بسم‌الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش جبر

عنوان:

بعدهای یک‌دست همولوژیکی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا نقی‌پور

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا ریسمانچیان

توسط:

سمیه قهرمان

دی‌ماه ۱۳۹۰

کلیه حقوق مادی مرتبط و نتایج
مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی
از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به
دانشگاه شهرکرد است.

این مجموعه کوچک و ناقابل را به پاس عاطفه سرشار و محبت بی‌دریغی که هیچ‌گاه فروکش نخواهد کرد به مهربان‌ترین کسان خویش یعنی خانواده عزیز و ارجمندم به خصوص

پدر و مادر گرامی،

همسر فداکار،

برادران و خواهرانم،

تقدیم می‌دارم.

تشکر و قدردانی

حمد بی‌پایان خداوند منان را که ما را لایق معلمانی دانسته که عظمت آنان بی‌منتها، هدایتشان بی‌نظیر و همنوایی با آنان سعادت است.

در پایان این مرحله از تحصیل برخود واجب می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اسطوره‌های محبت و مهربانی پدر و مادر عزیزم صمیمانه تشکر کنم. از همسر خوب و مهربانم که در طی مراحل این پایان‌نامه همواره پشتوانه و مشوقم بودند، کمال تشکر را دارم.

از استاد بزرگوار، جناب آقای **دکترعلیرضا نقی‌پور** ، که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا قدم به قدم تا به انجام رسانیدن این پروژه هدایت کردند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌کنم.

و جا دارد از استاد بزرگوار، جناب آقای **دکترمحمدرضا ریسمانچیان** ، که با راهنمایی‌ها و مساعدت‌های عالمانه خود، راه‌گشای این پژوهش گشتند، سپاسگزاری کنم.

از استادان محترم و فرهیخته گروه ریاضی، آقایان: دکتررضایی‌زاده، دکترحسامی، دکتر غلامی و خانم دکتر افتخاری، که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام، تشکر و قدردانی می‌گردد. امیدوارم که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

در نهایت، از تمام کسانی که در عرصه‌های مختلف زندگی با کمک‌ها و راهنمایی‌هایشان مرا همراهی کرده‌اند، سپاسگزارم و برای همه این بزرگواران سلامتی، طول عمر باعزت و پیروزی و شادکامی آرزومندم.

سمیه قهرمان

چکیده

بعد اشتراک کامل، $\mathrm{CI}\text{-}\dim_R M$ و بعد کوهن مکالی، $\mathrm{CM}\text{-}\dim_R M$ که برای مدول متناهی مولد M روی حلقه‌ی موضعیR تعریف شده‌اند، قابل تعمیم به مدول‌های از نوع نامتناهی نیستند. در این پایان‌نامه برای مدول‌هایی که لزوماً متناهی مولد نیستند بعدهایی را تعریف می‌کنیم (بعد یک‌دست اشتراک کامل (CIfd) و بعد یک‌دست کوهن مکالی (CMfd)) که برای مدول‌های متناهی مولد، این بعدها با بعدهای کلاسیک متناظر برابر است.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

مجموعه اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
هسته	Ker
بعد حلقه R	$\dim R$
بعد R—مدول M	$\dim_R M$
بعد تزریقی R—مدول M	$\mathrm{id}_R M$
بعد تصویری R—مدول M	$\mathrm{pd}_R M$
بعد یک‌دست R—مدول M	$\mathrm{fd}_R M$
بعد یک‌دست محدود شده مدول M	$\mathrm{Rfd}_R M$
عمق R—مدول M	$\mathrm{depth}_R M$
n— امین مدول همولوژی همبافت A	$\mathrm{H}_n(A)$
بعد اشتراک کامل R—مدول M	$\mathrm{CI\text{-}dim}_R M$
بعد یک‌دست اشتراک کامل R—مدول M	$\mathrm{CIfd}_R M$
بعد تزریقی اشتراک کامل R—مدول M	$\mathrm{CIi}_R M$
بعد کوهن مکالی R—مدول M	$\mathrm{CM\text{-}dim}_R M$
بعد یک‌دست کوهن مکالی R—مدول M	$\mathrm{CMfd}_R M$
بعد تزریقی کوهن مکالی R—مدول M	$\mathrm{CMid}_R M$
بعد گرنشتاین R—مدول M	$\mathrm{G\text{-}dim}_R M$
بعد یک‌دست گرنشتاین R—مدول M	$\mathrm{Gfd}_R M$
بعد تزریقی گرنشتاین R—مدول M	$\mathrm{Gid}_R M$
طول دنباله‌ی M—منظم ماکسیمال در $\mathfrak{p}$	$\mathrm{grade}(\mathfrak{p}, M)$

پیشگفتار

انگیزه‌ی مهم مطالعه‌ی بعدهای همولوژیکی به‌سال ۱۹۵۶برمی گردد؛ زمانی که اسلاندر[۱]، بکسبام[۲] و سر[۳] قضیه‌ی زیر را اثبات کردند.

قضیه: یک حلقه‌ی موضعی نوتری جابجایی، منظم است اگر و فقط اگر میدان مانده‌ای k، و همه‌ی $R-$مدول‌ها، بعد تصویری متناهی داشته باشند.

این قضیه نشان می‌دهد که متناهی بودن بعد همولوژیکی برای همه‌ی مدول‌ها، حلقه‌ها را با خواص مشخص از یکدیگر تفکیک می‌کند.

اسلاندر و بریدگر[۴] [۴] در سال ۱۹۶۹ بعد همولوژیکی خاصی را برای مدول‌های روی حلقه‌های گرنشتاین[۵] معرفی کردند وآن را بعد گرنشتاین نامیدند و با G-dim نشان دادند که یک تظریف از بعد تصویری است. همچنین نشان دادند که حلقه‌ی نوتری موضعی $(R, \mathfrak{m}, k)$ گرنشتاین است اگر و فقط اگر میدان مانده‌ای k و همه‌ی $R-$مدول‌های متناهی مولد بعد گرنشتاین متناهی داشته باشند.

این پایان‌نامه با بعدهای همولوژیکی برای مدول‌هایی نه‌لزوماً متناهی مولد روی حلقه‌های موضعی نوتری جابجایی یکدار $(R, \mathfrak{m}, k)$ سر و کار دارد. برای هر $R-$مدول M، بعد یک‌دست M روی حلقه‌ی R با $\mathrm{fd}_R M$ نشان داده می‌شود و اغلب نامساوی $\mathrm{fd}_R M \leq \mathrm{pd}_R M$ برقرار است و اگر M متناهی مولد باشد تساوی برقرار است، که در این جا $\mathrm{pd}_R M$ نمایشگر بعد تصویری است. یک نتیجه‌ی منسوب به گراسون–راینود[۶] [۲۹] و جنسون[۷] [۲۵] نشان می‌دهد که $R-$مدول‌های یک‌دست بعد تصویری متناهی دارند و بنابراین بعد تصویری و بعد یک‌دست مدول هم زمان با هم متناهی می‌شوند.

---

[۱] Auslander

[۲] Buchsbaum

[۳] Serre

[۴] Bridger

[۵] Gorenstein

[۶] Gruson-Raynaud

[۷] Jensen

لذا به‌نظر می‌رسد که بعد یک‌دست یک مدول تعمیم مناسبی از بعد تصویری برای مدول‌های نامتناهی است.

کریستنسن[8]، فاکسبی [9] و فرنکیلد[10] [۱۳] در سال ۲۰۰۲ بعد محدود شده‌ی بزرگی را مطرح کردند که با Rfd نشان داده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Rfd}_R M = \sup\{\mathrm{i} | \mathrm{Tor}_i^R(L, M) \neq 0; \mathrm{fd}_R L < \infty\}.$$

آن‌ها نشان دادند که برای همه‌ی R−مدول‌های M، نامساوی $\mathrm{Rfd}_R M \leq \mathrm{fd}_R M$ برقرار است و اگر $\mathrm{fd}_R M < \infty$ تساوی برقرار است.

ایناکس[11] و جندا [12] در [۱٦و۱۷] نیز بعد یک‌دست گرنشتاین را برای هر R−مدول M مطرح کردند و با $\mathrm{Gfd}_R M$ نشان دادند.

یک R−مدول M، یک‌دست گرنشتاین است اگر و فقط اگر دنباله‌ی دقیق

$$\ldots \to F^{-۱} \to F^{۰} \to F^{۱} \to \ldots$$

از R−مدول‌های یک‌دست وجود داشته باشد به‌طوری‌که $M = \mathrm{Ker}(F^{۰} \to F^{۱})$ و برای هر R−مدول تزریقی I، $I \otimes_R -$ دقیق بودن زنجیر بالا را حفظ کند. یادآوری می‌کنیم که بعد یک‌دست گرنشتاین برای مدول‌های یک‌دست گرنشتاین به‌سبکی مشابه بعد یک‌دست تعریف می‌شود و برای یک R−مدول متناهی M،

$$\mathrm{Gfd}_R M = \text{G-dim}_R M.$$

هلم [13] در [۱۹] این مفهوم را بیشتر مطالعه کرد و اثبات کرد که برای هر R−مدول M، رشته‌ی نامساوی‌های زیر وجود دارد؛

[8] Christensen
[9] Foxby
[10] Frankild
[11] Enochs
[12] Jenda
[13] Holm

$$\mathrm{Rfd}_R M \leq \mathrm{Gfd}_R M \leq \mathrm{fd}_R M,$$

و اگر یکی از این مقادیر متناهی باشد، آن‌گاه در سمت چپش تساوی برقرار است.

هدف عمده‌ی این پایان‌نامه معرفی و مطالعه‌ی بعد یک‌دست اشتراک کامل (CIfd) و بعد یک‌دست کوهن مکالی (CMfd) به‌عنوان تظریفی از بعدهای یک‌دست برای هر $R-$مدول M روی حلقه‌ی نوتری R است.

در فصل ۲ به‌وسیله‌ی قضیه‌ی زیر به‌مقایسه‌ی بعدهای یک‌دست گرنشتاین و بعد یک‌دست اشتراک کامل می‌پردازیم.

قضیه الف: فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. در این صورت نامساوی زیر وجود دارد؛

$$\mathrm{Gfd}_R M \leq \mathrm{CIfd}_R M,$$

واگر CIfd متناهی باشد، آن‌گاه تساوی برقرار است.

با توجه به قضیه‌ی بالا دنباله‌ی نامساوی‌های زیر وجود دارد؛

$$\mathrm{Rfd}_R M \leq \mathrm{CMfd}_R M \leq \mathrm{Gfd}_R M \leq \mathrm{CIfd}_R M \leq \mathrm{fd}_R M,$$

و اگر یکی از این بعدها متناهی باشد،آن‌گاه آن بعد برابر با بعدهای سمت چپش است.

بعد از مقایسه‌ی بعدهای یک‌دست به‌معرفی و مطالعه‌ی نوعی از تظریف‌های بعد یک‌دست یعنی بعد یک‌دست کوهن مکالی بالایی و بعد یک‌دست گرنشتاین بالایی برای هر مدول M روی حلقه‌ی نوتری R، می‌پردازیم و لذا دنباله‌ی نامساوی‌های زیر وجود دارد؛

$$\mathrm{Rfd}_R M \leq \mathrm{CM^*fd}_R M \leq \mathrm{G^*fd}_R M \leq \mathrm{CIfd}_R M \leq \mathrm{fd}_R M,$$

و اگر یکی از این بعدها متناهی باشد،آن‌گاه آن بعد برابر با بعدهای سمت چپش است.

بعدهای یک‌دست همولوژیکی جدید از هر جهت شبیه به‌بعدهای یک‌دست همولوژیکی کلاسیک هستند. مثالی که از بعدهای یک‌دست همولوژیکی می‌تواند سودمند باشد قضیه‌ی اشتراکی برای بعدهای یک‌دست همولوژیکی است که در فصل ۲ به‌صورت زیر مطرح می‌شود.

قضیه‌ب: فرض کنیم M یک $R-$مدول، $\mathrm{Hfd}_R M < \infty$ و عمق متناهی و R یک حلقه‌ی صفر هم مشخصه باشد. دراین صورت داریم:

$$\dim R \leq \dim_R M + \mathrm{Hfd}_R M,$$

برای $\mathrm{H} = \mathrm{CI}, \mathrm{G}^*, \mathrm{CM}^*$. فرمول اسلاندر—بکسبام ادعا می‌کند اگر یک $R-$مدول متناهی مولد M بعد تصویری متناهی داشته باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{depth}_R M + \mathrm{pd}_R M = \mathrm{depth} R.$$

اسلاندر در [۲] برای دومین بار این فرمول را برای M و یک $R-$مدول متناهی مولد N تولید کرد. در حقیقت او نشان داد که برای $\mathrm{s} = \sup\{\mathrm{i} | \mathrm{Tor}_R^i(M,N) \neq 0\}$ اگر $\mathrm{s}=0$ یا $\mathrm{depth}_R \mathrm{Tor}_s^R(M,N) \leq 1$ آن‌گاه

$$s = depth R - depth_R M - depth_R N + depth_R Tor_i^R(M,N). \qquad (۱)$$

به‌طور کلی تر می‌گوئیم که فرمول depth برای M و N برقرار است اگر s متناهی و(۱) برقرار باشد. بنابراین درفصل ۳ نتیجه‌ی زیر که مشابه قضیه‌ی اسلاندر برای CIfd است اثبات می‌شود.

قضیه‌پ: فرض کنیم M و N، $R-$مدول‌هایی باشند که $\mathrm{CIfd}_R M < \infty$ است. اگر s متناهی باشد آن‌گاه

$$s \geq \mathrm{depth} R - \mathrm{depth}_R M - \mathrm{depth}_R N,$$

و حالت تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\mathrm{depth}_R \mathrm{Tor}_s^R(M,N) = 0$.

در ادامه به اثبات خواص اساسی بعدهای یک‌دست همولوژیکی برای مدول‌های متناهی مولد می‌پردازیم و سپس بعدهای تزریقی همولوژیکی گوناگونی برای مدول‌ها روی حلقه‌های نوتری یعنی بعد تزریقی کوهن مکالی، بعد تزریقی کوهن مکالی بالایی، بعد تزریقی گرنشتاین بالایی و بعد تزریقی اشتراک کامل را شرح می‌دهیم. این بعدها در نامساوی زیر صدق می‌کنند.

$$\mathrm{Chid}_R M \leq \mathrm{CMid}_R M \leq \mathrm{CM}^*\mathrm{id}_R M \leq \mathrm{G}^*\mathrm{id}_R M \leq \mathrm{CIid}_R M \leq \mathrm{id}_R M,$$

که

$$\mathrm{Chid}_R M = \sup\{\mathrm{depth} R_{\mathfrak{p}} - \mathrm{width}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} | \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

یادآوری می‌کنیم که

$$\mathrm{width}_R M = \inf\{\mathrm{i} | \mathrm{Tor}_i^R(M,k) \neq 0\}.$$

طبیعی است که بررسی کنیم چه موقع بعدهای یک‌دست همولوژیکی در فرمول اسلاندر–بکسبام صدق می‌کند؟

به منظور پاسخ دادن به این سوال در فصل ۴ قضیه‌ی زیر را مطرح می‌کنیم.

قضیه‌ت: فرض کنیم که R یک حلقه‌ی موضعی کوهن مکالی باشد و M یک R–مدول که $\mathrm{Hfd}_R M < \infty$ برای $\mathrm{H} = \mathrm{CI}, \mathrm{G}^*, \mathrm{CM}^*, \mathrm{CM}$ آن‌گاه برای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ داریم:

$$\mathrm{depth}_R M \leq \mathrm{grade}(\mathfrak{p}, M) + \dim R/\mathfrak{p} \Longleftrightarrow \mathrm{Hfd}_R M + \mathrm{depth}_R M = \mathrm{depth} R.$$

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف، قضایا و نتایج مقدماتی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت می‌پردازیم. بخش ۱ را به‌تعاریف و مفاهیم مقدماتی اختصاص می‌دهیم. در بخش ۲ بعدهای همولوژیکی برای مدول‌های متناهی مولد و در بخش ۳ برخی از قضایای کاربردی، بدون اثبات بیان خواهد شد.

تعریف ۱.۱.۱ یک رسته رده‌ای است مانند $\mathcal{C}$ از اشیا (که معمولاً آن‌ها را با $\mathrm{A, B, C}, \cdots$ نشان می‌دهیم)، به انضمام:

۱) برای هر جفت A و B از اشیا در $\mathcal{C}$، یک رده از مجموعه‌های از هم جدا به نام همریختی‌های از A به B وجود دارد که با $\mathrm{Hom}(A,B)$ نشان می‌دهیم.

۲) به ازای هر سه تایی (A,B,C) از اشیا در $\mathcal{C}$، تابعی مانند

$$\mathrm{Hom}(B,C)\times \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,C),$$

وجود دارد (برای همریختی‌های $g : B \longrightarrow C$ و $f : A \longrightarrow B$، این تابع را به‌صورت $(g,f) \longrightarrow gof$ نوشته و $gof : A \longrightarrow C$ را ترکیب f و g می‌خوانیم) که در دو اصل موضوع زیرصدق می‌کند:

الف). شرکت پذیری. هرگاه $h : C \longrightarrow D$، $g : B \longrightarrow C$ و $f : A \longrightarrow B$ همریختی‌هایی از $\mathcal{C}$ باشند، آن‌گاه $ho(gof) = (hog)of$.

ب). همانی. به ازای هر شی B از $\mathcal{C}$ یک همریختی مانند $۱_B : B \longrightarrow B$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $g : B \longrightarrow C$ و $f : A \longrightarrow B$،

$$go۱_B = g \quad \text{و} \quad ۱_Bof = f.$$

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم N و K زیر مدول‌هایی از $R-$مدول M باشند. دراین صورت تعریف می‌کنیم:

$$(N :_R K) = (N : K) := \{a \in R \mid aK \subseteq N\}.$$

در حالت خاص اگر $N = ۰$، آن‌گاه $(۰ :_R K)$ را با $\mathrm{Ann}_R K$ یا $\mathrm{Ann} K$ نشان می‌دهیم و پوچساز K در R می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R زیر مجموعه‌ای مانند S از R است که شامل ۱ بوده و اگر $s_۱, s_۲ \in S$، آن‌گاه $s_۱ s_۲ \in S$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم S زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R باشد. دراین صورت به ازای $(a,s),(b,t) \in R \times S$، رابطه‌ی $\sim$ را روی $R \times S$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a,s) \sim (b,t) \Leftrightarrow \exists u \in S : u(ta - sb) = \circ.$$

دراین صورت رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

تعریف و نمادگذاری: فرض کنیم $(a,s) \in R \times S$ کلاس هم‌ارزی (a,s) را با a/s و مجموعه‌ی تمام کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی $\sim$ را با $S^{-1}R$ نشان می‌دهیم، یعنی

$$S^{-1}R = \{a/s | a \in R, s \in S\}.$$

$S^{-1}R$ تحت اعمال جمع و ضرب زیر تشکیل یک حلقه‌ی یک‌دار و جابجایی می‌دهد که آن را حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S می نامیم.

$$(a/s)(b/t) = ab/st, (a/s) + (b/t) = (ta + sb)/st.$$

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول و S زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R باشد. مشابه فرآیند تعریف قبل عمل کرده و $S^{-1}M$ را تعریف می‌کنیم. $S^{-1}M$ با عمل جمع یک گروه آبلی و با عمل ضرب زیر یک $S^{-1}R-$مدول خواهد بود.

$$(r/s)(m/t) = rm/st, r \in R, m \in M, s,t \in S.$$

نمادگذاری: فرض کنیم $\mathfrak{p}$ ایدآل اولی از حلقه‌ی R باشد. دراین صورت $S = R \setminus \mathfrak{p}$ یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی R است. دراین حالت $S^{-1}R$ و $S^{-1}M$ را به ترتیب با نمادهای $R_{\mathfrak{p}}$ و $M_{\mathfrak{p}}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. دراین صورت محمل M را با $\mathrm{Supp}_R M$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Supp}_R M = \mathrm{Supp} M := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} R : M_\mathfrak{p} \neq \circ\}.$$

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. دراین صورت بعد R را با $\dim R$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dim R = \sup\{n \mid \exists\, \mathfrak{p}_\circ, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec} R : \mathfrak{p}_\circ \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n\}.$$

اگر این sup وجود نداشته باشد، آن‌گاه گوئیم بعد R نامتناهی است و می‌نویسیم $dimR = \infty$.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و $\mathfrak{p}$ یک ایدآل اول از R باشد. دراین صورت ارتفاع $\mathfrak{p}$ را با $\mathrm{ht}\mathfrak{p}$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{ht}\mathfrak{p} = \sup\{n \mid \exists\, \mathfrak{p}_\circ, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec} R : \mathfrak{p}_\circ \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}\}.$$

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و $\mathfrak{a}$ یک ایدآل از R باشد. دراین صورت ارتفاع $\mathfrak{a}$ را با $\mathrm{ht}\mathfrak{a}$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{ht}\mathfrak{a} = \min\{\mathrm{ht}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} R, \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و M یک $R-$مدول باشد. دراین صورت بعد M را با $\dim M$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dim M = \sup\{n \mid \exists\, \mathfrak{p}_\circ, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Supp} M : \mathfrak{p}_\circ \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n\}.$$

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی و نوتری با ایدآل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد که $k = R/\mathfrak{m}$ است. اگر $\dim R = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$، آن‌گاه R را حلقه‌ای منظم و موضعی گوئیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. یک تابع‌گون همورد (پادورد) $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ $(F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D})$ تابعی با ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱) اگر A یک شی در $\mathcal{C}$ باشد، آن‌گاه TA (FA) یک شی در $\mathcal{D}$ است.

۲) اگر $f: A \longrightarrow B$ یک همریختی در $\mathcal{C}$ باشد، آن‌گاه $Tf: TA \longrightarrow TB$ $(Ff: FB \longrightarrow FA)$ یک همریختی در $\mathcal{D}$ است.

۳) اگر $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ همریختی‌هایی در $\mathcal{C}$ باشند، آن‌گاه $T(gf) = TgTf$ $(F(gf) = FfFg)$.

۴) برای هر شی A در $\mathcal{C}$، $T(1_A) = 1_{TA}$ و $(F(1_A) = 1_{FA})$.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم M یک R—مدول باشد. یک تحلیل تصویری مدول M دنباله‌ی دقیق

$$\mathbf{P}: \ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

از R—مدول‌ها و R—همریختی‌هاست که در آن p_iها تصویری می‌باشند. همچنین $\mathbf{P}_M: \ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0$ را تحلیل تصویری محذوف مدول M گوئیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم M یک R—مدول باشد. یک تحلیل تزریقی مدول M دنباله‌ی دقیق

$$\mathbf{E}: 0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \ldots,$$

از R—مدول‌ها و R—همریختی‌هاست که در آن E^iها تزریقی می‌باشند. همچنین $\mathbf{E}_M: 0 \to E^0 \to E^1 \to \ldots$ را تحلیل تزریقی محذوف مدول M گوئیم.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنیم R و S دو حلقه و $T: C(R) \to C(S)$ یک تابع‌گون همورد باشد. فرض کنیم M یک R—مدول بوده و $\mathbf{P}_M$ تحلیل تصویری محذوف M باشد. دراین صورت به ازاء هر $n \in \mathbb{Z}$، S—مدول $L_nT(M)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_nT(M) = \mathrm{H}_n(T\mathbf{P}_M) = \mathrm{Ker}Td_n/\mathrm{Im}Td_{n+1}.$$

همچنین اگر $f: M \to N$ یک همریختی R—مدولی باشد، تعریف می‌کنیم:

$$(L_nT)f: (L_nT)M \to (L_nT)N$$

$$[z] \longmapsto [(T\alpha_n)z]$$

که در آن $\mathbf{P}_N$ تحلیل تصویری محذوف مدول N بوده، $\alpha : \mathbf{P}_M \to \mathbf{P}_N$ و α_n، همریختی از n—امین مدول تصویری در تحلیل تصویری محذوف M به n—امین مدول تصویری در تحلیل تصویری محذوف N است. دراین صورت $L_nT : C(R) \to C(S)$ را n—امین تابع‌گون مشتق شده‌ی T می‌نامند.

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنیم M یک R—مدول باشد. دراین صورت اگر $T(-) = M \otimes_R -$، آن‌گاه $L_nT(-) = \mathrm{Tor}_n^R(M, -)$.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنیم S و R دو حلقه و $T : C(R) \to C(S)$ یک تابع‌گون هموردا باشد. فرض کنیم M یک R—مدول بوده و $\mathbf{E}_M$ تحلیل تزریقی محذوف M باشد. دراین صورت به ازاء هر $n \in \mathbb{Z}$، S—مدول $R^nT(M)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R^nT(M) = \mathrm{H}^n(T\mathbf{E}_M) = \mathrm{Ker}Td^n/\mathrm{Im}Td^{n-۱}$$

همچنین اگر $f : M \to N$ یک همریختی R—مدولی باشد، تعریف می‌کنیم:

$$(R^nT)f : (R^nT)M \to (R^nT)N$$

$$[z] \longmapsto [(T\alpha_n)z]$$

که در آن $\mathbf{E}_N$ تحلیل تزریقی محذوف مدول N بوده و $\alpha : \mathbf{E}_M \to \mathbf{E}_N$ و α_n، همریختی از n—امین مدول تزریقی در تحلیل تزریقی محذوف M به n—امین مدول تزریقی در تحلیل تزریقی محذوف N است. اگر $T : C(R) \to C(S)$ یک تابع‌گون پادورد باشد، به ازاء هر $n \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم:

$$R^nT(M) = \mathrm{H}^n(T\mathbf{P}_M) = \mathrm{Ker}Td_{n+۱}/\mathrm{Im}Td_n$$

$$(R^nT)f : (R^nT)N \to (R^nT)M$$

$$[z] \longmapsto [(T\alpha_n)z]$$

که در آن $\alpha : \mathbf{P}_M \to \mathbf{P}_N$ است.