بسم الله الرحمن الرحیم

بسم الله الرحمن الرحیم هست کلید در گنج حکیم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر ـ بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی‌ارشد ریاضی

تحت عنوان:

بهترین تقریب درونیاب در فضاهای خطی نرمدار

استاد راهنما:

دکتر حسین محبی

مؤلف:

ذبیح‌اله معارف‌وند

تیرماه ۱۳۸۰

بسمه تعالی

این پایان‌نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی‌ارشد

به

بخش ریاضی ـ دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : ذبیح‌اله معارف وند

استاد راهنما: دکتر حسین محبی

داور ۱ : دکتر عباس سالمی

داور ۲ : دکتر محمدعلی ولی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: آقای دکتر ناصح‌زاده

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی

سپاس بر دادار هرمزد با شکوه، فرهمند، همه‌ـآگاه، دانا، توانا، دارندهٔ برترین اندیشهٔ نیک، گفتار نیک و کردار نیک در اندیشه و گفتار و کردار که این بندهٔ خود را توفیق کسب دانش عطا فرمود.

پیش از هرچیز فریضهٔ خود می‌دانم که از پدر و مادر عزیز و برادران و خواهران خوبم که در دوران تحصیل همه‌گونه آسایش را برایم فراهم نمودند صمیمانه سپاسگزاری کنم. بویژه مایلم سپاس ژرف خود را نسبت به همهٔ استادان فرزانه‌ام که از محضرشان کسب فیض نموده‌ام بویژه دکتر حسین محبی، دکتر عباس سالمی، دکتر محمدعلی ولی برنویسم:

ـ دکتر محبی با تیزبینی دانشی (و دوراندیشی فرهنگی) خود زحمت راهنمایی مرا در به انجام رساندن این پایان‌نامه برخود روا داشتند.

ـ دکتر سالمی و دکتر ولی که با نکته‌سنجی و کارآگاهی تیز و برّای خود داوری این پایان‌نامه را قبول فرمودند.

همچنین از خانم مانی که تایپ و صفحه‌آرایی پایان‌نامه را با دقتی شگفت‌انگیز و فراسوی ماشین انجام دادند و در عمل ثابت کردند که می‌توان بر ماشین چیره بود و از کمک بی‌دریغ خانم باقری در تایپ قسمتهایی از پایان‌نامه بسی سپاسگزارم.

ذبیح‌اله معارف‌وند

تیرماه ۱۳۸۰

چکیده

در این پایان‌نامه نظریهٔ بهترین تقریب با قید درونیابی از یک زیرفضای متناهی‌البعد M از یک فضای خطی نرمدار X را توسعه می‌دهیم. در حالت خاص، برای هر $x \in X$، بهترین تقریبها را در زیرمجموعهٔ $M(x)$ از M که به نقطهٔ x که تقریب زده می‌شود بستگی دارد جستجو می‌کنیم. نشان می‌دهیم که مسألهٔ تقریب پارامتری ذاتاً می‌تواند به حالت مرسومی که مستلزم یک زیرفضای ثابت ویژهٔ M_0 از M است تبدیل شود. نتایج مفصلتر و بیشتر را وقتی که (۱) X یک فضای هیلبرت است یا (۲) M یک زیرفضای درونیاب از X است به دست می‌آوریم.

فهرست

فصل ۱

مقدمات

فرض کنیم G زیرمجموعه‌ای از فضای خطی نرمدار E باشد. برای عنصر $x \in E$، مجموعهٔ بهترین تقریب‌های x از G را چنین تعریف می‌کنیم

$$P_G(x) := \{y \in G : \|x - y\| = d(x, G)\}$$

که در آن

$$d(x, G) := \inf_{y \in G} \|x - y\| \cdot$$

برای هر زیرفضای خطی G از فضای خطی نرمدار E داریم

$$P_G(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in G \\ \emptyset & , \quad x \in \overline{G} \backslash G \end{cases} \qquad (۱\_۱)$$

اگر $x \in G$، بوضوح $P_G(x) = \{x\}$. حال با برهان خلف فرض کنیم $x \in \overline{G} \backslash G$ و $P_G(x) \neq \emptyset$.

لذا عنصر $y \in P_G(x)$ موجود است که طبق تعریف $y \in G$ و

$$\|x - y\| = \inf_{z \in G} \|x - z\| \cdot \qquad (۲\_۱)$$

چون $y \neq x$، $\|x - y\| > ۰$ و چون $x \in \overline{G}$، عنصری مانند $x_n \in G$ موجود است به طوری که

$$\|x - x_n\| < \|x - y\| \cdot$$

و این با (۱_۲) تناقض دارد. بنابراین، $P_G(x) = \emptyset$.

۱_۱ قضیه. فرض کنیم E یک فضای خطی نرمدار، G زیرفضایی خطی از E، $x \in E \backslash \overline{G}$ و $y_۰ \in G$. در اینصورت $y_۰ \in P_G(x)$ اگر و تنها اگر $f \in E^*$ موجود باشد به طوری که

$$\|f\| = ۱ \ ,$$

$$f(y) = ۰ \ , \qquad (y \in G) \qquad\qquad (۱\_۳)$$

$$f(x - y_۰) = \|x - y_۰\| \ \cdot$$

برهان. فرض کنیم $y_۰ \in P_G(x)$. در اینصورت چون $x \in E \backslash \overline{G}$، $\|x - y_۰\| = d(x, G) > ۰$.

حال طبق نتیجه‌ای از قضیهٔ هان‌ـباناخ [۳؛ نتیجهٔ ۶ـ۸، ص.۸۲] $f_۰ \in E^*$ موجود است به طوری که

$$f_۰(x) = ۱ \quad , \quad f_۰(y) = ۰ \quad (y \in G) \quad , \quad \|f_۰\| = \frac{۱}{\|x - y_۰\|} \ \cdot$$

بنابراین تابعک خطی $f = \|x - y_۰\| f_۰$ در شرایط (۱ـ۳) صدق می‌کند.

برعکس، فرض کنیم $f \in E^*$ وجود دارد که در شرایط (۱ـ۳) صدق می‌کند. در اینصورت برای هر $y \in G$ داریم:

$$\|x - y_۰\| = |f(x - y_۰)| = |f(x)| = |f(x - y)| \leq \|f\| \|x - y\| = \|x - y\|$$

که از آنجا $y_۰ \in P_G(x)$. ■

۱ـ۲ نتیجه. فرض کنیم E یک فضای خطی نرمدار، G زیرفضایی خطی از E، $x \in E \backslash \overline{G}$ و $M \subset G$. در اینصورت $M \subset P_G(x)$ اگر و تنها اگر $f \in E^*$ موجود باشد به طوری که

$$\|f\| = ۱ \ ,$$

$$f(y) = ۰ \quad , \quad (y \in G)$$

$$f(x - y_۰) = \|x - y_۰\| \quad , \quad (y_۰ \in M) \ \cdot$$

برهان. این به سادگی از قضیهٔ ۱ـ۱ و این حقیقت که به ازای هر زوج $y_۱, y_۲ \in M \subset P_G(x)$، $\|x - y_۱\| = \|x - y_۲\| (= d(x, G))$، نتیجه می‌شود. ■

۱ـ۳ **تعریف.** زیرمجموعهٔ (زیرفضای) G از فضای خطی نرمدار E را **تقریبی** proximinal (**چبیشف** chebyshev) گوئیم اگر به ازای هر $x \in E$، مجموعهٔ $P_G(x)$ ناتهی (تک عنصری) باشد.

۱ـ۴ **تعریف.** زیرفضای خطی G از فضای خطی نرمدار E را یک **زیرفضای نیم‌چبیشف** semi-chebyshev subspace گوئیم اگر برای هر $x \in E$، مجموعهٔ $P_G(x)$ حداکثر شامل یک عنصر باشد.

بنابراین G یک زیرفضای چبیشف است اگر هم تقریبی و هم نیم‌چبیشف باشد؛ یعنی، برای هر $x \in E$، مجموعهٔ $P_G(x)$ دقیقاً شامل یک عنصر باشد.

۱ـ۵ **قضیه.** فرض کنیم K مجموعه‌ای فشرده در فضای متری X باشد. به ازای هر نقطهٔ $p \in X$، نقطه‌ای در K موجود است که فاصله‌اش تا p کمینه می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $\delta = \inf\{d(p,x) : x \in K\}$. بنابر تعریف اینفیمم، دنبالهٔ $\{x_n\} \subset K$ موجود است به طوری که $\lim\limits_{n\to\infty} d(p,x_n) = \delta$. بنابر فشردگی K، فرض می‌کنیم که این دنباله، یا در صورت لزوم زیردنباله‌ای از آن، به نقطه‌ای چون $x^* \in K$ همگرا است. داریم

$$d(p,x^*) \leq d(p,x_n) + d(x_n,x^*) \ .$$

سمت چپ این نامساوی مستقل از n و سمت راست آن وقتی $n \to \infty$، به δ نزدیک می‌شود. در نتیجه $d(p,x^*) \leq \delta$. چون $x^* \in K$، بنابر تعریف δ، $\delta \leq d(p,x^*)$ و بنابراین $d(p,x^*) = \delta$ که نشان می‌دهد فاصلهٔ $x^* \in K$ تا p کمینه می‌باشد. ■

۱ـ۶ **قضیه.** هر زیرفضای خطی متناهی‌البعد از یک فضای خطی نرمدار، تقریبی است.

برهان. فرض کنیم E یک فضای خطی نرمدار و G یک زیرفضای خطی متناهی‌البعد از آن باشد.

همچنین فرض کنیم $x \in E$ و $y_\circ$ نقطه‌ای دلخواه در G باشد. مجموعهٔ

$$A = \{y \in G : \|x-y\| \leq \|x-y_\circ\|\}$$

مجموعه‌ای بسته و کراندار در فضای متناهی‌البعد G و لذا فشرده می‌باشد. حال طبق قضیهٔ ۱ـ۵، A شامل عنصری چون y^* است که فاصله‌اش تا x کمینه می‌باشد لذا $y^* \in P_G(x)$. بنابراین G تقریبی است. ■

فرض کنیم E یک فضای خطی نرمدار باشد. برای $x \in E$ و $r \geq \circ$، فرض کنیم

$$\begin{aligned} S(x,r) &:= \{y \in E : \|y-x\| \leq r\} \\ Fr_m S(x,r) &:= \{y \in E : \|y-x\| = r\} \\ Int_m S(x,r) &:= \{y \in E : \|y-x\| < r\} \cdot \end{aligned}$$

۱ـ۷ لم. فرض کنیم E فضایی متری، $G \subset E$ و $x \in E$. در اینصورت

$$P_G(x) = G \cap S(x, d(x,G)) = G \cap Fr_m S(x, d(x,G)) \cdot \tag{۴ـ۱}$$

برهان. بنابر تعریف $P_G(x)$ و $d(x,G)$ روابط شمول زیر واضح می‌باشند

$$P_G(x) \subset G \cap Fr_m S(x, d(x,G)) \subset G \cap S(x, d(x,G)) \cdot \tag{۵ـ۱}$$

برعکس، فرض کنیم $g_\circ \in G \cap S(x, d(x,G))$. در نتیجه داریم

$$d(x,G) = \inf_{g \in G} \|x-g\| \leq \|x-g_\circ\| \leq d(x,G)$$

و بنابراین $\|x-g_\circ\| = d(x,G)$؛ یعنی، $g_\circ \in P_G(x)$. لذا $G \cap S(x, d(x,G)) \subset P_G(x)$، که با (۱ـ۵)، برهان را کامل می‌کند. ■

آخرین تساوی در (۱ـ۴) همارز تساوی زیر می‌باشد

$$G \cap Int_m S(x, d(x,G)) = \emptyset \cdot$$

زیرا فرض کنیم $G \cap S(x, d(x,G)) = G \cap Fr_m S(x, d(x,G))$ و همچنین $g_\circ \in G \cap Int_m S(x, d(x,G))$ لذا $d(x,G) \leq \|x - g_\circ\| < d(x,G)$ که تناقض است. بنابراین $G \cap Int_m S(x, d(x,G)) = \emptyset$.

برعکس، فرض کنیم $G \cap Int_m S(x, d(x,G)) = \emptyset$. لذا

$$\begin{aligned} G \cap S(x, d(x,G)) &= G \cap [Int_m S(x, d(x,G)) \cup Fr_m S(x, d(x,G))] \\ &= G \cap Fr_m S(x, d(x,G)) \cdot \end{aligned}$$

۱ـ۸ قضیه. فرض کنیم E یک فضای متری، $G \subset E$ و $x \in E$. در اینصورت

(الف) $P_G(x)$ کراندار می‌باشد.

(ب) اگر G بسته باشد، $P_G(x)$ نیز بسته است.

(ج) اگر G محدب باشد، $P_G(x)$ نیز محدب است.

برهان. قسمتهای (الف) و (ب) نتیجهٔ بدیهی لم ۱ـ۷ می‌باشند. برای اثبات (ج)، فرض کنیم z و y عناصر دلخواهی در $P_G(x)$ باشند و $\circ < \lambda < ۱$. در این صورت $\|x-y\| = \|x-z\| = d(x,G)$ و

$$\begin{aligned} \|x - [\lambda y + (۱-\lambda) z]\| &= \|\lambda(x-y) + (۱-y)(x-z)\| \\ &\leq \lambda\|x-y\| + (۱-\lambda)\|x-z\| \\ &= d(x,G) \end{aligned}$$

حال چون G محدب است، $\lambda y + (۱ - \lambda)z \in G$ و در نتیجه

$$\|x - [\lambda y + (۱ - \lambda)z]\| = d(x, G)$$

یعنی $\lambda y + (۱ - \lambda)z \in P_G(x)$. بنابراین $P_G(x)$ محدب می‌باشد. ■

مجموعهٔ M در یک فضای خطی (حقیقی یا مختلط) توپولوژیکی L را یک **زیرمجموعهٔ نهایی** extremal subset از مجموعهٔ بستهٔ محدب A گوئیم اگر

(الف) M یک زیرمجموعهٔ بستهٔ محدب از A باشد؛

(ب) همراه هر نقطه درونی از یک پاره‌خط در A، M شامل تمام پاره‌خط باشد؛ یعنی، اگر $x, y \in A$، $۰ < \lambda < ۱$ و $\lambda x + (۱ - \lambda)y \in M$ آنگاه $x, y \in M$.

یک زیرمجموعهٔ نهایی از A که شامل تنها یک عنصر باشد (یعنی، یک نقطه از A که نقطه درونی هیچ پاره‌خطی از A نیست) را یک **نقطهٔ نهایی** از A گوئیم. مجموعهٔ نقاط نهایی A را با $ext(A)$ نمایش می‌دهیم.

۱ـ۹ تعریف. فضای خطی نرمدار E را یک **فضای اکیداً محدب** strictly convex space گوئیم اگر روابط $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ و $x, y \in E \backslash \{۰\}$ وجود یک $c > ۰$ را ایجاب کنند به طوری که $y = cx$.

۱ـ۱۰ تعریف. فرض کنیم E یک فضای خطی نرمدار باشد. عنصر $x \in E$ را یک **عنصر بیشینه** maximal element از $f \in E^*$ گوئیم اگر $f(x) = \|f\| \, \|x\|$ و عنصر $x \in E$ را یک **عنصر نرمال**

normal element گوئیم اگر برای آن تنها یک $f \in E^*$ موجود باشد به طوری که

$$\|f\| = ۱ \quad , \quad f(x) = \|x\| \cdot$$

هر عنصر نرمال، عنصری بیشینه است ولی هر عنصر بیشینه لزوماً عنصری نرمال نمی‌باشد.

۱ـ۱۱ تعریف. فضای خطی نرمدار E را یک **فضای هموار** smooth space گوئیم اگر هر عنصر با نرم ۱ در E، نرمال باشد؛ یعنی، برای هر $x \in E$ با شرط $\|x\| = ۱$ تنها یک $f \in E^*$ موجود باشد به طوری که

$$\|f\| = ۱ \quad , \quad f(x) = ۱ \cdot$$

۱ـ۱۲ تعریف. مجموعهٔ V در یک فضای خطی نرمدار E را یک **منیفلد خطی** linear manifold گوئیم اگر $V = x_\circ + G = \{x_\circ + g | g \in G\}$ که در آن $x_\circ \in E$ و G یک زیرفضای خطی از E می‌باشد.

۱ـ۱۳ تعریف. برای یک مجموعهٔ ناتهی محدب دلخواه A در یک فضای خطی E، منیفلد خطی تولید شده توسط A یعنی، $\{\alpha y + (۱ - \alpha)z | y, z \in A \ , \ \alpha = \text{اسکالر}\}$ را با $l(A)$ نمایش می‌دهیم.

برای هر عنصر ثابت $y \in A$، مجموعهٔ $l(A) - y = \{x - y | x \in l(A)\}$ نیز یک زیرفضای خطی از E است که در شرط زیر صدق می‌کند

$$l(A) - y = l(A - y) \cdot$$