بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

کران‌های بالا و پایین برای اعداد رمزی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

علی بهرمندپور

استاد راهنما: دکتر منوچهر ذاکر

مرداد ۸۷

تقدیم خالصانه به

پدر و مادرم

و همهٔ آنان که اینچنین‌اند

مهربان و بی‌ادّعا

قدردانی و تشکر

از خدای مهربان که همیشه و همه جا لطف‌های بی‌پایانش شامل حال من بوده سپاسگذارم. از خانواده عزیزتر از جانم به خصوص پدر و مادرم، که مشوق من در تمام دوران زندگی بوده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. از دوستان عزیزم که دوران خوشی را با آنها سپری کردم، صمیمانه سپاسگذاری می‌کنم و در پایان از زحمات استاد عزیزم جناب آقای دکتر منوچهر ذاکر به خاطر راهنمایی‌ها و آموخته‌هایی که از ایشان در دوران تحصیلم داشته‌ام، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم.

چکیده

عدد رمزی $r(k,l)$ برابر کوچکترین عدد صحیح N است به طوری که هر گراف N راسی یک خوشه k راسی و یا یک مجموعه مستقل l راسی داشته باشد. در این پایان‌نامه کران‌های بالا و پایینی برای اعداد رمزی گراف‌ها با استفاده از روش‌های مختلف از قبیل توابع فوق هندسی، احتمالاتی و ... به دست می‌آوریم.

سپس با گسترش این موضوع، می‌توان اعداد رمزی $r(H,K)$ را نیز معرفی نمود که در آن H و K دو گراف دلخواهند. در برخی حالات خاص از گراف‌های H و K، کران‌های بالا و پایینی برای اعداد رمزی در این پایان‌نامه اثبات شده و بهینه بودن برخی از این کران‌ها مورد بررسی قرار گرفته شده است.

فهرست

مقدمه

اگر G یک گراف ساده باشد و خوشه‌های بزرگ نداشته باشد می‌توان انتظار داشت که G دارای یک مجموعه مستقل بزرگ باشد. رمزی [1] در سال ۱۹۲۹ نشان داد به ازای هر دو عدد صحیح k و l، عدد صحیح $r(k,l)$ وجود دارد به طوری که هر گراف $r(k,l)$ راسی شامل یک خوشه k راسی یا یک مجموعه مستقل l راسی است.

تعیین اعداد رمزی کار بسیار دشواری می‌باشد(حتی برای مقادیرk و l کوچک) بنابراین فقط می‌توان برای آنها کران‌هایی به دست آورد، به طور مثال با ساختن گراف‌های مناسب می‌توان کران‌های پایینی برای اعداد رمزی به دست آورد.

در فصل اول به بیان مقدماتی از نظریه گراف پرداخته‌ایم که در آن قضایایی در رابطه با خوشه گراف و مجموعه مستقل گراف آورده شده است. همچنین مفاهیمی در مورد اعداد رمزی همراه با کران‌هایی که به سادگی به دست می‌آیند و رابطه آنها با اعداد رنگی که در نوع خود یکی از مباحث جالب این پایان‌نامه می‌باشد، آورده شده است.

روش‌های احتمالاتی نیز یکی از ابزارهای قوی برای به دست آوردن کران پایین در اعداد رمزی است. یکی از ایده‌های اساسی این روش این است که « برای اثبات وجود یک ساختار ترکیباتی با خصوصیات مطلوب فضای احتمال مناسبی می‌سازیم و عضوی به تصادف انتخاب می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این عضو با احتمال مثبت، دارای خصوصیات مطلوب این فضا است.»

در فصل دوم این پایان‌نامه به بیان روش‌های احتمالاتی که برگرفته از منابع [۳]، [۱۷] و [۱۸] می‌باشد، پرداخته‌ایم.

در اثبات احتمالاتی مسائل ترکیباتی، می‌توان نشان داد که یک پیشامد خاص با احتمال مثبت برقرار است هر چند که این احتمال خیلی کوچک باشد. به علاوه، اگر n پیشامد به طور مستقل داشته باشیم و هر یک از آنها با احتمال حداقل $p > 0$ صدق می‌کنند، آنگاه احتمال این که تمام پیشامدها به طور همزمان صدق کنند حداقل $p^n > 0$ است، هر چند p^n بسیار کوچک است.

[1] Ramsey

طبیعی است که حالت دوبه‌دو مستقل می‌تواند به وابستگی‌های نادر تعمیم داده شود، چنین تعمیمی در لم موضعی لوواس بیان شده است. این لم ساده توسط اردوش[۲]—لوواس[۳] در سال ۱۹۷۵ ثابت شد که راه کار مفیدی برای پیشامدهای نادر تولید می‌کند و دارای کاربردهای زیادی به خصوص برای به دست آوردن کران برای اعداد رمزی می‌باشد. به عنوان مثال، اسپنسر[۴] [۱۷] با استفاده از همین لم موضعی یک کران پایین بهینه برای اعداد رمزی به دست آورده است.

در فصل سوم ابتدا به معرفی تابع فوق هندسی گاوسی می‌پردازیم. روسو[۵] و همکارانش با استفاده از روابط گاوسی روی توابع همجوارش، قضایایی برای مجموعه مستقل یک گراف بیان کرده‌اند و با استفاده از آن، نتایجی در مورد کران بالا برای اعداد رمزی به دست آورده‌اند. همچنین کتاب‌های m یالی که با B_m نشان داده می‌شوند را معرفی نموده‌اند و به طور مشابه، با استفاده از همین روابط، کران‌های بالایی برای $r(B_m,K_n)$ به دست آورده‌اند.

اردوش به همراه روسو و همکارانش [۸] در سال ۱۹۷۸ اعداد رمزی را برای $r(C_m,K_n)$ مطرح کردند و کران بالایی برای آن به دست آوردند. در ادامه برای $r(C_{۲m},K_n)$، روسو و همکارانش کران بهتری نسبت به $r(C_m,K_n)$ به دست آوردند. اما برای $r(C_{۲m-۱},K_n)$ فقط به ازای $m = ۲,۳$ کران بهبود یافته‌تری تاکنون پیدا شده است. این مباحث در فصل چهارم مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

---

[۲] Erdős

[۳] Lovasz

[۴] Spencer

[۵] Rousseau

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به بیان مفاهیم اساسی که در این پایان‌نامه به آن‌ها برخورد خواهیم کرد، می‌پردازیم.

۱.۱ گراف‌ها و زیرگراف‌ها

گراف $G=(V,E)$ شامل یک مجموعهٔ متناهی و ناتهی V به نام مجموعهٔ رئوس و مجموعهٔ E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های دوعضوی V، به نام مجموعهٔ یال‌ها است. تعداد رئوس G را با $|G|$ و تعداد یال‌های گراف را با $||G||$ نشان می‌دهیم. همچنین گراف‌ها را معمولاً با حروف بزرگ مانند G و H نشان می‌دهیم.

اگر E، دارای عضو تکراری باشد آن عضو را یال موازی می‌نامیم. اگر به ازای راسی مانند v_i از V داشته‌باشیم، $\{v_i,v_i\}\in E$ در این‌صورت این یال از E را یک طوقه می‌گوییم.

دو راس u و v را در گراف $G=(V,E)$ مجاور می‌گوییم اگر بین آنها یالی موجود باشد و همچنین دو یال e_1 و e_2 از $E(G)$ را با یکدیگر مجاور می‌گوییم اگر این دو یال در یک راس مشترک باشند.

گراف G را یک گراف ساده می‌گوییم، هرگاه یال موازی و طوقه نداشته باشد. در این پایان‌نامه منظور از گراف، گراف ساده می‌باشد.

منظور از درجهٔ راس v در $V(G)$ که آن را با $deg_G(v)$ نمایش می‌دهیم، تعداد یال‌هایی است که به راس v متصل هستند. کمترین و بیشترین درجه راس‌های گراف G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم. اگر درجهٔ راس v برابر ۱ باشد آن راس را یک راس پایانی یا یک راس آویزان[1] می‌نامیم. اگر v راسی از درجه صفر باشد به آن راس یک راس تنها[2] می‌گوییم. اگر همهٔ رئوس G، راس تنها باشند، G را گراف تهی می‌نامیم.

اگر $G = (V, E)$ یک گراف و $v \in V(G)$ راسی از G باشد در این‌صورت همسایگی باز این راس را با $\Gamma(v)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Gamma(v) = \{u \in V(G) : \quad uv \in E(G)\}$$

هنگامی که درجهٔ تمام رئوس گراف G عددی ثابت مثلاً k باشد، در این‌صورت گراف G را یک گراف k—منتظم می‌نامیم.

فرض کنید X زیرمجموعه‌ای از رئوس یک گراف باشد، $\Gamma(X)$ را مجموعه همسایگی‌های مجموعه X تعریف می‌کنیم.

گراف H را زیر گرافی از G گوییم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و نماد $H \subseteq G$ را به کار می‌بریم.

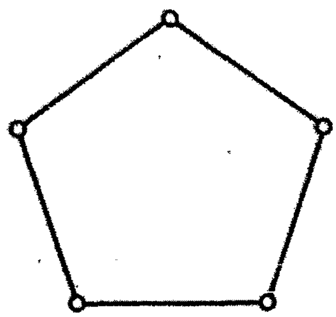
زیرگراف H ازگراف G را زیر گراف فراگیر گوییم اگر $V(H) = V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد.

تعریف ۱.۱.۱ منظور از زیرگراف القائی H از G، زیرگرافی است که در آن $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و مجموعهٔ یال‌های H بدین‌صورت تعریف می‌گردد که اگر دو راس در G مجاور بوده و این دو راس در مجموعهٔ رئوس H نیز قرار داشته باشند، آن دو راس در H نیز مجاور باشند. به عبارت دیگر اگر $G = (V, E)$ یک گراف و $\emptyset \neq V' \subset V(G)$ باشد در این‌صورت زیر گرافی از G که مجموعه راس‌های آن V' و مجموعه یال‌های آن یال‌هایی از گراف G باشد که هر دو سر آنها در V' واقع است، زیرگراف القا شده توسط V' نامیده می‌شود و با $G[V']$ نمایش داده می‌شود. همچنین زیرگراف القایی که توسط همسایگی‌های راس v به

[1] pendant vertex
[2] isolated vertex

وجود می آید را با G_v نشان می‌هیم.

تعریف ۲.۱.۱ گراف G را H—آزاد[۳] گویند اگر G، گراف H را به عنوان زیرگراف نداشته باشد. به طور مثال گراف شکل (۱—۱) مثلث—آزاد است. یعنی هیچ زیرگراف آن مثلث نیست.



شکل ۱—۱

منظور از گراف کاملِ n راسی، که آن را با K_n نشان می‌دهیم، گرافی است که که هر دو راس آن مجاور باشند.

اگر $G = (V, E)$ یک گراف باشد در این‌صورت مکمل گراف G که با G^c نشان داده می‌شود را گرافی می‌گیریم که رئوس آن همان رئوس گراف G است و شامل یال‌هایی از گراف K_n است که در G نیستند.

اگر $e = uv$ یک یال در گراف G باشد، گراف $G \setminus \{e\}$ زیرگراف فراگیر G بوده و فاقد یال e از گراف G است، همچنین اگر v راسی در G باشد، گراف $G \setminus \{v\}$ زیرگراف القائی G بوده و تنها راس v را دربر ندارد.

حال اگر A زیر مجموعه‌ای از رئوس G باشد، $G \setminus A$ زیرگرافی از G است که با حذف رئوس A و یال‌های واقع بر آنها به‌دست می‌آید.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید n عدد صحیح مثبت باشد و $0 \leq p = p(n) \leq 1$. مجموعه $\Omega(n, p)$ را مجموعهٔ تمام گراف‌های n راسی می‌گیریم که در آن هر جفت از رئوس به طور مستقل با احتمال p مجاورند. هر عضو این

[۳] H-free

مجموعه مانند $G(n,p)$ را یک گراف تصادفی می‌نامیم.

بنابراین احتمال وقوع هر گراف با m یال و n راس در این مجموعه برابر $p^m(1-p)^{n-m}$ خواهد بود.

تعریف ۴.۱.۱ $H=(V,E)$ را یک ابرگراف[۴] گوییم هرگاه V یک مجموعهٔ متناهی و ناتهی به نام مجموعهٔ رئوس و E زیرگردایه‌ای از گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های V، به نام مجموعهٔ یال‌ها باشد. یعنی هر یال H، زیرمجموعه‌ای از V است.

۱.۱.۱ مسیرها و دورها

بسیاری از کاربردها در نظریه گراف شامل حرکت از یک راس و رسیدن به راس دیگر در آن گراف می‌باشد. این مطلب اساس تعریف فاصلهٔ دو راس و مسیر در یک گراف می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۱ یک گشت به طول n در G دنباله‌ای از رئوس و یال‌های G به‌صورت زیر است

$$W=\{v_0,e_1,v_1,e_2,\dots,e_n,v_n\}$$

که در آن $e_i=\{v_{i-1},v_i\}$ یال مرتبط کنندهٔ v_{i-1} و v_i است. راس‌های v_0 و v_n را رئوس ابتدا و انتها و راس‌های $v_1,v_2,\dots,v_{n-1}$ را رئوس داخلی آن می‌نامیم. طول یک گشت در واقع تعداد یال‌های آن گشت می‌باشد.

اگر یال‌های $e_1,e_2,\dots,e_n$ در گشت W متمایز باشند، W را یک گذر می‌نامیم. گذر W را بسته گوییم هرگاه در آن داشته باشیم $v_0=v_n$. اگر علاوه بر یال‌ها، راس‌های $v_0,v_1,\dots,v_n$ نیز متمایز باشند در این‌صورت W را یک مسیر می‌نامیم. یک مسیر n راسی را با P_n نشان می‌دهیم.

---
۴ hypergraph

منظور از یک دور به طول n، یک مسیر بسته به صورت $\{v_0, \ldots, v_n\}$ است که در آن $n \geq 3$، $v_0 = v_n$ و بقیهٔ رئوس مجزا هستند. یک دور n راسی را با C_n نشان می‌دهیم .حال اگر n زوج باشد دور را یک دور زوج و اگر n فرد باشد دور را یک دور فرد می‌نامیم.

طول کوتاهترین دور در گراف G را اندازه کمر گراف گوییم و با $girth(G)$ نشان می‌دهیم و اگر G شامل دور نباشد اندازه کمر گراف را بنا بر تعریف، بینهایت در نظر می‌گیریم.

دیراک[5] در سال ۱۹۵۲ رابطه‌ای بین کمترین درجهٔ یک گراف، طولانی‌ترین مسیر و دور در یک گراف به صورت زیر بیان کرد:

قضیه ۶.۱.۱ اگر G یک گراف ساده با $\delta \geq 2$ باشد، در این‌صورت

۱) G شامل یک مسیر با طول حداقل δ است،

۲) G شامل یک دور با طول حداقل $\delta + 1$ است.

برهان. جهت مشاهده اثبات به مرجع [۲۰]، قضیهٔ ۱.۲.۱۸ رجوع شود. □

تعریف ۷.۱.۱ منظور از فاصلهٔ بین دو راس u و v که با $d_G(v, u)$ نمایش داده می‌شود، طول کوتاهترین مسیر در G از راس u به v است. اگر بین رئوس متمایز u و v مسیری موجود نباشد در این‌صورت فاصلهٔ بین این دو راس را بینهایت می‌گیریم و همچنین $d(u, u)$ را برابر صفر می‌گیریم. به وضوح به ازای هر ۳ راس v, u و w داریم

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$$

همچنین قطر G را بیشترین فاصله بین دو راس از G تعریف می‌کنیم و آن را با $diam(G)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید G یک گراف و G_1 و G_2 زیرگراف‌هایی از G باشند. G_1 و G_2 را مجزا می‌گوییم اگر هیچ راس مشترکی نداشته باشند. همچنین اجتماع این دو گراف را به $G_1 \cup G_2$ نشان می‌دهیم و آن را گرافی می‌گیریم که

[5] Dirac

مجموعه راس‌های آن $V(G_1) \cup V(G_2)$ و مجموعه یال‌های آن $E(G_1) \cup E(G_2)$ باشند. همچنین اشتراک این دو گراف، که با $G_1 \cap G_2$ نشان داده می‌شود، را نیز به طریقهٔ مشابه تعریف می‌کنیم ولی در این حالت باید G_1 و G_2 دارای حداقل یک راس مشترک باشند.

گراف G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

توجه داریم که گراف G را می‌توان به‌صورت اجتماع مجزایی از گراف‌ها مانند $G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ نوشت که در آن G_i ها زیرگراف‌های ماکسیمال همبند از G هستند و به آنها مولفه‌های همبندی G می‌گوییم. با تعریف اخیر گراف G همبند است اگر و فقط اگر دارای یک مولفهٔ همبندی باشد.

منظور از یک درخت، گراف همبند و فاقد دور و منظور از یک جنگل، گراف فاقد دور است.

درخت فراگیر[6] G، زیرگراف فراگیر G است که درخت است.

گراف $G = (V, E)$ را یک گراف دوبخشی می‌گوییم هرگاه مجموعهٔ رئوس V را بتوان به صورت زیرمجموعه‌های مجزای V_1 و V_2 طوری افراز کرد که هر یال از G دارای یک سر در V_1 و یک سر در V_2 باشد. گراف دو بخشی کامل، یک گراف دوبخشی با بخش‌های V_1 و V_2 است که در آن هر راس V_1، به هر راس V_2 وصل شده باشد. اگر $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$ در این صورت گراف دو بخشی کامل را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ گراف‌های ساده باشند. $G_1 + G_2$ گرافی است که مجموعه راس‌هایش اجتماع مجزای V_1 و V_2 است و تمام رئوس زیرگراف G_1 به تمام رئوس زیر گراف G_2 وصل است.

حال کتاب[7] با m صفحه، گراف $B_m = K_1 + K_{1,m}$ است که شامل m مثلث مشترک با یک یال است.

تعریف ۸.۱.۱ دو گراف $H = (V(H), E(H))$ و $G = (V(G), E(G))$ را یکریخت گوییم هرگاه نگاشت $\varphi : V(H) \longrightarrow V(G)$ موجود باشد به طوری که

i) نگاشت φ یک‌به‌یک و پوشا باشد؛

ii) نگاشت φ حافظ مجاورت باشد.(یعنی $\{u, v\} \in E(H)$ اگر و تنها اگر $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E(G)$.)

---

[6] Spaning Tree

[7] Book

۲.۱.۱ گراف‌های جهت‌دار

گرچه می‌توان بسیاری از مسائل را به طور طبیعی بر پایه یک فرمول نظریه گرافی بیان نمود، ولی گاهی اوقات مفهوم یک گراف به تنهایی کافی نیست. به عنوان مثال، هنگامی که با مسائل ترافیک سر و کار داریم، لازم است بدانیم که کدام خیابان‌ها یک طرفه‌اند و در چه جهتی حرکت مجاز است. مسلماً در چنین وضعیتی نمی‌توان از یک گراف به خوبی بهره جست و به عبارت دیگر یک گراف جهت‌دار مورد نیاز است .

تعریف ۹.۱.۱ گراف جهت‌دار D دو تایی مرتب (V,E) است که V مجموعه‌ای است ناتهی به نام مجموعه رئوس و E مجموعه‌ای متشکل از زوج‌های مرتب در V به نام مجموعهٔ کمان‌ها است.

اگر $v \in V(G)$ راسی از D باشد درجه ورودی آن را به $d_D^-(v)$ نشان می‌دهیم و آن را برابر تعداد کمان‌هایی از D در نظر می‌گیریم که راس v انتهای آنها است و درجه خروجی راس v را با $d_D^+(v)$ نشان می‌دهیم و آن را برابرتعداد کمان‌هایی از D در نظر می‌گیریم که راس v ابتدای آنها است.

به راحتی می‌توان نشان داد که در گراف جهت‌دار D داریم :

$$\sum_{v\in V} d^-(v) = \sum_{v\in V} d^+(v)$$

همچنین میانگین درجات رئوس گراف جهت‌دار D با n راس را برابر $\frac{\sum_{v\in V} d^-(v)}{n}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ گراف کامل جهت‌دار را یک تورنمنت[۸] می‌گوییم. یک تورنمنت را انتقالی[۹] می‌نامیم اگر شامل دور جهت‌دار به طول ۳ نباشد.

۲.۱ مجموعه‌های مستقل، قضیهٔ رمزی و قضیهٔ توران

۸ tournament

۹ transitive

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف باشد. زیرمجموعهٔ S از V را که هیچ دو راس آن در G مجاور نیستند، یک مجموعه مستقل از G می‌نامیم. همچنین مجموعه مستقل S را ماکسیمم گوییم اگر هیچ مجموعه مستقل S' با شرط $|S'|>|S|$ وجود نداشته باشد. تعداد رئوس در یک مجموعه مستقل ماکسیمم را با $\alpha(G)$ نشان می‌دهیم.

به یک زیرمجموعه از رئوس دو به دو مجاور در G یک خوشه می‌گوییم. **عدد خوشه‌ای**[10] گراف G برابر با بیشترین تعداد راس‌ها در یک خوشهٔ G است و آن را با $\omega(G)$ نمایش می‌دهیم.

توجه داریم که S یک خوشه از گراف G است اگر و تنها اگر S یک مجموعه مستقل از گراف مکمل G یعنی G^c باشد. بنابراین این دو مفهوم متمم یکدیگرند.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف باشد. زیرمجموعهٔ M از E را یک تطابق در G می گوییم اگر هیچ دو عضو M در G با یکدیگر مجاور نباشند. اگر یالی از M مجاور راس v باشد، می گوییم M راس v را آلوده کرده است و v را نیز $M-$ آلوده می‌نامیم. اگر هر راس از G، $M-$ آلوده باشد در این صورت تطابق M را کامل می گوییم.

اگر G خوشه های بزرگ نداشته باشد می‌توان انتظار داشت که G دارای یک مجموعه مستقل بزرگ باشد. درستی این مطلب نخستین بار توسط رمزی (۱۹۲۹) اثبات شد. او نشان داد که به ازای هردو عدد صحیح مثبت k و l ، عدد صحیح $r(k,l)$ وجود دارد به طوری که هر گراف $r(k,l)$ راسی، شامل یک خوشه k راسی یا یک مجموعه مستقل l راسی است. به عنوان مثال به راحتی می‌توان دید که

$$r(۱,l)=r(k,۱)=۱$$

$$r(۲,l)=l \quad , \quad r(k,۲)=k \qquad (۱)$$

[10] clique number

اعداد $r(k,l)$ به اعداد رمزی مشهورند.

قضیه ۳.۲.۱ برای هر دو عدد صحیح $k \geq ۲$ و $l \geq ۲$،

$$r(k,l) \leq r(k,l-۱) + r(k-۱,l)$$

به علاوه، اگر $r(k,l-۱)$ و $r(k-۱,l)$ هر دو زوج باشند، آنگاه نابرابری اکید برقرار است.

برهان. جهت مشاهده اثبات به مرجع [۴]، قضیهٔ ۷.۴ رجوع شود. □

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنید m و n_i اعداد صحیح مثبت باشند. آنگاه

$$r(m, n_۱ + n_۲ - ۱) \geq r(m,n_۱) + r(m,n_۲) - ۱$$

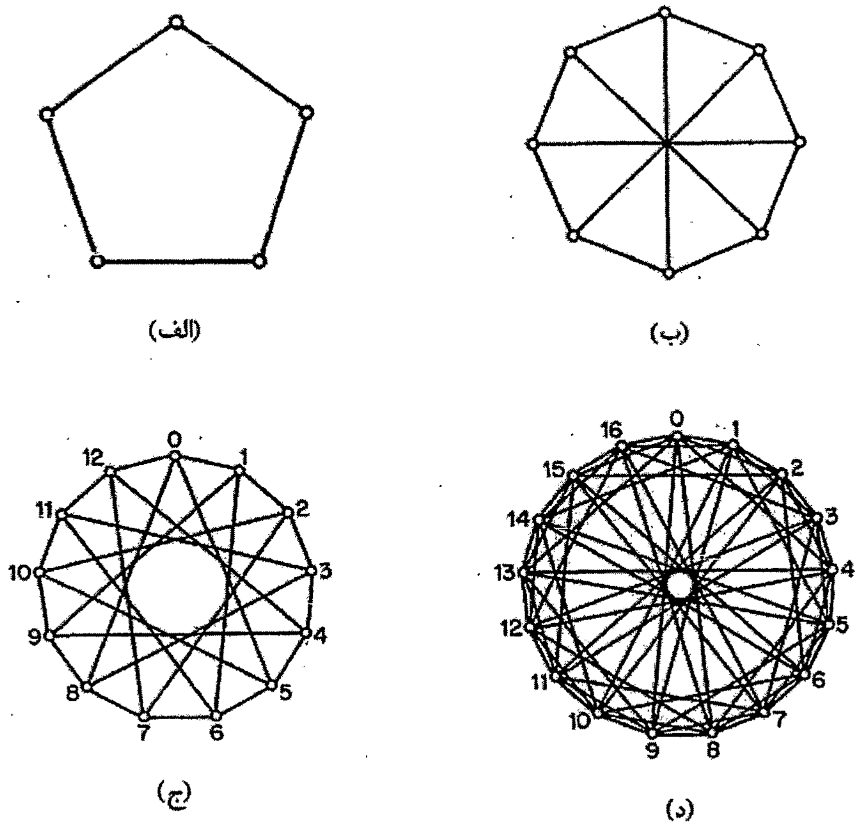
برهان. فرض کنید G_i یک گراف از مرتبه $r(m,n_i) - ۱$ باشد که شامل K_m نیست و برای هر i، $i = ۱,۲,\dots$ $\alpha(G_i) \leq n_i - ۱$. آنگاه گراف $G = G_۱ \cup G_۲$ شامل K_m نیست و $\alpha(G) \leq n_۱ + n_۲ - ۲$. با توجه به این، حکم برقرار است. □

تعیین اعداد رمزی در حالت کلی مسئلهٔ حل نشدهٔ بسیار سختی است. کران‌های پایین را می‌توان به وسیلهٔ ساختن گراف‌های مناسب به دست آورد. مثلاً، چهار گراف موجود در شکل(۱—۲)، را در نظر بگیرید. شکل(۱—۲ الف) دوری به طول ۵ است که شامل خوشه سه راسی نیست و مجموعه مستقلی از سه راس هم نیست. بنابراین نشان می‌دهد که

$$r(۳,۳) \geq ۶$$

گراف شکل(۱—۲ ب) شامل خوشه سه راسی نبوده و مجموعه مستقلی چهار راسی ندارد. لذا

$$r(۳,۴) \geq ۹$$



شکل ۱—۲

به طور مشابه، گراف شکل (۱—۲ ج) نشان می‌دهد که

$$r(۳,۵) \geq ۱۴$$

و گراف شکل (۱—۲ د) نشان می‌دهد که

$$r(۴,۴) \geq ۱۸$$

اکنون با کمک قضیه (۱.۲.۳) و معادلات (۱) می‌توان نشان داد که برابری در نامساوی‌های بالا برقرار است. زیرا

$$r(۳,۳) \leq r(۳,۲) + r(۲,۳) = ٦$$

در نتیجه $r(۳,۳) = ٦$. و همچنین

$$r(۳,۴) \leq r(۳,۳) + r(۲,۴) - ۱ = ۹$$

و به دست می‌آید که $r(۳,۴) = ۹$. اکنون دوباره برای دو نامساوی آخر هم به دست می‌آید که

$$r(۳,۵) \leq r(۳,۴) + r(۲,۵) = ۱۴$$

$$r(۴,۴) \leq r(۴,۳) + r(۳,۴) = ۱۸$$

که این نتیجه‌ها به ترتیب نتیجه می‌دهد که $r(۳,۵) = ۱۴$ و $r(۴,۴) = ۱۸$.

جدول زیر برخی اعداد رمزی $r(k,l)$ شناخته شده را نشان می‌دهد. اگر در اعداد رمزی $k = l$ باشد، آنگاه

k \ l	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۳	۱	۳	۶	۹	۱۴	۱۸	۲۳
۴	۱	۴	۹	۱۸			

$r(k,k)$ را اعداد رمزی قطری یا مربعی می‌گویند. کران‌های زیر برای بعضی از اعداد رمزی مربعی می‌باشد.

$$۴۳ \leq r(۵,۵) \leq ۴۹ \quad , \quad ۱۰۲ \leq r(۶,۶) \leq ۱۶۵$$

$$۲۰۵ \leq r(۷,۷) \leq ۵۴۰ \quad , \quad ۲۸۲ \leq r(۸,۸) \leq ۱۸۷۰$$

$$۵۶۵ \leq r(۹,۹) \leq ۶۵۸۸ \quad , \quad ۷۹۸ \leq r(۱۰,۱۰) \leq ۲۳۵۵۶$$

گراف (k,l)—رمزی، گرافی با $r(k,l)$ راس است که شامل خوشهٔ k راسی و مجموعه مستقل l راسی نیست. بنابر تعریف $r(k,l)$ چنین گراف‌هایی برای همه $k \geq ۲$ و $l \geq ۲$ وجود دارند. غالباً به نظر می‌رسد که گراف‌های رمزی دارای ساختار جالبی هستند. همه گراف‌ها در شکل (۱—۱) گراف‌های رمزی هستند.

در حالت کلی، قضیه زیر کران بالایی را برای $r(k,l)$ نتیجه می‌دهد.

قضیه ۵.۲.۱ $r(k,l) \leq \binom{k+l-۲}{k-۱}$.