بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه مازندران
دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره دکتری در رشته ریاضی محض گرایش ابرساختارهای جبری

موضوع:

مباحثی در ابرفضاهای برداری و ساختارهای فازی آنها

استاد راهنما:

استاد دکتر رضا عامری

اساتید مشاور:

دکتر یحیی طالبی رستمی

استاد دکتر بیژن دواز

اساتید داور:

استاد دکتر محمد مهدی زاهدی

استاد دکتر رجبعلی برزویی

استاد دکتر قاسم علیزاده افروزی

دکتر علی تقوی

نام دانشجو:

امید رضا دهقان

آذرماه ۱۳۸۸

سپاسگزاری

خداوند بی همتا را شاکرم که به من توان بخشید تا برگ دیگری از دفتر زندگی خود را در سایه الطافش به پایان رسانده و در این مرحله از زندگی نیز در راه کسب کمال، در محضر اساتید گرانقدری باشم که همچون چراغی فروزان، روشنگر مسیر پر پیچ و خم علم و دانش بودند.

سپاس فراوان از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای استاد دکتر رضا عامری که با دقت نظر و ارائه رهنمودهای ارزشمند، نقش برجسته ای در راه به ثمر رسیدن این تحقیق ایفا کردند و به شاگردی در محضرشان افتخار می نمایم.

از راهنمایی و حمایت های بیدریغ استاد مشاور گرامی ام جناب آقای دکتر یحیی طالبی رستمی، که در تمام مراحل انجام پایان نامه از ابتدا تا تکمیل نهایی همواره پاسخگوی سوالات و یاریگرم بودند، نهایت تشکر و امتنان را دارم.

از جناب آقای استاد دکتر بیژن دواز که به عنوان استاد مشاور با نظرات عالمانه خویش مرا در ارتقاء سطح پایان نامه یاری کردند، تشکر می کنم.

همچنین لازم می دانم از زحمات داوران محترم جناب آقای استاد دکتر محمد مهدی زاهدی و جناب آقای استاد رجبعلی برزویی (داوران خارجی) و جناب آقای استاد دکتر قاسم علیزاده افروزی و جناب آقای دکتر علی تقوی (داوران داخلی)، که با وجود مشغله فراوان زحمت مطالعه این پایان نامه را تقبل نمودند، صمیمانه قدردانی نمایم.

از اساتید محترم گروه ریاضی که بر دانش و تجربیاتم افزودند سپاسگذاری می کنم.

در پایان از خانواده عزیزم به خاطر همه خوبیها و محبت های بی دریغشان تشکر ویژه می کنم.

خدایا چنان کن سرانجام کار   تو خوشنود باشی و ما رستگار

امید رضا دهقان

آذر ۱۳۸۸

تقدیم به:

- روح پاک پدر و مادرم،
- همسر مهربانم،
- و فرزند دلبندم آرمین.

چکیـده

هدف این رساله مطالعه ابرفضاهای برداری و ساختارهای فازی آنها است. در این راستا ابتدا به معرفی و بررسی ابرفضاهای برداری و بعد آنها پرداخته و خواص اساسی آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم. در ادامه ابرفضاهای برداری فازی، ابرفضاهای برداری فازی تولید شده توسط یک زیرمجموعه فازی، هم مجموعه های فازی از یک زیرابرفضای فازی و ابرفضاهای برداری فازی خارج قسمتی را معرفی و نتایج اساسی در مورد آنها به دست می آوریم. در خاتمه مفاهیمی مانند استقلال خطی فازی، پایه فازی و بعد ابرفضاهای برداری فازی، یکریختی بین ابرفضاهای برداری فازی و آزادی فازی بر اساس نقاط فازی را بررسی می کنیم.

کلمات کلیدی: ابرفضای برداری، رابطه اساسی، تبدیل خطی، استقلال خطی، پایه، بعد، ابرفضای برداری فازی، تولید شده فازی، استقلال خطی فازی، پایه فازی، هم مجموعه فازی، ابرفضای خارج قسمت فازی، نقطه فازی، آزادی فازی.

فهرست مندرجات

لیست علائم و اختصارات

متعلق است به	$\in$
زیرمجموعه	$\subseteq$
زیرمجموعه سره	$\subset$
شامل	$\supseteq$
به طور سره شامل	$\supset$
مجموعه تفاضل	$A\backslash B$
مجموعه اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
مجموعه اعداد گویا	$\mathbb{Q}$
مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
مجموعه اعداد مختلط	$\mathbb{C}$
گردایه زیرمجموعه های ناتهی H	$P_*(H)$
اجتماع مجموعه ها	$\cup$
اشتراک مجموعه ها	$\cap$
$x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n$	$\sum_{i=۱}^{n} x_i$
مجموع تمام عناصر H	$\sum_{a\in H} a$
T نگاشتی است از مجموعه A به توی مجموعه B	$T : A \longrightarrow B$
تصویر x تحت T	$T(x)$
ترکیب نگاشت های T و S	ToS
معکوس نگاشت T	$T^{-۱}$
تعداد عناصر مجموعه X	$\|X\|$
گروه خارج قسمت	V/W
فضای خطی S	$\langle S\rangle$
هسته T	$\ker T$
یکریختی	$\cong$
یکریختی ضعیف	$\cong_w$

یکریختی خوب	$\cong_g$
مجموعه تمام تبدیلات خطی از V به W روی میدان K	$Hom_K(V,W)$
مجموعه تمام تبدیلات خطی ضعیف از V به W روی میدان K	$Hom_K^w(V,W)$
مجموعه تمام تبدیلات خطی خوب از V به W روی میدان K	$Hom_K^g(V,W)$
ابرعمل	$\circ, \star, \bullet$
مجموعه تهی	$\emptyset$
رابطه هم ارزی اساسی روی ابرگروه	β^*
گروه اساسی	H/β^*
رابطه هم ارزی اساسی روی ابرحلقه	γ^*
حلقه اساسی	R/γ^*
رابطه هم ارزی اساسی روی ابرفضای برداری	ε^*
فضای برداری اساسی	V/ε^*
اینفیمم	$\wedge$
سوپریمم	$\vee$
$\alpha-$ برش، زیرمجموعه تراز	μ_α
تصویر μ	$Im(\mu)$
تصویر μ	$\mu(X)$
نقطه فازی	x_α
تابع مشخصه مجموعه A	χ_A
نقطه فازی	x_α
مجموعه تمام زیرمجموعه های فازی X	$FS(X)$
$\underline{\mu}(A) = \bigwedge_{a\in A} \mu(a)$	$\underline{\mu}(A)$
$\bar{\mu}(A) = \bigvee_{a\in A} \mu(a)$	$\bar{\mu}(A)$
نرم	$\|\ \|$
شبه نرم اساسی	$\|\ \|^*$
میدان فازی از K	ν_K
ابرفضای برداری فازی از V	$\tilde{V} = (V,\mu) = \mu_V$

زیرابرفضای برداری .... $\leqslant$

بعد .... $\dim$

حلقه چند جمله ایها با درجه کمتر از n در x .... $K[x]$

رسته فضاهای برداری روی میدان K .... $\mathcal{V}_K$

رسته ابرفضاهای برداری روی میدان K .... $\mathcal{HV}_K$

هم مجموعه فازی تعیین شده توسط x و μ .... μ_x^*

مجموعه تمام هم مجموعه های فازی μ .... $V_\mu = \{\mu_x^* : x \in V\}$

مقدمه و تاریخچه

نظریه ابرساختارهای جبری اولین بار در سال ۱۹۳۴ با تعریف ابرگروه توسط مارتی [۱] در هشتمین کنگره ریاضیدانان کشور های اسکاندیناوی معرفی شد [۲۵]. بنابراین می توانیم سال ۱۹۳۴ را سال پیدایش ابرساختارهای جبری بدانیم. از آن پس محققین بسیاری با مطالعه روی این نظریه موجبات بسط و گسترش آن را فراهم آوردند. کراسنر [۲]، کونتزمن [۳] و کرویست [۴] در فرانسه، درشر [۵]، اُره [۶]، ایتون [۷] و وال [۸] در ایالات متحده و اُتامی [۹] در ژاپن از جمله این افراد بودند. در دهه پنجاه بوکیونی [۱۰] در ایتالیا شرایط شرکت پذیری در ابرگروه ها را مورد مطالعه قرار داد و در دهه شصت، ناکانو [۱۱] در ژاپن چند مدول ها را معرفی کرد. میتاس [۱۲] در یونان نظریه ابرگروه های کانونی را بنا نهاد. جان توشیاک [۱۳] فضاهای الحاقی را بررسی و در هندسه به کار برد. بعد ها در ایتالیا کرسینی [۱۴] در گسترش و تعمیم این نظریه فعالیت کرد که البته همچنان فعال است. (مراجع [۱۳] و [۱۴] را ببینید). در یونان ماساروس [۱۵] روی ابرحلقه ها، ابرمیدان ها و ابرمدول ها مطالعات زیادی به عمل آورد.

خوشبختانه نظریه ابرساختارهای جبری در ایران توسط محققین بسیاری مورد مطالعه و گسترش قرار گرفته است. نظریه ابرساختارهای جبری و ساختارهای فازی آنها نخستین بار توسط زاهدی و شاگردانش در ایران مورد توجه قرار گرفت و سپس محققین زیادی در دانشگاه های مختلف به این

[۱] Marty
[۲] Krasner
[۳] Kuntzman
[۴] Croisot
[۵] Dresher
[۶] Ore
[۷] Eaton
[۸] Wall
[۹] Otumi
[۱۰] Boccioni
[۱۱] Nakano
[۱۲] Mittas
[۱۳] Jantosciak
[۱۴] Corsini
[۱۵] Massouros

نظریه علاقمند شدند و فعالیت های آموزشی و پژوهشی قابل توجهی در این زمینه انجام داده اند. از جمله می توان به عامری، دواز، ابراهیمی، درفشه، برزویی، ایرانمنش، حسن خانی و دیگران و دانشجویان آن ها اشاره کرد، به طوری که حاصل این فعالیت ها چاپ مقالات متعدد در مجلات علمی معتبر و تربیت دانشجویان بسیاری در زمینه ابرساختارهای جبری و کاربردهای آن در مقاطع تحصیلات تکمیلی بوده است.

یکی از مباحثی که در نظریه ابرساختارهای جبری مورد مطالعه قرار گرفته است، ابرفضاهای برداری می باشد. ابرفضاهای برداری از دیدگاه های مختلف مورد بررسی قرار گرفته اند، از جمله ووجیوکلیس[۱۶]، کراسنر[۱۷] و تالینی[۱۸]. بیشترین مطالعه روی ابرفضاهای برداری توسط تالینی انجام گرفته است. تالینی در سال ۱۹۹۰، در چهارمین کنفرانس بین المللی ابرساختارهای جبری و کاربردهای آن، مفهوم ابرفضای برداری را تعریف کرد و طی چندین مقاله ([۳۱]، [۳۲] و [۳۳]) ویژگیهای اولیه آن را مورد بررسی قرار داد (برای اطلاعات بیشتر به [۱] مراجعه شود). حال در این رساله ما ابتدا به مطالعه ابرفضاهای برداری و خواص بیشتر آن ها می پردازیم. خصوصا مفاهیم استقلال خطی، پایه و بعد در این فضاها را در فصل دوم مورد بررسی قرار می دهیم.

بخشی از مطالعات اخیر به ارتباط بین نظریه ابرساختار های جبری و مجموعه های فازی اختصاص یافته است. نظریه مجموعه های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط لطفی عسگرزاده[۱۹] دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی آمریکا معرفی شد. سپس در تمامی رشته های علوم و مهندسی توسعه یافت. رزنفلد[۲۰] در سال ۱۹۷۱ با مقاله ای تحت عنوان گروه های فازی، راه ورود مجموعه های فازی به جبر را هموار کرد. پس از آن مجموعه های فازی در شاخه های مختلف جبر گسترش

---

[۱۶] Vougiouklis
[۱۷] Krasner
[۱۸] [۳۱] Maria Scafati Tallini
[۱۹] [۳۶] L. A. Zadeh
[۲۰] [۳۰] Rosenfeld

پیدا کرد. میدان های فازی توسط ناندا[۲۱] و فضاهای برداری فازی توسط کاتساراس و لیو[۲۲]، مالک و مردسون[۲۳]، کومار[۲۴] و لوبزونوک[۲۵] مورد مطالعه قرار گرفتند.

در سال های اخیر نظریه ابرساختارهای جبری و نظریه مجموعه های فازی گسترش مناسبی در یکدیگر داشته اند. گواه این مطلب چاپ مقالات متعدد در کاربرد نظریه مجموعه های فازی در ابرساختارها و بالعکس می باشد. (برای نمونه مراجعه کنید به منابع [۲]−[۱۱] و [۱۵]−[۱۸]).

فصل های سوم و چهارم این رساله، به طور مفصل به مطالعه ابرفضاهای برداری فازی می پردازد. در فصل سوم پس از بررسی خواص اجتماع، اشتراک و مجموع ابرفضاهای برداری فازی، ساختار یک ابرفضای برداری فازی تولید شده توسط یک زیرمجموعه فازی بیان شده و هم مجموعه های فازی بررسی می شوند. سپس رابطه ای بین بعد ابرفضای برداری هم مجموعه های یک مجموعه فازی از V و یک ابرفضای برداری خارج قسمتی روی V بدست می آوریم. در ادامه ابرفضاهای برداری فازی را براساس نقاط فازی مطالعه می کنیم. برای این منظور با استفاده از مفهوم نقاط فازی، ساختار یک ابرفضای برداری فازی تولید شده توسط یک زیرمجموعه فازی را مشخص می کنیم. به ویژه، آزادی فازی یک زیرمجموعه فازی را معرفی کرده و آن را بر حسب استقلال خطی در ابرفضاهای برداری بیان می کنیم.

در فصل چهارم پایه فازی و بعد در ابرفضاهای برداری فازی را مورد مطالعه قرار می دهیم. برای این منظور ابتدا مفاهیم استقلال خطی فازی و پایه فازی را معرفی کرده و برخی ویژگیهای آنها را بدست می آوریم. به ویژه نشان می دهیم رده بزرگی از ابرفضاهای برداری فازی دارای پایه فازی می باشند. سرانجام خواص بعد یک ابرفضای برداری فازی را بررسی کرده، ثابت می کنیم دو ابرفضای برداری فازی یکریخت دارای بعد یکسانند.

---

[۲۱] Nanda [۲۹]
[۲۲] Katsaras and Liu [۲۰]
[۲۳] Malik and Mordeson [۲۷]
[۲۴] Kumar ([۲۱] و [۲۲])
[۲۵] Lubczonok [۲۳]

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در فصل های دیگر را بیان می کنیم. این مطالب عمدتا از منابع [۱]، [۱۴]، [۳۱] و [۳۲] گرفته شده اند.

۱.۱ ابرساختارهای جبری

تعمیم های مختلفی برای ابرفضاهای برداری توسط ووجیوکلیس[۱]، کراسنر [۲] و تالینی [۳] تعریف شده اند که در این بخش به بیان آنها می پردازیم. یادآوری می کنیم که ابرفضاهای برداری از دیدگاه تالینی در این رساله مطالعه شده اند.

تعریف ۱.۱.۱ ([۱۴]) نگاشت $\circ : H \times H \longrightarrow P_*(H)$ را یک ابرعمل یا عمل الحاق می نامیم، که در آن $P_*(H)$ گردایه تمام زیرمجموعه های ناتهی از H است. ابرعمل روی زیرمجموعه های ناتهی A و B از H به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \circ B = \bigcup\{a \circ b : a \in A,\ b \in B\}.$$

[۱] Vougiouklis [۳۵]

[۲] Krasner

[۳] Maria Scafati Tallini [۳۱]

نمادهای $A \circ a$ ،$a \circ A$ و a به ترتیب برای نمایش دادن $A \circ \{a\}$ ،$\{a\} \circ A$ و $\{a\}$ استفاده می شوند. ابرعمل "$\circ$" را

- شرکت پذیر ضعیف نامیم اگر برای هر $x, y, z \in H$، $(x \circ y) \circ z \cap x \circ (y \circ z) \neq \emptyset$؛
- شرکت پذیر نامیم اگر برای هر $x, y, z \in H$، $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$؛
- تعویض پذیر ضعیف نامیم اگر برای هر $x, y \in H$، $x \circ y \cap y \circ x \neq \emptyset$؛
- تعویض پذیر نامیم اگر برای هر $x, y \in H$، $x \circ y = y \circ x$؛

مجموعه H همراه با خانواده ای از ابرعمل ها یک ابرساختار نامیده می شود.

تعریف ۲.۱.۱ ([۱۴]) ابرساختار $(H, \circ)$ را

- H_V–نیم گروه نامیم هرگاه "$\circ$" شرکت پذیر ضعیف باشد؛
- نیم ابرگروه نامیم هرگاه "$\circ$" شرکت پذیر باشد؛
- شبه ابرگروه نامیم هرگاه "$\circ$" در اصل تکثیر صدق کند:

اصل تکثیر: $\forall x \in H,\, x \circ H = H \circ x = H$

- H_V–گروه نامیم هرگاه H_V–نیم گروه و شبه ابرگروه باشد؛
- ابرگروه نامیم هرگاه نیم ابرگروه و شبه ابرگروه باشد.

تعریف ۳.۱.۱ ([۱۴]) فرض کنید $(H, \circ)$ یک H_V–گروه باشد. در این صورت رابطه β^* کوچکترین رابطه هم ارزی روی H است به طوری که خارج قسمت H/β^* یک گروه باشد. β^* رابطه هم ارزی اساسی و H/β^* گروه اساسی نامیده می شود. رابطه β^* عمدتا توسط کرسینی [۴] و ووجیوکلیس مطالعه شده است.

[۴] Corsini [۱۳]

تبصره ۴.۱.۱ H/β^* یک گروه است، لذا می توان گفت $(H,\circ)$ با واسطه[۵] یک گروه است و این دلیل اطلاق نام H_V–گروه به ابرساختار $(H,\circ)$ است.

تعریف ۵.۱.۱ ([۱۴]) ابرساختار $(R,+,\circ)$ را یک H_V–حلقه می نامیم اگر $(R,+)$ یک H_V–گروه، $(R,\circ)$ یک H_V–نیم گروه و "$\circ$" نسبت به "$+$" توزیع پذیر ضعیف باشد. به عبارت دیگر برای هر $x,y,z \in R$ شرایط زیر برقرار باشد:

(R_1) $(x+y)+z \cap x+(y+z) \neq \emptyset$،

(R_2) $x+H = H+x = H$،

(R_3) $(x\circ y)\circ z \cap x\circ(y\circ z) \neq \emptyset$،

(R_4) $(x+y)\circ z \cap (x\circ z)+(y\circ z) \neq \emptyset$، قانون توزیع پذیری چپ ضعیف،

(R_5) $x\circ(y+z) \cap (x\circ y)+(x\circ z) \neq \emptyset$، قانون توزیع پذیری راست ضعیف.

H_V–حلقه می تواند نسبت به "$+$" یا "$\circ$" یا هر دو تعویض پذیر ضعیف یا تعویض پذیر باشد. اگر فقط "$+$" ابرعمل باشد، آن گاه R را یک H_V–حلقه جمعی و اگر فقط "$\circ$" ابرعمل باشد، آن گاه R را یک H_V–حلقه ضربی می نامیم.

تعریف ٦.۱.۱ ([۱۴]) فرض کنید $(R,+,\circ)$ یک H_V–حلقه باشد. در این صورت رابطه γ^* کوچکترین رابطه هم ارزی روی R است به طوری که خارج قسمت R/γ^* یک حلقه باشد. γ^* رابطه هم ارزی اساسی و R/γ^* حلقه اساسی نامیده می شود. H_V–حلقه $(R,+,\circ)$ یک H_V–میدان نامیده می شود هرگاه حلقه اساسی آن یک میدان باشد.

[۵] by virtue

تعریف ۷.۱.۱ (ابرفضای برداری از دیدگاه ووجیوکلیس) ([۱۴]) چهارتایی $(V,+,\circ,K)$ را یک H_V- فضای برداری روی H_V- میدان K می نامیم اگر $(V,+)$ یک H_V-گروه تعویض پذیر ضعیف و

$$\begin{cases} \circ : K\times V \longrightarrow P_*(V) \\ \quad (a,x)\longmapsto a\circ x, \end{cases}$$

یک نگاشت باشد به طوری که برای هر $a\in K$ و $x,y\in V$ شرایط زیر برقرار باشد:

$(\mathrm{H}_{V۱})$ $a\circ(x+y)\cap[a\circ x+a\circ y]\neq\emptyset$، قانون توزیع پذیری راست ضعیف،

$(\mathrm{H}_{V۲})$ $(a+b)\circ x\cap[a\circ x+b\circ x]\neq\emptyset$، قانون توزیع پذیری چپ ضعیف،

$(\mathrm{H}_{V۳})$ $a\circ(b\circ x)\cap(ab)\circ x\neq\emptyset$، قانون شرکت پذیری ضعیف.

تعریف ۸.۱.۱ ([۱۴]) فرض کنید $(V,+,\circ,K)$ یک H_V- فضای برداری روی H_V- میدان K باشد. در این صورت رابطه ε^* کوچکترین رابطه هم ارزی روی V است به طوری که خارج قسمت V/ε^* یک فضای برداری روی میدان R/γ^* باشد. ε^* رابطه هم ارزی اساسی و V/ε^* فضای برداری اساسی نامیده می شود.

در ادامه تعریف ابرفضای برداری از دیدگاه کراسنر بیان شده است.

تعریف ۹.۱.۱ ([۱۴]) فرض کنید $(H,\circ)$ یک ابرگروه باشد. در این صورت $e\in H$،

- همانی یا یکه نامیده می شود اگر $x\in x\circ e\cap e\circ x$، برای هر $x\in H$.

- همانی اسکالر نامیده می شود اگر برای هر $x,y,z\in H$،

$$\begin{cases} x\circ e=e\circ x=x \\ x\circ y\cap x\circ z\neq\emptyset \Longrightarrow e\circ y=e\circ z, \\ x\circ z\cap y\circ z\neq\emptyset \Longrightarrow x\circ e=y\circ e. \end{cases}$$

تعریف ۱۰.۱.۱ ([۱۴]) فرض کنید $(H,\circ)$ یک ابرگروه دارای حداقل یک عنصر همانی e باشد. در این صورت $\acute{x} \in H$ معکوس $x \in H$ نامیده می شود هرگاه $e \in x \circ \acute{x} \cap \acute{x} \circ x$.

تعریف ۱۱.۱.۱ ([۱۴]) ابرگروه $(H,\circ)$ منظم نامیده می شود اگر دارای حداقل یک عنصر همانی بوده و هر عنصرش حداقل یک معکوس داشته باشد. ابرگروه منظم $(H,\circ)$ برگشت پذیر نامیده می شود اگر برای هر $x,y,z \in H$ شرایط زیر برقرار باشد:

- اگر $x \in y \circ z$، آن گاه یک معکوس $\acute{y}$ از y موجود باشد به طوری که $z \in \acute{y} \circ x$؛
- اگر $x \in y \circ z$، آن گاه یک معکوس $\acute{z}$ از z موجود باشد به طوری که $y \in x \circ \acute{z}$.

تعریف ۱۲.۱.۱ ([۱۴]) ابرگروه $(H,\circ)$ کانونی نامیده می شود هرگاه تعویض پذیر، برگشت پذیر، دارای یک همانی اسکالر و هر عنصرش دارای معکوس منحصر بفرد باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ ([۱۴]) ابرساختار $(R,+,\cdot,\circ)$ را یک ابرحلقه (کراسنر) می نامیم اگر $(R,+)$ یک ابرگروه کانونی، $(R,\cdot)$ یک نیم گروه با عنصر جاذب ۰ و "$\cdot$" نسبت به "$+$" توزیع پذیر باشد. اگر $(R-\{\circ\},\cdot)$ گروه باشد، آن گاه $(R,+,\cdot,\circ)$ یک ابرمیدان (کراسنر) نامیده می شود.

تعریف ۱۴.۱.۱ **(ابرفضای برداری از دیدگاه کراسنر)** ([۱۴]) فرض کنید K یک ابرمیدان کراسنر و $(V,+)$ یک ابرگروه کانونی باشد. در این صورت چهارتایی $(V,+,\cdot,K)$ را یک $K-$ابرفضای برداری می نامیم هرگاه $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ یک عمل تک مقداری اسکالر باشد به طوری که برای هر $a,b \in K$ و $x,y \in V$ شرایط زیر برقرار باشد:

$(\mathrm{H}_{K۱})$ $a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y$،

$(\mathrm{H}_{K۲})$ $(a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x$،

$(\mathrm{H}_{K۳})$ $a\cdot(b\cdot x) = (ab)\cdot x$،

$(\mathrm{H}_{K۴})$ $\circ\cdot x = \circ$،

$(\mathrm{H}_{K۵})$ $۱\cdot x = x$.

تعریف ابرفضای برداری از دیدگاه تالینی که مبنای این رساله می باشد، به صورت زیر است:

تعریف ۱۵.۱.۱ (ابرفضای برداری از دیدگاه تالینی) ([۳۱]) فرض کنید K یک میدان و $(V,+)$ یک گروه آبلی باشد. در این صورت چهارتایی $(V,+,\circ,K)$ یک ابرفضای برداری روی K نامیده می شود هر گاه نگاشت $\circ : K \times V \longrightarrow P_*(V)$ برای هر $a,b \in K$ و $x,y \in V$ در شرایط زیر صدق کند:

$(\mathrm{H}_۱)$ $a \circ (x+y) \subseteq a \circ x + a \circ y$، قانون توزیع پذیری راست،

$(\mathrm{H}_۲)$ $(a+b) \circ x \subseteq a \circ x + b \circ x$، قانون توزیع پذیری چپ،

$(\mathrm{H}_۳)$ $a \circ (b \circ x) = (ab) \circ x$، قانون شرکت پذیری،

$(\mathrm{H}_۴)$ $a \circ (-x) = (-a) \circ x = -(a \circ x)$،

$(\mathrm{H}_۵)$ $x \in ۱ \circ x$.

نگاشت $\circ : K \times V \longrightarrow P_*(V)$ را ابرعمل خارجی می نامیم.

در ادامه منظور از ابرفضای برداری، یک ابرفضای برداری از دیدگاه تالینی است.

تبصره ۱۶.۱.۱ (i) ابرفضای برداری $(V,+,\circ,K)$ را توزیع پذیر ضعیف می نامیم هرگاه شرایط $(\mathrm{H}_۱)$ و $(\mathrm{H}_۲)$ به ترتیب با $(\mathrm{H}_{w۱})$ و $(\mathrm{H}_{w۲})$ جایگزین شوند:

$(\mathrm{H}_{w۱})$ $a \circ (x+y) \cap a \circ x + a \circ y \neq \emptyset$،

$(\mathrm{H}_{w۲})$ $(a+b) \circ x \cap a \circ x + b \circ x \neq \emptyset$،

و پاد توزیع پذیر چپ می نامیم هرگاه

$$\forall a,b \in K,\ \forall x,y \in V,\ \ (a+b) \circ x \supseteq a \circ x + b \circ x,$$

و توزیع پذیر چپ قوی می نامیم هرگاه

$$\forall a,b \in K,\ \forall x,y \in V,\ \ (a+b) \circ x = a \circ x + b \circ x.$$

ابرفضای برداری پاد توزیع پذیر راست و توزیع پذیر راست قوی بطور مشابه تعریف می شوند. ابرفضای برداری $(V,+,\circ,K)$ را توزیع پذیر قوی می نامیم هرگاه توزیع پذیر چپ قوی و توزیع پذیر راست قوی باشد.

(ii) مجموع طرف راست رابطه $(\mathrm{H}_۱)$ و $(\mathrm{H}_۲)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$a\circ x+a\circ y=\{r+s: r\in a\circ x,\ s\in a\circ y\},$$

$$a\circ x+b\circ x=\{p+q: p\in a\circ x,\ q\in b\circ x\}.$$

(iii) اگر $\underline{o}$، صفر گروه $(V,+)$ باشد، آنگاه مجموعه $\underline{o}\circ\circ$ را با Ω_V نمایش می دهیم.

مثال ۱۷.۱.۱ ([۳۱]) در فضای اقلیدسی $(\mathbb{R}^۲,+,.,\mathbb{R})$ ابرعمل خارجی $\circ:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^۲\longrightarrow P_*(\mathbb{R}^۲)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$a\circ x=\begin{cases}\overline{ox} & x\neq(\circ,\circ),\\ \{\underline{o}\} & x=(\circ,\circ),\end{cases}$$

که در آن $\overline{ox}$ خط مار بر مبدا و نقطه x است. در این صورت $(\mathbb{R}^۲,+,\circ,\mathbb{R})$ یک ابرفضای برداری توزیع پذیر چپ قوی است.

ساختار ابرفضاهای برداری توزیع پذیر راست قوی در قضیه زیر مشخص شده است:

قضیه ۱۸.۱.۱ ([۳۱]) **الف.** هر ابرفضای برداری توزیع پذیر راست قوی، توزیع پذیر چپ قوی است.

ب. فرض کنید $(V,+)$ یک گروه آبلی، W زیرگروهی از V و K یک میدان باشد به طوری که $A=V/W$ یک فضای برداری معمولی روی K باشد. فرض کنید $p:V\longrightarrow A$ نگاشت تصویر کانونی از $(V,+)$ به روی $(A,+)$ باشد. قرار دهید

$$\begin{cases}\circ: K\times V\longrightarrow P_*(V)\\ a\circ x=p^{-۱}\left(a.p\left(x\right)\right)\end{cases}$$