دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

دانشکده

ریاضی وعلوم کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان

توپولوژی جبری محاسباتی ، محاسبه هومولوژی پایا

استاد راهنما

دکتر فرهاد رحمتی

دانشجو

زهرا مومن

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

بسمه تعالی

تاریخ:
شماره:

فرم اطلاعات پایان‌نامه
کارشناسی- ارشد و دکترا

معاونت پژوهشی
فرم پروژه تحصیلات تکمیلی ۷

مشخصات دانشجو:

نام و نام خانوادگی:زهرا مومن — دانشجوی آزاد ● — بورسیه ○ — معادل ○

شماره دانشجوئی: ۸۵۱۱۳۰۶۷ — دانشکده: ریاضی وعلوم کامپیوتر — رشته تحصیلی: ریاضی

گروه:محض

مشخصات استاد راهنما:

نام و نام خانوادگی: دکتر فرهاد رحمتی — درجه و رتبه:دانشیار

نام و نام خانوادگی: — درجه و رتبه:

مشخصات استاد مشاور:

نام و نام خانوادگی: دکتر علی محدث خراسانی — درجه و رتبه:استادیار

نام و نام خانوادگی: — درجه و رتبه:

عنوان پایان‌نامه به فارسی :توپولوژی جبری محاسباتی ، محاسبه هومولوژی پایا

عنوان پایان‌نامه به انگلیسی:computational algebraic topology, computing persistent homology

نوع پروژه: کارشناسی ○ — ارشد ● — دکترا ○ — سال تحصیلی:۸۷-۸۵

کاربردی ● — بنیادی ○ — توسعه‌ای ○ — نظری ○

تاریخ شروع : تیر۶ ۱۳۸ — تاریخ خاتمه :مهر ۸۷ — تعداد واحد :۶ — سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه‌های کلیدی به فارسی:توپولوژی جبری محاسباتی ،هومولوژی مقاوم،نظریه مقاومت چند بعدی

واژه‌های کلیدی به انگلیسی :**computational algebraic topology, persistent homology, multi dimentional analysis**

مشخصات ظاهری	تعداد صفحات	تصویر ● جدول ● نمودار ○ نقشه ○ واژه‌نامه ●		تعداد مراجع۳۱	تعداد صفحات ضمائم ۰
زبان متن	فارسی ●	انگلیسی ○	چکیده	فارسی ●	انگلیسی ●
یادداشت					

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیت‌های پژوهشی دانشگاه

استاد:

دانشجو:زهرا مومن

امضاء استاد راهنما:

تاریخ:۸۷/۷/۱۳

چکیده

این پایان‌نامه شامل مطالعه دو محور اصلی است. ابتدا به محاسبه هومولوژی مقاوم می‌پردازد. بدین نحو که هومولوژی یک مجتمع سادکی $d-$ بعدی صافی شده همچون K را، با توجه به این که حلقه ضرایب را یک PID در نظر گرفتیم، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس تناظری پایه‌گذاری خواهد شد که توصیف ساده‌ای روی میدان‌ها به ما می‌دهد. در ادامه یک الگوریتم طبیعی برای محاسبه هومولوژی مقاوم روی یک میدان دلخواه ارائه می‌شود. حال اگر حلقه‌ی زمینه، میدان نباشد، تناظر مذکور طبقه‌بندی ساده‌ای را به ما نخواهد داد. لذا ما یک الگوریتم برای محاسبه‌ی گروه‌های هومولوژی مقاوم روی یک PID دلخواه معرفی می‌کنیم.

با این فرآیند، هومولوژی مقاوم، توپولوژی یک صافی را بر حسب یک پایای گسسته کامل، یعنی یک مجموعه‌ی چند گانه از بازه‌ها معرفی می‌کند.

بخش بعدی این پایان نامه، به مطالعه نظریه‌ی مقاومت چند بعدی اختصاص داده شده است.

در بسیاری از کاربردهای توپولوژیکی، نیاز به مطالعه‌ی یک صافی چندگانه داریم؛ یعنی خانواده‌ای از فضاها که در ابعاد هندسی چندگانه پارامتری شده‌اند. در این حالت، خواهیم دید که هیچ پایای گسسته‌ی کاملی مشابه با مقاومت یک بعدی، وجود ندارد. بنابراین پایای رتبه معرفی می‌شود. پایای رتبه، یک پایای گسسته برای تخمین اعداد بتی در یک صافی چندگانه می‌باشد. در نهایت، کامل بودن پایای رتبه، در بعد یک، ثابت می‌شود.

کلمات کلیدی: توپولوژی جبری محاسباتی، هومولوژی مقاوم، نظریه مقاومت چند بعدی.

فهرست مندرجات

مقدمه

گروه‌های هومولوژی مقاوم برای اولین بار، تنها برای مجتمع‌های سادکی سه‌بعدی و با ضرایب در $\mathbb{Z}_۲$ در مراجع [۷, ۱۴] تعریف شده‌اند. همچنین الگوریتمی برای تولید یک مجموعه‌ی خاص از بازه‌ها برای زیر مجتمع‌های $S^۳$ روی $\mathbb{Z}_۲$ ارائه شده است.

نکته‌ی جالب این است که این بازه‌ها، محاسبه‌ی دقیقی از رتبه گروه‌های هومولوژی مقاوم را ارائه می‌دهند.

فصل اول این پایان‌نامه را به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز اختصاص داده‌ایم.

در فصل دوم به موضوع اصلی این پایان‌نامه یعنی محاسبه‌ی هومولوژی مقاوم پرداخته‌ایم. در این فصل هومولوژی یک مجتمع سادکی $d-$ بعدی صافی شده همچون K را با توجه به این‌که حلقه‌ی ضرایب را یک PID همچون D در نظر گرفتیم، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یک مجتمع صافی شده، یک دنباله‌ی صعودی از مجتمع‌های سادکی می‌باشد که یک سیستم استقرایی از گروه‌های هومولوژی را مشخص می‌کند؛ یعنی یک خانواده از گروه‌های آبلی $\{G_i\}_{i\geq ۰}$ به همراه همریختی‌های $G_i \to G_{i+۱}$. اگر هومولوژی را با ضرایب در میدان در نظر بگیریم، به یک سیستم استقرایی از فضاهای برداری روی یک میدان می‌رسیم؛ اما هر فضای برداری، توسط بعدش مشخص می‌شود. لذا در ادامه یک طبقه‌بندی ساده از یک سیستم استقرایی از فضاهای برداری به‌دست می‌آید. این طبقه‌بندی بر حسب یک مدول مدرج روی یک حلقه‌ی مدرج $F[t]$ (حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی میدان F) می‌باشد که می‌تواند توسط خانواده‌های متناهی از بازه‌ها با نقاط انتهایی صحیح، پارامتری شود. همچنین یک الگوریتم طبیعی برای محاسبه‌ی این خانواده از بازه‌ها ارائه می‌شود. با استفاده از این خانواده، می‌توان خاصیت‌های هومولوژیکی که تحت

صافی، مقاوم باقی می‌مانند را مشخص کرد. به عبارت دیگر می‌توان هومولوژی مقاوم مجتمع صافی شده را مشخص کرد. به علاوه، تفسیر ما نشان می‌دهد که اگر حلقه‌ی زمینه میدان نباشد، هیچ طبقه‌بندی ساده‌ی مشابهی از هومولوژی مقاوم وجود ندارد؛ بلکه ساختارها، بسیار پیچیده هستند و اگرچه می‌توان ثابت‌های جالبی را به آن‌ها نسبت داد، ولی هیچ طبقه‌بندی ساده‌ای وجود ندارد و احتمالاً در دسترس هم نخواهد بود. در این حالت، یک الگوریتم برای محاسبه‌ی گروه هومولوژی مقاوم روی PIDها ارائه می‌دهیم.

فصل آخر این پایان‌نامه، به مطالعه نظریه‌ی مقاومت چند بعدی اختصاص داده شده است.

در فصل دوم دیدیم که هومولوژی مقاوم، توپولوژی یک صافی را بر حسب یک پایای گسسته‌ی کامل، یعنی یک مجموعه‌ی چندگانه از بازه‌ها نشان می‌دهد. اما در بسیاری از کاربردهای توپولوژیکی، نیاز به مطالعه‌ی یک صافی چندگانه داریم. یعنی یک خانواده از فضاها که در طول ابعاد هندسی چندگانه پارامتری شده‌اند.

در فصل سوم، بررسی می‌کنیم که هیچ پایای گسسته‌ی کامل مشابه با مقاومت یک‌بعدی، برای مقاومت چند بعدی وجود ندارد. به جای آن، پایای رتبه معرفی می‌شود که یک پایای گسسته برای تخمین اعداد بتی در یک صافی چندگانه می‌باشد و کامل بودن این پایا را در بعد یک ثابت می‌کنیم.

پایای رتبه، علی‌رغم بازه‌های بارکد، به ابعاد بالاتر گسترش می‌یابد.

البته وقتی با یک فضای صافی شده چندگانه سروکار داریم، می‌توانیم با ثابت کردن مقدار پارامترها به جز یک پارامتر، هومولوژی مقاوم را در هر بعد محاسبه کنیم. اما برای حذف نیاز به ثابت کردن مقادیر، مقاومت همه‌ی ابعاد را به یک‌باره مورد بررسی قرار می‌دهیم. این مسأله را مقاومت چند بعدی می‌نامیم.

برای درک ساختار مقاومت چندبعدی، از یک روش عمومی جبری شامل سه‌گام استفاده می‌کنیم:

گام ۱: تناظر؛ در این بخش، ساختار جبری متناظر با فضای مورد نظر ما مشخص می‌شود.

گام ۲: طبقه‌بندی؛ در این بخش، یک طبقه‌بندی کامل این ساختار به‌دست می‌آید.

گام ۳: پارامتری‌سازی؛ در این بخش، طبقه‌بندی مذکور در گام ۲، پارامتری می‌شود. پارامتری کردن ما به فرم پایاها خواهد بود.

ما در جستجوی پایاهایی هستیم که اولاً متناظر با تصاویر گسسته‌ی نقاط در واریته‌های جبری هستند و ثانیاً به میدان زمینه محاسبه، وابسته نیستند. شرط اول، تضمین می‌کند که پارامتری‌سازی متناهی داشته باشیم و دومین شرط تضمین می‌کند که پایاهای ما همواره از یک مجموعه می‌آیند، مانند اعداد بتی که صرف‌نظر از حلقه‌ی ضرایب، همواره صحیح هستند. برای اختصار، این پایاها را گسسته و پایاهای دیگر را پیوسته می‌نامیم.

پایاهای پیوسته ممکن است غیر قابل شمارش باشند و وابسته به میدان زمینه‌ی محاسبه باشند. لذا به طور طبیعی، این‌گونه پایاها برای ایده‌های محاسباتی، مناسب نمی‌باشند. بنابراین، هدف ما به‌دست آوردن یک پایای گسسته‌ی کامل برای مقاومت چند بعدی است.

در انتهای این فصل، پایای رتبه، به عنوان پایای گسسته قابل محاسبه و مفید برای استخراج اطلاعات مقاومت از یک فضای صافی شده چندگانه ، پیشنهاد می‌شود و نیز خواهیم دید که این پایا در بعد یک، هم‌ارز با بارکدهای مقاومت است و لذا کامل می‌باشد.

مرجع اصلی که در فصل دوم مورد استفاده قرار گرفته است، مقاله‌ی زیر است:

"Computing persistent homology"

ZOMORODIAN,A.,AND CARLSSON,G.

Discrete and Computational Geometry 33,2 (2005),249-274

مقاله‌ی زیر مرجعی است که در فصل سوم مورد استفاده قرار گرفته است :

"The Theory of Multidimensional Persistence"

CARLSSON,G.,AND ZOMORODIAN,A.

Discrete and Computational Geometry (2007)

فصل ۱

تعاریف و قضایای مورد نیاز

در این فصل به بیان تعاریف، لم‌ها و قضایای مورد نیاز می‌پردازیم.

مرجعی که برای بیان مفاهیم جبری از آن استفاده کرده‌ایم، کتاب زیر است:

"Basic Abstract Algebra"

Bhattacharya. P.B, Jain.S.K, Nagpaul.S.R. (1995)

برای بیان مفاهیم توپولوژی جبری و جبر هومولوژی از مراجع زیر کمک گرفته‌ایم:

"Elements of Algebra Topology"

Munkres , J.R. (1984)

"Topology for Computing"

Afra J.Zomorodian (2004)

مرجعی که برای بیان مفاهیم هندسه جبری، مورد استفاده قرار گرفته است، کتاب زیر می‌باشد:

"Basic Algebraic Geometry"

Igor R.Shafarevich , (1988).

۱.۱ مفاهیم جبری

تعریف ۱.۱.۱ چندجمله‌ای: یک چند جمله‌ای $f(t)$ با ضرایب در R به فرم $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ که $a_i \in R$ و t متغیر است و تنها برای تعداد متناهی‌تا i، $a_i \neq 0$ می‌باشد.(R حلقه ای دلخواه است.)

تعریف ۲.۱.۱ حلقه چندجمله‌ای‌ها: مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های $f(t)$ روی R، تشکیل یک حلقه جابجایی و یکدار $R[t]$ می‌دهند که آن را حلقه چندجمله‌ای‌ها نامند.

تعریف ۳.۱.۱ حوزه ایده‌ال اصلی (PID): حلقه R که فاقد مقسوم‌علیه صفر باشد و تمام ایده‌ال‌های آن اصلی باشد را یک حوزه ایده‌ال اصلی نامند.(ایده ال تولید شده توسط یک عنصر را اصلی نامیم.) به عنوان مثال $\mathbb{R}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}_p$ (که p یک عدد اول می‌باشد) و $F[t]$ (که F یک میدان می‌باشد) همگی PID هستند.

تعریف ۴.۱.۱ R**– مدول چپ:** فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار، M یک گروه جمعی آبلی و $(r,m) \to rm$ نگاشتی از $R \times M$ به M باشد، به‌طوری که به ازای هر $r, r_1, r_2 \in R$ و $m, m_1, m_2 \in M$ داشته باشیم:

(۱) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2,$

(۲) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m,$

(۳) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m),$

(۴) $1m = m$ ($1 \in R$ اگر)

در این صورت M را یک R– مدول چپ نامیده، معمولاً به صورت $_RM$ می‌نویسند.

تعریف ۵.۱.۱ حلقه مدرج: فرض کنیم R یک حلقه باشد. R را حلقه مدرج گوییم هرگاه خانواده $\{R_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ از زیرگروه‌های جمعی R موجود باشد، به‌طوریکه:

$$R \simeq \oplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i \qquad (1)$$

$$\forall i,j \;\; R_i R_j \subseteq R_{i+j} \qquad (2)$$

عناصر متعلق به هر R_i را همگن از درجه i گوییم .

تعریف ٦.۱.۱ مدول مدرج: یک مدول مدرج M روی یک حلقه مدرج R، یک مدول است که به یک تجزیه جمع مستقیم از گروه‌های جمعی آبلی مجهز شده است، $M \simeq \oplus M_i$ ،$i \in \mathbb{Z}$، به طوریکه عمل R روی M به‌صورت دو خطی زیر تعریف می‌شود:

$$R_n \otimes M_m \to M_{n+m}$$

تعریف ۷.۱.۱ مدول مدرج نامنفی: یک حلقه (مدول) مدرج، مدرج نامنفی است اگر برای تمام $i < 0$، $R_i = 0$ (به ترتیب $M_i = 0$).

تعریف ۸.۱.۱ درجه گذاری استاندارد روی $R[t]$: فرض کنید $R[t]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها با متغیر t باشد. ما می‌توانیم $R[t]$ را به طور نامنفی مدرج کنیم با $n \geq 0$ و $(t^n) = t^n.R[t]$، که این درجه گذاری را درجه‌گذاری استاندارد روی $R[t]$ می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱ مدول آزاد: $R-$ مدول F را آزاد گوییم هرگاه پایه داشته باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ کاتگوری : فرض کنید C دسته‌ای از اشیاء مانند A، B، C و ... همراه با خانواده‌ای از مجموعه‌های جدا از هم $Hom(A,B)$، ... باشد، به‌طوریکه به ازای هر زوج مرتب از اشیاء A و B، یکی از این مجموعه‌ها وجود دارد. عناصر $Hom(A,B)$ را ریختبری‌ها نامند. C را یک کاتگوری می‌نامند هرگاه اصول زیر برقرار باشد:

(۱) شرکت پذیری:

$$\forall\alpha \in Hom(A,B), \forall\beta \in Hom(B,C), \forall\gamma \in Hom(C,D);\ \gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$$

(۲) وجود ریختبری‌های همانی:

به ازای هر $A \in \mathrm{C}$، عنصری مانند $I_A \in Hom(A,A)$ موجود باشد، به‌طوریکه هرگاه gI_A, I_Af تعریف شده باشند، $I_Af = f$ و $gI_A = g$. واضح است که به ازای هر $A \in \mathrm{C}$، I_A یکتاست.

مثال ۱.۱.۱ فرض کنید C خانواده‌ی تمام $R-$ مدول‌های راست (یا چپ) باشد و $R-$ همریختی‌های بین آن‌ها، ریختبری‌ها باشند. در این صورت C یک کاتگوری است که آن را به $mod - R$ (یا $R - mod$) نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۱.۱.۱ تابعگون: T را یک تابعگون هم‌ورد [پادهمورد] از کاتگوری C_1 به کاتگوری C_2 می‌نامند، هرگاه به ازای هر شیء $A \in \mathrm{C}_1$، شیء یکتایی مانند $T(A) \in \mathrm{C}_2$ موجود باشد و به ازای هر ریختبری $\alpha \in Hom(A,B)$ ، ریختبری یکتایی مانند

$[T(\alpha) \in Hom(T(B),T(A))], T(\alpha) \in Hom(T(A),T(B))$

موجود باشد به‌طوریکه اصول زیر برقرار باشند:

(۱) اگر $I : A \to A$ یک ریختبری همانی در C_1 باشد، آن‌گاه $T(I) : T(A) \to T(A)$ یک ریختبری همانی در C_2 باشد.

(۲) اگر α و β ریختبری باشند و $\beta\alpha$ تعریف شده باشد، آن‌گاه $T(\beta\alpha) = T(\beta)T(\alpha)$ ، $[T(\beta\alpha) = T(\alpha)T(\beta)]$.

مثال ۲.۱.۱ فرض کنیم C یک کاتگوری باشد که اشیای آن، گروه‌های آزاد و ریختبری‌های آن، همریختی‌ها باشند. همچنین فرض کنیم S یک کاتگوری باشد که اشیای آن، مجموعه‌ها و ریختبری‌های آن، توابع باشند. A را مجموعه‌ای در S و $F(A)$ را نمایش گروه آزاد تولید شده بوسیله A در نظر می گیریم . به ازای هر تابع $\alpha : A \to B$ که در آن A و B اشیایی (=مجموعه‌هایی) در Sاند، فرض کنیم $F(\alpha) : F(A) \to F(B)$ نمایش همریختی از گروه آزاد $F(A)$ به $F(B)$ باشد که با توسیع نگاشت α به روش طبیعی به‌دست می آید. در این صورت F یک تابعگون همورد از S به C است.

تعریف ۱۲.۱.۱ حاصلضرب مستقیم و حاصلجمع مستقیم مدول‌ها: اگر $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از $R-$ مدول‌ها باشند. مجموعه تمام خانواده‌هایی مانند $\{m_i\}_{i\in I}$ که $\forall i \in I\ ;\ m_i \in M_i$ را با علامت $\prod\limits_{i\in I} M_i$ نمایش می‌دهیم که با تعریف جمع و ضرب اسکالر روی آن، $\prod\limits_{i\in I} M_i$ یک $R-$ مدول می‌شود که آن را حاصلضرب مستقیم $R-$ مدول‌های $\{M_i\}_{i\in I}$ نامند.

$$\{m_i\}_{i\in I} + \{m'_i\}_{i\in I} = \{m_i + m'_i\}_{i\in I} \quad (۱)$$

$$r\{m_i\}_{i\in I} = \{r.m_i\}_{i\in I} \quad (۲)$$

زیر مجموعه‌ای از $\prod\limits_{i\in I} M_i$ متشکل از عناصر به صورت $\{m_i\}_{i\in I}$ که در آن به جزء تعداد متناهی از m_iها، همگی صفرند را با $\oplus_{i\in I} M_i$ نشان می‌دهیم. $\oplus_{i\in I} M_i$ یک زیرمدول از $\prod\limits_{i\in I} M_i$ است که آن را حاصلجمع مستقیم مدول‌های $\{M_i\}_{i\in I}$ نامند.

تعریف ۱۳.۱.۱ CoKer f و CoIm f: فرض کنیم $f : A \to B$ یک همریختی مدول‌ها باشد، آن‌گاه: $CoKerf = \dfrac{B}{Imf}, \quad CoImf = \dfrac{A}{Kerf}$.

تعریف ۱۴.۱.۱ دنباله دقیق: دنباله $R-$ مدول‌ها مانند $\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \to \cdots$ را جاییکه f_i ها، $R-$همریختی هستند ،دقیق می‌نامیم، هرگاه به ازای هر n،

$$Im(f_n) = Ker(f_{n+1})$$

تعریف ۱۵.۱.۱ دیاگرام جابجایی: یک دیاگرام به صورت زیر از توابع را جابجایی گوییم هرگاه

$$gf = hk$$

(۱)

در ادامه به بیان قضیه‌ی اساسی در مورد ساختار مدول‌های با تولید متناهی روی یک حوزه ایده‌ال اصلی می‌پردازیم.

قضیه ۱.۱.۱ (ساختار[۱]) اگر D یک PID باشد، آن‌گاه هر $D-$ مدول با تولید متناهی یکریخت است با جمع مستقیمی از $D-$ مدول‌های دوری. یعنی به طور یکتا به فرم زیر تجزیه می‌شود.

$$(۱) \quad D^{\beta} \oplus (\oplus_{i=1}^{m} D/d_i D)$$

برای $d_i \in D$ و $\beta \in \mathbb{Z}$ به‌طوریکه $d_i | d_{i+1}$، به‌طور مشابه هر مدول مدرج M روی یک PID مدرج D به‌طور یکتا به فرم زیر تجزیه می‌شود:

$$(۲) \quad (\oplus_{i=1}^{n} D(\alpha_i)) \oplus \left(\oplus_{j=1}^{m} (D/d_j D)(\gamma_j)\right)$$

که در آن $d_j \in D$ عناصر همگنی هستند که $d_j | d_{j+1}$ و $\gamma_j \in \mathbb{Z}$ و α_i و $D(\alpha)$ نشان‌دهنده یک $\alpha-$ حرکت $(\alpha - shift)$ در درجه به بالا می‌باشد.

اثبات: رجوع شود به قضیه ۱.۱ ص ۵۷۵ در [۳۰].

[۱] structure

تعریف ۱۶.۱.۱ مجموعه چندگانه[۲]: به طور شهودی، یک مجموعه چند گانه، مجموعه‌ای است که عناصر آن ممکن است چندبار تکرار شده باشند. مانند $\{a,a,b,c\}$.

به طور رسمی، یک مجموعه‌ی چندگانه یک زوج (S,μ) است که در آن S مجموعه عناصر می‌باشد و $\mu : S \to N$، نگاشتی است که به هر عضو چندگانگی آن را نسبت می‌دهد.

$s \to \mu(s) = \max\{n|(s,n) \in (S,\mu), n \in \mathbb{N}\}$

اغلب یک مجموعه‌ی چندگانه را از طریق تئوری مجموعه‌ها به صورت زیر تعریف می‌کنند :

$$(S,\mu) = \{(s,\mu(s))|s \in S\}$$

به عنوان مثال برای مجموعه $\{a,a,b,c\}$ داریم: $\{(a,۲),(b,۱),(c,۱)\}$.

$(s,i) \in (S,\mu)$ اگر و فقط اگر $s \in S$ و $۱ \le i \le \mu(s)$.

تعریف ۱۷.۱.۱ رابطه‌ی $\lesssim$: برای $u,v \in \mathbb{N}^n$ ، می‌گوییم $u \lesssim v$ اگر به ازای $۱ \le i \le n$، داشته باشیم $u_i \le v_i$.

فرض کنیم (S,μ) یک مجموعه چندگانه باشد که در آن $S \subseteq \mathbb{N}^n$، آن‌گاه رابطه $\lesssim$ یک ترتیب شبه‌جزئی روی (S,μ) می‌باشد.

یعنی خاصیت بازتابی و تعدی را دارا است ولی خاصیت پادتقارنی را ندارد، زیرا هر عنصر با چندگانگی‌اش مشخص می‌شود.

تعریف ۱۸.۱.۱ تک‌جمله‌ای: یک تک‌جمله‌ای از $x_۱,\ldots,x_n$ یک حاصل‌ضرب به شکل $x_۱^{v_۱}.x_۲^{v_۲}.\ldots.x_n^{v_n}$ می‌باشد که در آن $v_i \in \mathbb{N} \bigcup ۰$. تک جمله‌ای فوق را با x^v نشان می‌دهیم که در آن $v = (v_۱,\ldots,v_n) \in \mathbb{N}^n$.

[۲] multiset

تعریف ۱۹.۱.۱ چند جمله‌ای چند متغیره: یک چند جمله‌ای f از $x_{۱},\ldots,x_n$ و با ضرایب در میدان K، یک ترکیب خطی متناهی از تک‌جمله‌ای‌هاست به شکل $f=\sum_V C_V x^V$ که $C_V\in K$، $V\in\mathbb{N}^n$.

ما مجموعه‌ی تمام چندجمله‌ای‌ها را با $K[x_{۱},\ldots,x_n]$ نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال $۵x_{۱}x_{۲}^{۲}-۷x_{۱}^{۳}\in K[x_{۱},x_{۲}]$: این چند جمله‌ای دو ضریب ناصفر دارد:

$C(۱,۲)=۵ \quad , \quad C(۳,۰)=-۷$

تعریف ۲۰.۱.۱ حلقه $n-$ مدرج: یک حلقه $n-$ مدرج یک حلقه R است که به یک ترکیب از گروه‌های آبلی مجهز شده است، یعنی $R\simeq\oplus_V R_V;\ V\in\mathbb{N}^n$ به‌طوریکه ضرب دارای خاصیت زیر است: $R_U.R_V\subseteq R_{U+V}$.

یک مثال حلقه‌های $n-$ مدرج حلقه چندجمله‌ای‌ها روی میدان K می‌باشد. $A_n=K[x_{۱},\ldots,x_n]$، که در آن

$A_V=Kx^V;\quad V\in\mathbb{N}^n$

می‌توان حلقه ۲$-$ مدرج $A_{۲}$ را روی شبکه صحیح $\mathbb{N}^{۲}$ به تصویر کشید. همانطور که چندجمله‌ای $۵x_{۱}x_{۲}^{۲}-۷x_{۱}^{۳}$ در شکل زیر نشان داده شده است. در شکل زیر، هر گلوله نشان دهنده یک درجه است که شامل عنصری از میدان K می‌باشد. چندجمله‌ای مذکور دو عنصر غیر صفر در درجه‌های $(۱,۲)$ و $(۳,۰)$ دارد.

(۲) $۵x_{۱}x_{۲}^{۲}-۷x_{۱}^{۳}$

تعریف ۲۱.۱.۱ مدول $n-$ مدرج: یک مدول $n-$ مدرج روی یک حلقه $n-$ مدرج R، یک گروه آبلی M است که به یک ترکیب $M \simeq \oplus_V M_V;\ V \in \mathbb{N}^n$ مجهز شده است به همراه یک ساختار $R-$ مدولی به شکل زیر:

$$R_U.M_V \subseteq M_{U+V}$$

۲.۱ مفاهیم توپولوژی جبری

تعریف ۱.۲.۱ مجتمع سادکی [1]: یک مجموعه K به همراه گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های K مانند S ، را یک مجتمع سادکی نامند، به‌طوریکه

(۱) $\forall V \in K; \{V\} \in S$

(۲) $\tau \subseteq \sigma \in S \Rightarrow \tau \in S$

یک مجتمع سادکی را به اختصار با (K,S) یا K نمایش می دهیم .مجموعه $\{V\}$ را رئوس K نامند.

تعریف ۲.۲.۱ $k-$ سادک: $\sigma \in S$ را یک $k-$ سادک از بعد k نامند هرگاه $|\sigma| = k + ۱$.

[1] Simplicial Complex

تعریف ۳.۲.۱ وجه و هم‌وجه: اگر $\tau \subseteq \sigma \in S$، آن‌گاه τ را یک وجه σ و σ را یک هم‌وجه τ نامند.

تعریف ۴.۲.۱ جهت یک $k-$ سادک: فرض کنیم $\sigma = \{V_۰, \dots, V_k\}$ یک $k-$ سادک باشد.
رابطه هم‌ارزی " $\sim$ " روی مجموعه رئوس مرتب شده σ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$(V_۰, \dots, V_k) \sim (V_{\tau(۰)}, \dots, V_{\tau(k)}) \Leftrightarrow \text{sign } \tau = ۱$ جایگشتی باشد که τ

هر کلاس هم‌ارزی ، یک جهت σ نام دارد.یک سادک جهت دار را با $[\sigma]$ نشان می دهیم.

مثال ۱.۲.۱ اگر فرض کنیم $\sigma = \{V_۰, V_۱, V_۲\}$ یک ۲$-$ سادک باشد، حال تعداد جایگشت‌ها برای $\{۰, ۱, ۲\}$ برابر با !۳ است.

$S_۳ = \{id, (۰\ ۱), (۰\ ۲), (۱\ ۲), (۰\ ۱\ ۲), (۰\ ۲\ ۱)\}$

اما $(۰\ ۲\ ۱), (۰\ ۱\ ۲)$ و id جایگشت‌های زوج هستند و $(۰\ ۱), (۰\ ۲)$ و $(۱\ ۲)$ جایگشت‌های فرد می‌باشند.

حال دو جهت σ را مشخص می‌کنیم. فرض کنید $\tau_۱ = id$ ، $\tau_۲ = (۰\ ۱\ ۲)$ و $\tau_۳ = (۰\ ۲\ ۱)$.

$$\begin{aligned}
(۱) \quad [\sigma] &= [(V_۰, V_۱, V_۲)] = \Big\{(V_{\tau_۱(۰)}, V_{\tau_۱(۱)}, V_{\tau_۱(۲)}), (V_{\tau_۲(۰)}, V_{\tau_۲(۱)}, V_{\tau_۲(۲)}), (V_{\tau_۳(۰)}, V_{\tau_۳(۱)}, V_{\tau_۳(۲)}\Big\} \\
&= \{(V_۰, V_۱, V_۲), (V_۱, V_۲, V_۰), (V_۲, V_۰, V_۱)\} \\
(۲) \quad [\sigma] &= [(V_۱, V_۰, V_۲)] = \Big\{(V_{\tau_۱(۱)}, V_{\tau_۱(۰)}, V_{\tau_۱(۲)}), (V_{\tau_۲(۱)}, V_{\tau_۲(۰)}, V_{\tau_۲(۲)}), (V_{\tau_۳(۱)}, V_{\tau_۳(۰)}, V_{\tau_۳(۲)}\Big\} \\
&= \{(V_۱, V_۰, V_۲), (V_۲, V_۱, V_۰), (V_۰, V_۲, V_۱)\}
\end{aligned}$$

تعریف ۵.۲.۱ مستقل آفینی: یک مجموعه $\{a_۰, \dots, a_n\}$ از نقاط در $\mathbb{R}^N$ را در نظر می گیریم .
این مجموعه ، مستقل آفینی نام دارد هر گاه برای هر اسکالر $t_i \in \mathbb{R}$ ، معادلات $\sum_{i=۰}^{n} t_i = ۰, \sum_{i=۰}^{n} t_i a_i = ۰$