیح λ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر جفت از رئوس (x, y) که در گراف G مجاور هستند، λ رأس z موجود باشد که با هر دو رأس x و y مجاور باشند.

۳) یک عدد صحیح μ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر جفت از رئوس (x, y) که در G مجاور نیستند، μ رأس z موجود باشد که با هر دو رأس x و y مجاور باشند.