بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تهران

پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

هندسه ی مجموعه های جبری کوچک

و

چندگوناهای مینیمال درجه

نگارش : راضیه احمدیان

استاد راهنما : دکتر رحیم زارع نهندی

پایان نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

در

ریاضی محض

زمستان ۱۳۸۷

جمهوری اسلامی ایران
دانشگاه تهران
اداره کل تحصیلات تکمیلی

شماره ....
تاریخ ....
پیوست ....

باسمه تعالی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب راضیه احمدیان متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه / رساله حاصل کار پژوهشی اینجانب است وبه دستاوردهایپژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است ، مطابق مقررات ارجاع ودر فهرست منابع ومآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه / رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است . در صورت اثبات تخلف (در هرزمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد .

- کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به پردیس / دانشکده / مرکز دانشگاه تهران می باشد .

نام ونام خانوادگی دانشجو
امضاء
راضیه احمدیان

آدرس : خیابان انقلاب اول خیابان فخر رازی ــ پلاک ٥ کد پستی : ١٣٠٤٥/٥٦٨
فاکس : ٦٤٩٧٣١٤

۱۳۸۸/۸/۱۰

بنام خدا

دانشگاه تهران

پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

گواهی دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

هیات داوران پایان نامه کارشناسی ارشد خانم راضیه احمدیان

در رشته ریاضی محض

با عنوان: هندسه ی مجموعه های جبری کوچک و چندگوناهای مینیمال درجه

را در تاریخ ۸۷/۱۲/۳

	به عدد	به حروف
با نمره نهایی :	۱۹/۷۵	نوزده‌وهفتادوپنج‌صدم

و درجه : عالی

ردیف	مشخصات هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه یا موسسه	امضاء
۱	استاد راهنما	دکتر رحیم زارع نهندی	استاد	دانشگاه تهران	
۲	استاد مشاور	دکتر سیامک یاسمی	استاد	دانشگاه تهران	
۳	داور خارجی	دکتر حسن حقیقی	استادیار	دانشگاه خواجه نصیر	
۴	نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر	دکتر سیامک یاسمی	استاد	دانشگاه تهران	

تذکر: این برگه پس از تکمیل توسط هیات داوران در نخستین صفحه پایان نامه درج می گردد.

تشکّر و قدردانی

نهایت سپاس و احترام خود را، نه در اینجا که همواره، به استاد ارجمند جناب آقای دکتر رحیم زارع نهندی تقدیم می‌دارم، و امیدوارم ایشان قدردانی بنده را از زحمات بی‌دریغشان در عرصه‌ی تعلیم هندسه‌ی جبری، و به ویژه، راهنمایی اینجانب در آماده‌سازی این پایان‌نامه پذیرا باشند. همچنین از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر سیامک یاسمی، که شکل‌گیری روحیّه‌ی پژوهشی خویش را مرهون شیوه‌ی تدریس خلاق ایشان می‌دانم[1]، و به عنوان استاد مشاور به بنده افتخار دادند، تشکّر می‌نمایم. بر خود لازم می‌دانم از استاد گرامی جناب آقای دکتر حسن حقیقی که آموخته‌های فراوانی از ایشان دارم، و برای داوری این پایان‌نامه نیز قبول زحمت فرمودند تشکر نمایم.

بی‌شک این پایان‌نامه متعلق به همه‌ی کسانی است که در تحصیل بنده سهیم بوده‌اند و تلاش برای ذکر نام آنان بی‌نتیجه است. با این وجود، امیدوارم نام بردن استاد گرانقدر جناب آقای دکتر ارسلان شادمان، جناب آقای دکتر یعقوب فرجامی و سرکارخانم دکتر فاطمه آیتا. . .زاده‌ی شیرازی بیانگر قدردانی بنده از ایشان باشد.

راضیه احمدیان

بهمن ۱۳۸۷

۱) با گذراندن دروس مقدّماتی جبر نزد ایشان.

چکیده

قضیه‌ی دل‌پزو و برتینی چندگوناهای ناتبهگون مینیمال درجه $X \subset \mathbb{P}^r_k$ ($\deg X = ۱ + \operatorname{codim} X$) را، که k یک میدان جبری بسته است، رده‌بندی می‌کند ([۲۱] و [۲]). توصیفی کوهمولوژیکی نیز وجود دارد: X در تنیده‌ی خطّیش دارای درجه‌ی مینیمال است اگر و تنها اگر X (با مفهوم عدد نظم کاستل‌نوو-مامفورد) ۲-منظم باشد [۸]. این قضایا در سال ۲۰۰۴ توسط آیزنباد و همکارانش [۹] برای حالت تحویل‌پذیر توسعه داده شد. ایشان اثبات کردند که هر مجموعه‌ی جبری (طرح تحویل‌یافته) ۲-منظم $X \subset \mathbb{P}^r_k$ می‌تواند با روشی ساده و استقرائی از چندگوناهای مینیمال درجه ساخته شود، و یک شرط هندسی شبیه به مینیمال درجه بودن ارائه کردند: طرح تحویل‌یافته‌ی $X \subset \mathbb{P}^r$ ۲-منظم است اگر و تنها اگر کوچک باشد، یعنی اگر $\Lambda \subset \mathbb{P}^r$ زیرفضای خطّی دلخواهی باشد، آنگاه درجه‌ی هندسی $\Lambda \cap X$ حداکثر یکی بیشتر از هم‌بعد $\Lambda \cap X$ در Λ باشد. این نتایج توسط تحلیل‌های ظریف هندسی حاصل می‌شود و به رده‌بندی کاملی از مجموعه‌های جبری کوچک منجر می‌گردد.

این پایان‌نامه به منظور ارائه‌ی نتایج فوق بر اساس کاربردی روشمند از زبان و ایده‌های نظریه‌ی طرح‌ها تنظیم شده است. همچنین با ذکر مثال‌های مقدماتی و ارائه‌ی اثبات کامل قضیه‌ی دل‌پزو-برتینی (به سبک جدید [۱۱]) انگیزه‌ی مطالب به طور کامل مطرح گردیده است.

فهرست مطالب

مقدمه

یافتن نخستین گام‌های پیدایش هندسه‌ی جبری، به عنوان علمی که در ابتدا با هدف مطالعه و رده‌بندی اشکال تعریف شده توسط معادلات جبری ایجاد شده، دشوار است. چرا که حتّی ریاضیدانان یونان باستان نیز، به نوعی، به بررسی اینگونه مسائل می‌پرداختند. به عنوان مثال مقاطع مخروطی سه قرن پیش از میلاد توسط آپلونیوس[2] رده‌بندی شده بودند و دیوفانتوس[3] دو قرن قبل از میلاد خم‌های مسطّح درجه‌ی سه را مورد مطالعه قرار داده بود.

از منظر تاریخ، شکل‌گیری نظریه‌ی تقاطع خم‌های مسطّح یکی از عوامل مؤثر در پیدایش هندسه‌ی جبری به شمار می‌رود. شمارش تعداد نقاط تقاطع خم مسطّح درجه‌ی m،

$$C : F(x_0, x_1, x_2) = 0$$

و خم مسطّح درجه‌ی n،

$$D : G(x_0, x_1, x_2) = 0$$

در صفحه‌ی تصویری مختلط $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$، نقطه‌ی شروع این مسیر است. به طور طبیعی، فقط باید جواب دستگاه

$$\begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ G(x_0, x_1 . x_2) = 0 \end{cases}$$

را با حل کردن معادله‌ی جدید بدست آمده از حذف یکی از متغیّرهای دستگاه بدست آورد. با این هدف، نظریه‌ی حذف، که گاهاً نتایجی داشت که تا اندازه‌ای غیرمعمول بودند، ایجاد شد. تلاش برای رفع چنین مشکلاتی به توسعه‌ی هندسه‌ی جبری کمک کرد.

2) Apollonius 3) Diophantus

در این بین، اثبات دقیق بسیاری از گزاره‌هایی که به طور شهودی بدیهی به نظر می‌رسیدند، نیازمند کار زیادی بود و این امر لزوم استحکام بخشیدن به نظریه‌های موجود را بیان می‌کرد. از نتایج مهم بدست آمده در این راستا، که از این حقیقت مستثنی نیست، قضیه‌ی بزو[4] است.

قضیه ۱ (قضیه بزو) اگر خم مسطّح C از درجه‌ی m و خم مسطّح D از درجه‌ی n دارای هیچ مولفه‌ی مشترکی نباشند (یعنی، معادله‌های F و G عامل مشترک نداشته باشند)، آنگاه تعداد نقاط تقاطع C و D، با در نظر گرفتن چندگانگی‌ها، برابر mn است. ■

پیدایش نظریه انتگرال‌های آبلی ریمان[5] (۶۶-۱۸۲۶) تغییر اساسی در زاویه‌ی دید هندسه‌ی جبری ایجاد کرد و پایه‌ای برای پیشرفتش در مسیر جدید تشکیل داد. گستره‌ی اشیاء هندسی مورد بررسی، در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، از خم‌های مسطّح به رویه‌های جبری و پس از آن به اشیاء هندسی تعریف شده توسط معادلات جبری در فضای تصویری مختلط $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ با بعد دلخواه توسعه یافت. طبعاً، گام بعد تعمیم نتایج بدست آمده برای خم‌ها به ابعاد دیگر و لازمه‌ی آن انتقال مفاهیم با دقّت کافی بود. این کار برای «درجه»، با توجه به این نکته که درجه‌ی خم مسطّح C در حقیقت تعداد نقاط تقاطع آن با یک خط است، به سادگی صورت گرفت.

اشیائی چون $X \subset \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$، که توسط معادلات جبری تعریف شده‌اند، در فضای تصویری (که به عنوان خارج قسمت کره‌ی حقیقی $2r+1$ بعدی فشره است) بسته و در نتیجه فشرده هستند، بنابراین اشتراک یک فضای خطی عمومی از بعد مکمل با X، مجموعه‌ای ناتهی و متناهی از نقاط می‌باشد که تعداد اعضای آن مستقل از انتخاب فضای خطی است. این عدد را درجه‌ی X نامیده و با $\deg X$ نشان می‌دهیم. حتّی اگر فضای خطّی دلخواهی از بعد مکمل در نظر بگیریم که X را در تعداد متناهی نقطه قطع می‌کند و تعداد نقاط اشتراک را با چندگانگی مناسب شمارش کنیم به نتیجه‌ای یکسان خواهیم رسید. این حقیقت که به نوعی بیانگر ناوردایی درجه برای نشانیدن X در $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ می‌باشد، با استفاده از نظریه‌ی حذف به اثبات رسید. (امروزه با استفاده از توپولوژی جبری نشان می‌دهیم، درجه‌ی X که به صورت فوق تعریف شد، یک ناوردای کوهمولوژیکی از نشانیدن X در $\mathbb{P}^r$ است.)

نقاط واقع در اشتراک $X \subset \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ با یک فضای خطّی عمومی چون L از بعد مکملش، علاوه بر کاردینالیتی، ساختار جالب توجهی نیز در L دارند؛ می‌توان نشان داد که نقاط $X \cap L$ تولید کننده‌ی فضای خطّی L هستند.

4) Bezout 5) Riemann

از آنجا که d نقطه برای تولید فضای خطّی $d-۱$ بعدی لازم است، نامساوی

$$\deg X \geqslant ۱ + \dim \operatorname{span} X - \dim X$$

بدست می‌آید، که در آن $\operatorname{span} X$ تنیده‌ی خطّی X، اشتراک کلّیه‌ی فضاهای خطّی شامل X، است. به عنوان نمونه، اگر X ناتبهگون باشد، یعنی $\operatorname{span} X = \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ ، $\deg X \geqslant ۱ + \operatorname{codim} X$.

رابطه‌ی فوق برای برخی مثال‌های متداول نظیر زیرفضای خطّی $X \subset \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ با بعد دلخواه، مقاطع مخروطی مسطّح و تعمیم آن‌ها یعنی ابررویه‌های درجه‌ی دوّم، تساوی است. برقراری تساوی در رابطه‌ی اخیر در حقیقت بیانگر استقلال خطّی نقاط $X \cap L$ می‌باشد. اگر $X \subset \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ ناتبهگون بوده و در رابطه‌ی فوق تساوی برقرار باشد، X مینیمال درجه نامیده می‌شود. خم‌های نرمال گویای درجه‌ی d در $\mathbb{P}^d_{\mathbb{C}}$، رویه‌ی ورونزه[۶] و طومارهای نرمال گویا مثال‌های شناخته‌شده‌ی دیگری از خم‌ها و رویه‌های مینیمال درجه هستند.

در سال ۱۸۸۶ دل‌پزو[۷] رویه‌های مینیمال درجه را رده‌بندی و خاطرها را از یافتن مثال‌هایی متفاوت از خانواده‌های ذکر شده آسوده کرد. به دنبال آن برتینی[۸] در سال ۱۹۰۷ این رده‌بندی را به سایر ابعاد تعمیم داد. قضیه‌ی رده‌بندی دل‌پزو-برتینی تنها یکی از نتایج توسعه‌ی روزافزون هندسه‌ی جبری در آن زمان بود. این رشد بی‌وقفه نیاز به یک نظریه‌ی دقیق ریاضیاتی را شدّت می‌بخشید.

در سال‌های ۱۹۴۰ شکل‌گیری پایه‌های مستحکم هندسه‌ی جبری به واسطه‌ی تلاش‌های ویل[۹] و زاریسکی[۱۰] (۱۹۸۶-۱۸۹۹) محقّق گشت. زاریسکی قصد داشت نظریه‌ی رویه‌های جبری مکتب ایتالیا را، که بیشتر بر اساس شهود و درک مستقیم پیش رفته بود، دقّت بخشد، و هدف ویل شکل دادن هندسه‌ی جبریی بود که برای اثبات حدس ریمان در مورد قابلیّت انطباق توابع زتا برای خم‌های جبری مناسب باشد. به طور مستقل در دهه‌ی ۱۹۴۰، آن‌ها موفق شدند هندسه‌ی جبری را نه تنها روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ بلکه روی میدان‌های با مشخصه‌ی p بنا نهند. استفاده از چندگوناها به عنوان اشیاء هندسی تعریف شده توسط معادلات جبری از همین زمان آغاز شد.

دستاوردهای ویل و زاریسکی آغاز مسیر صحیح پیشرفت هندسه‌ی جبری بود. به دنبال آن، در سال‌های ۱۹۵۵ سر[۱۱] با استفاده از نظریه‌ی بافه‌ها، که در اصل برای نظریه‌ی توابع مختلط چند متغیّره‌ی شکل گرفته بود، نقطه‌نظرات جدیدی مطرح ساخت. در دهه‌ی ۱۹۶۰، گروتندیک[۱۲] در پی حل کردن حدس ویل برای قابلیّت انطباق توابع زتا روی چندگوناهای جبری دلخواه، با استفاده از نظریه‌ی سر هندسه‌ی جبریِ روی حلقه‌های جابجایی دلخواه، یعنی نظریه‌ی طرح‌ها، را خلق کرد.

6) Veronese 7) Del Pezzo 8) Bertini 9) Weil 10) Zariski 11) Serre 12) Grothendieck

شکل‌گیری مفاهیم نسبتاً مجرد فوق با حفظ ویژگی‌های شهودی مفاهیم ابتدایی همراه بود. طبیعی بود که در کنار استفاده از قابلیّت عالی طرح‌ها برای توسعه‌ی کاربردها و نتایج جدید، تلاش‌هایی هم برای بیان مفاهیم و نتایج گذشته با زبان طرح‌ها، همچنین تعمیم آن‌ها از حالت‌های خاص به حالت کلّی صورت گیرد. بکارگیری نظریه‌ی طرح‌ها علاوه بر دقّت بخشیدن بسیاری از اثبات‌های گذشته را تسهیل می‌کرد.

یکی از نتایجی که بیان و اثبات آن در زبان طرح‌ها نه تنها ممکن بود، بلکه نوآوری‌هایی نیز به همراه داشت، قضیه‌ی دل‌پزو-برتینی بود. آیزنباد[13] و هریس[14] در سال ۱۹۸۵، با بکارگیری ابزارهای مدرن، برهانی کوتاه و متفاوت از این قضیه، که در هر مشخصه‌ای معتبر است، ارائه دادند [۱۱]. اثبات آن‌ها بر خلاف برهان‌های پیشین، که با در نظر گرفتن مقطع مسطح عمومی و تقلیل به حالت رویه‌ها انجام شده بودند، بر اساس هندسه‌ی ذاتی چندگوناهای مینیمال درجه صورت گرفته است.

در حقیقت، مفهوم درجه برای طرح تحویل‌یافته و تحویل‌ناپذیر $X \subset \mathbb{P}^r_k$ روی میدان جبری بسته‌ی k، که بنا به تعریف چندگونای مجرد نامیده می‌شود، دقیقاً همانند گذشته، قابل تعریف است. همچنین، رابطه‌ای که شامل کران پایینی برای درجه بود، برای چندگونای X برقرار می‌باشد و به دنبال آن می‌توان چندگونای مینیمال درجه را تعریف کرد. به طور دقیق‌تر، اگر کوچک‌ترین زیرفضای خطّی $\mathbb{P}^r$ شامل X را با $\mathrm{span}(X)$ نشان دهیم، داریم

$$\deg X \geqslant 1 + \mathrm{codim}(X, \mathrm{span}(X)),$$

و چندگونای $X \subset \mathbb{P}^r$ را مینیمال درجه (با دقّت بیشتر، مینیمال درجه در تنیده‌ی خطّیش) نامیم هرگاه تساوی برقرار باشد.

بدین ترتیب، قضیه‌ی رده‌بندی دل‌پزو-برتینی را نیز، که طبعاً معتبر است، می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۲ (قضیه‌ی دل‌پزو-برتینی) یک چندگونای تصویری مینیمال درجه یکی از موارد زیر است:

(۱) فضایی خطّی،

(۲) ابررویه‌ای درجهٔ دوّم در یک فضای خطّی،

(۳) مخروطی روی رویه‌ی ورونزه در $\mathbb{P}^5$،

(۴) یک طومار نرمال گویا.

امکان تعمیم این قضیه برای طیف وسیعتری از طرح‌ها درگرو معنی داشتن «مینیمال درجه بودن» برای آن‌ها است. کار را با طرح تصویری تحویل‌یافته‌ی $X \subset \mathbb{P}^r_k$، روی میدان جبری بسته‌ی k، که مجموعه‌ی جبری

13) Eisenbud 14) Harris

نامیده می‌شود، ادامه می‌دهیم. ابتدا باید چگونگی تعریف درجه برای مجموعه‌های جبری را بررسی کرد. انتخاب طبیعی و صحیح این است که درجه‌ی X را مجموع درجات مؤلفه‌هایی از X که دارای بعد ماکسیمال (بعد X) هستند قرار دهیم. با این تعریف مجموعه‌ی جبری شامل دو خطّ متنافر در $\mathbb{P}^۳$ در نامساوی فوق صدق نمی‌کند ($۲ \not\geq ۱ + [۳ - ۱]$). به طور مشابه، اجتماع دو فضای خطّی مجزا از بعد n در $\mathbb{P}^{۲n+۱}$ نیز نامساوی را برقرار نمی‌سازد ($۲ \not\geq ۱ + [(۲n + ۱) - n]$). وجود چنین مثال‌هایی که بیانگر نادرستی نامساوی اساسی برای مجموعه‌های جبری در حالت کلّی است، تعریف مجموعه‌ی جبری مینیمال درجه، و به وضوح طرح مینیمال درجه، را غیرممکن می‌سازد.

این مانع تلاش برای توسعه‌ی نتایج مربوط به چندگوناهای مینیمال درجه را متوقف نساخت. یکی از نتایج مؤثر، که با استفاده از عدد نظم کاستل‌نوو[۱۵]ـمامفورد[۱۶] توصیفی کوهمولوژیکی برای چندگوناهای مینیمال درجه ارائه می‌دهد، در سال ۱۹۸۴ توسط آیزنباد و گوتو[۱۷] بدست آمد [۸]. عدد نظم کاستل‌نووـمامفورد طرح تصویری $X \subset \mathbb{P}^r$ (روی یک میدان جبری بسته) تخمینی همولوژیکی از پیچیدگی‌های X و نشانیدنش در $\mathbb{P}^r$ است که کرانی برای درجه‌ی مولّدهای ایده‌آل I_X وبسیاری ناورداهای دیگر در اختیار ما می‌گذارد. بنا به تعریف، گوییم طرح تصویری $X \subset \mathbb{P}^r$ دارای عدد نظم کاستل‌نووـمامفورد d است، یا dـمنظم است، هرگاه بافه‌ی ایده‌آلی $\mathcal{I}_X$ برای هر $i > ۰$، در شرط $\mathrm{H}^i(\mathcal{I}_X(d - i)) = ۰$ صدق کند، یا به طور معادل، برای هر $j \geq ۰$، درجه‌ی مولّدهای سیزیجی‌های jـام ایده‌آل همگن I_X کمتر یا مساوی $d + j$ باشد. آیزنباد و گوتو نشان دادند که

قضیه ۳ چندگونای $X \subset \mathbb{P}^r$ در تنیده‌ی خطّیش مینیمال درجه است اگر و تنها اگر ۲ـمنظم باشد.

با این قضیه ویژگیی از چندگوناهای مینیمال درجه حاصل می‌شود که برای طرح‌ها نیز قابل بیان است و زمینه را برای تعمیم قضیه‌ی دل‌پزوـبرتینی به طرح‌های تصویری فراهم می‌سازد.

از سوی دیگر، تعبیر هندسی ساده‌ای برای طرح‌های ۲ـمنظم تشکیل‌شده از تعدادی متناهی نقطه وجود دارد؛ در واقع، نقاط چنین طرحی مستقل خطّی اند (یعنی $\deg X = \dim \mathrm{span}(X) + ۱$). این حقیقت ویژگی هندسی مهمی از مجموعه‌های جبری (و به طور کلّی‌تر، طرح‌های) ۲ـمنظم را نتیجه می‌دهد. در صورتی که $X \subset \mathbb{P}^r$ ۲ـمنظم و Λ زیرفضایی خطّی باشد که $X \cap \Lambda$ صفر بعدی شود، $X \cap \Lambda$ نیز ۲ـمنظم است. این نتیجه که پس از کار سیدمن[۱۸] در سال ۲۰۰۲ [۲۳] مورد توجه قرار گرفت، دارای صورت‌های کلّی‌تری است که پیش از سیدمن و بعد از وی بیان شده‌اند.

تلفیق حقایق فوق بیانگر یک ویژگی هندسی از طرح‌ها است که به نوعی تعمیم مینیمال درجه بودن

15) Castelnuovo 16) Mumford 17) Goto 18) Sidman

محسوب می‌شود و انگیزه‌ی ارائه‌ی یک تعریف ویژه را ایجاد می‌کند. گوییم طرح $X \subset \mathbb{P}^r$ کوچک است هرگاه، برای هر زیرفضای خطّی $\Lambda \subset \mathbb{P}^r$ که $Y = X \cap \Lambda$ متناهی باشد، طرح Y مستقل خطّی باشد. به این ترتیب می‌بینیم که

گزاره ۴ هر طرح ۲ـمنظم کوچک است.

از سوی دیگر، اندکی تجربه در استفاده از دنباله‌های دقیق نشان می‌دهد که اجتماع طرح‌های ۲ـمنظم X و Y، که $X \cap Y = \operatorname{span} X \cap \operatorname{span} Y$، نیز ۲ـمنظم است. به طور کلّی یک دنباله از زیرطرح‌های بسته‌ی $X_1, \ldots, X_n \subset \mathbb{P}^r$ را خطّی‌ـمتصّل نامیم اگر، برای هر $i = 1, \ldots, n$، داشته باشیم

$$(X_1 \cup \cdots \cup X_i) \cap X_{i+1} = \operatorname{span}(X_1 \cup \cdots \cup X_i) \cap \operatorname{span}(X_{i+1}).$$

طبیعتاً اجتماع اعضای یک دنباله‌ی خطّی‌ـمتصّل از طرح‌های ۲ـمنظم، ۲ـمنظم می‌باشد. این حقیقت در کنار دربرداشتن شیوه‌ای برای ساختن طرح‌های ۲ـمنظم پیچیده‌تر، به معرفی ساختاری می‌پردازد که می‌توان آن را تعمیم چندگوناهای مینیمال درجه به شمار آورد.

آیزنباد، گرین[19]، هولک[20] و پوپسکو[21] در مقاله‌ای که سال ۲۰۰۴ ارائه کردند [۹]، علاوه بر اثبات درستی عکس گزاره‌ی ۴، نشان دادند که مؤلفه‌های یک مجموعه‌ی جبری کوچک چندگوناهای مینیمال درجه‌ی خطّی‌ـمتصّل هستند؛ و بدین ترتیب رده‌بندی کاملی برای طرح‌های تحویل‌یافته‌ی کوچک به صورت زیر بدست آوردند.

قضیه ۵ (آیزنبادـگرینـهولکـپوپسکو) فرض کنید $X \subset \mathbb{P}^r$ مجموعه‌ای جبری باشد. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند:

(۱) X کوچک است.

(۲) X ۲ـمنظم است.

(۳) $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$، که در آن $X_1, \ldots, X_n$ دنباله‌ای خطّی‌ـمتصّل از چندگوناهای مینیمال درجه می‌باشد.

این قضیه نتایج جبری و هندسی جالبی به همراه دارد و یکی از مزایای آن استفاده از شرایط معادل فوق برای بررسی کوچک بودن مجموعه‌های جبری است که به طور مستقیم دشوار می‌باشد.

19) Green 20) Hulek 21) Popescu

همانند سایر یافته‌های علمی، که پایان یک راه و آغاز راه‌هایی دیگرند، این قضیه نیز حدس‌هایی در پی داشته است. اغلب این حدسیات (نظیر حدسی که آیزنباد در [۷] دارد) به توصیف و بیان ویژگی‌های طرح‌های ۲ـمنظم می‌پردازد.

فصول شش‌گانه‌ی این پایان‌نامه با هدف شناخت هندسه‌ی چندگوناهای مینیمال درجه و مجموعه‌های جبری کوچک و فراهم نمودن مقدمات و ابزارهای لازم برای مطالعه و تحقیق در این زمینه شکل گرفته اند. فصل اوّل با توصیفی که از چندگوناهای مینیمال درجه در فضای تصویری مختلط دارد مخاطب را در گام‌های بعدی به شهود هندسی مجهّز می‌کند. در فصل‌های دوّم و چهارم سعی شده با مروری بر نظریه‌ی طرح‌ها و جبر همولوژی زمینه‌ی فهم سایر فصل‌ها ایجاد شود. بررسی هندسه‌ی چندگوناهای مینیمال درجه مطالب فصل سوّم را به خود اختصاص داده و مهم‌ترین نتیجه‌ی آن قضیه‌ی رده‌بندی دل‌پزو-برتینی است. فصل پنجم با بیان تعریف و خواص عدد نظم کاستل‌نوو-مامفورد آغاز و با شناخت ویژگی‌های اساسی طرح‌های ۲ـمنظم پایان می‌یابد. در فصل ششم با تکیه بر نتایج پیشین و شناختی که از مجموعه‌های جبری کوچک و دنباله‌های خطّی-متصّل حاصل می‌شود برهان قضیه‌ی ۵ ارائه می‌گردد. امید است مطالب این پایان‌نامه مورد استفاده‌ی علاقمندان قرار گرفته و رضایت ایشان را جلب نماید.

فصل اول

آشنایی با چندگوناهای مینیمال درجه

درگیر شدن با ایده‌آل‌ها، بافه‌ها، طرح‌ها و کوهمولوژی در متون پیشرفته‌ی هندسه‌ی جبری و حتی برخی کتب مقدماتی، مطالعه‌ی تخصّصی در این زمینه را در نظر بسیاری از افراد دشوار جلوه داده و دستیابی به فهم کلی را مشکل می‌سازد. البتّه، توسعه‌ی صحیح و درخور هندسه‌ی جبری لوازم متعدّدی می‌طلبد. نیاز به این ابزار گوناگون و بعضاً مجرد طبیعی به نظر می‌رسد، چرا که از سویی، نحوه‌ی پیشرفت هندسه‌ی جبری به گونه‌ای است که فقدان ساختارهای نظری بسیار دقیق خطر بروز پارادکس‌های شهودی ساده را به‌همراه دارد، و از سویی دیگر، هندسه‌ی جبری دانان این نظریه را با به کار گرفتن ابزارهای مورد نیازشان از شاخه‌های متعدّد ریاضیات توسعه داده‌اند.

با این وجود، در بسیاری از شاخه‌های توسعه یافته‌ی هندسه‌ی جبری می‌توان با بیان مفاهیم و قضایا در ساده‌ترین حالات ممکن، بررسی مثال‌های متداول و سپس انتقال آن‌ها به حالت‌های کلّی، تا حدّی از پیچیدگی‌ها و دشواریهایی که بر سر راه فهم مطلب قرار می‌گیرند، کاست. ضمن اینکه، ایجاد این تغییر اندک در شیوه‌ی مطالعه عموماً ذکر انگیزه و روند شکل‌گیری تعاریف و حقایق مربوط به آن‌ها را نیز به همراه دارد، که خود تأثیر بسزایی در فهم مطالب و تعمیم آن‌ها دارد.

با توجه به نگرش فوق، طبیعی است مطالعه روی مجموعه‌های جبری کوچک را، که حالت کلّی چندگوناهای مینیمال درجه به شمار می‌روند، با معرفی و شناخت چندگوناهای مینیمال درجه در فضای تصویری مختلط شروع کنیم. (امیدوارم وجود تابعگر طبیعی کاملاً وفادار از رسته‌ی چندگوناهای روی میدان جبری بسته‌ی k،

$\mathfrak{Var}(k)$، به طرح‌های روی k، $\mathfrak{Sch}(k)$، که تصویر آن دقیقاً مجموعه‌ی طرح‌های صحیح شبه تصویری روی k است و انگیزه‌ی تعریف چندگونای مجرد (طرح صحیح مجزا از نوع متناهی) را در نظریه‌ی طرح‌ها ایجاد می‌کند؛ رضایت خوانندگان نکته سنج را نیز نسبت به این روش جلب کند).

اگر $X \subseteq \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ چندگونایی d بعدی باشد، بسته و در نتیجه فشرده بودن آن موجب می‌شود که اشتراک X با یک فضای خطّی عمومی مثل L از بعد $r-d$ (بعد مکمل X) ناتهی و متناهی باشد. تعداد نقاط مجموعه‌ی متناهی $X \cap L$، که مستقل از انتخاب فضای خطی عمومی L است، درجه‌ی X نامیده و با $\deg X$ نشان می‌دهیم. درجه‌ی X در حقیقت یک ناوردای کوهمولوژیکی از نشانیدن X در $\mathbb{P}^r$ است. این مطلب را در قسمت اول این فصل با ارائه‌ی توصیفی توپولوژیکی از درجه‌ی چندگونای X خواهیم دید.

علاوه برکاردینالیتی توجه به سایر ویژگی‌های مجموعه‌ی $X \cap L$ نظیر موقعیّت نقاط آن نسبت به یکدیگر نتایج مفیدی به همراه دارد. مهمترین نتیجه‌ای که در پی اثبات قضیه ۱-۱-۱ این فصل، تحت عنوان «استقلال خطّی مقطع مسطح»، حاصل می‌شود برقراری نامساوی

$$\deg X \geqslant 1 + \dim \operatorname{span} X - \dim X \qquad (*)$$

برای چندگونای $X \subset \mathbb{P}^r$ است. برقراری تساوی در این رابطه، که با توجه به تعریف درجه‌ی X، بیانگر استقلال خطّی مجموعه نقاط $X \cap L$ می‌باشد، منجر به طرح مفهوم مینیمال درجه بودن برای چندگوناها می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، چندگونای X را مینیمال درجه در تنیده‌ی خطّی‌اش نامیم هرگاه در $(*)$ تساوی برقرار باشد.

فضاهای خطّی و پس از آن‌ها مقاطع مخروطی مسطح و حالت کلّی آن‌ها یعنی ابررویه‌های درجه‌ی دوّم ساده‌ترین نمونه‌ها از چندگوناهای مینیمال درجه هستند. نگاهی متفاوت به مقاطع مخروطی، مثال مهمّ دیگری را فراهم می‌آورد:

نتیجه ۱-۱ رویه‌ی ورونزه در $\mathbb{P}^5$، تصویر ریختبری

$$\nu : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5 \ : \ (s,t,u) \mapsto (s^2, st, t^2, su, tu, u^2),$$

یک چندگونای مینیمال درجه است.

و خواهیم دید که، هیچ یک از اعضای دیگر خانواده‌ی چندگوناهای تولید شده توسط نشانیدن ورونزه، به جز رویه‌ی ذکر شده و خم‌های نرمال گویا که آن‌ها هم در خانواده‌ی طومارها قرار دارند، مینیمال درجه نیستند.

همان گونه که می‌بینید رویه‌ی درجه دوّم هموار در هیچ یک از مثال‌های فوق به چشم نمی‌خورد. توجه به نحوه‌ی ساخت این رویه، با استفاده از پارامتریسازی‌های $\varphi_i : \mathbb{P}^1 \to L_i \subset \mathbb{P}^3$ از دو خط متنافر L_1 و L_2،

به صورت $\Sigma = \bigcup_{p\in\mathbb{P}^1} \overrightarrow{\varphi_1(p),\varphi_2(p)}$، که یکی از توصیفات هندسی این رویه است، الهام بخش ساخت خانواده‌ی مهمّ دیگری از چندگوناهای مینیمال درجه می‌باشد.

نتیجه ۱-۲ هر چندگونای طوماری نرمال گویا تعریف شده به صورت

$$\Sigma(d_1,\dots,d_e) = \bigcup_{p\in\mathbb{P}^1} \overrightarrow{\varphi_1(p),\dots,\varphi_e(p)},$$

که در آن $\varphi_i : \mathbb{P}^1 \to C_i \subset \mathbb{P}^r$ پارامتریسازی خم نرمال گویای C_i از درجه‌ی d_i است، چندگونایی مینیمال درجه می‌باشد.

قضیه‌ی رده‌بندی دل‌پزو[1]-برتینی[2] که در فصل سوّم با استفاده از نظریه‌ی طرح‌ها اثبات می‌شود، نشان دهنده‌ی ناممکن بودن دستیابی به مثال‌های بیشتر است.

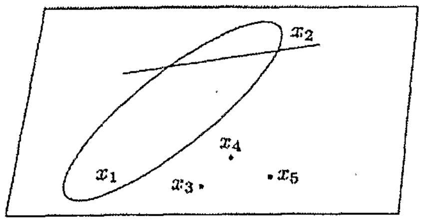
۱-۱ تبیین مبانی نظری تعریف

در این فصل، در فضای تصویری مختلط $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^r$، که می‌تواند به عنوان مجموعه‌ی زیرفضاهای یک بعدی مختلط از فضای برداری $\mathbb{C}^{r+1}$ در نظر گرفته شود، کار می‌کنیم. (انتخاب $\mathbb{C}$ صرفاً به منظور داشتن شهود هندسی صورت گرفته، و در زمینه‌ی کاری ما انتقال مطالب به میدان دلخواه تنها نیازمند تغییرات تکنیکی است.) اشیاء مورد توجه ما مجموعه‌های جبری در $\mathbb{P}^r$ هستند، مجموعه‌هایی که توسط صفرهای چندجمله‌ای‌های همگن در مختصات x_i تعیین می‌شوند. به هر مجموعه‌ی جبری X ایده‌آل $I(X)$ از $S = \mathbb{C}[x_0,\dots,x_r]$ را، که به وسیله‌ی چندجمله‌ای‌های همگنی که در تمام نقاط X صفر می‌شوند تولید می‌گردد، نسبت می‌دهیم.

به عنوان یک فضای توپولوژیک، $\mathbb{P}^r$ خارج قسمت کره‌ی حقیقی $2r+1$ بعدی است (کره‌ی $2r+1$ بعدی را در $\mathbb{C}^{r+1} = \mathbb{R}^{2r+2}$ تجسّم کنید، یک نقطه‌ی دلخواه روی کره را به خط مختلط گذرنده از مبدأ و آن نقطه نظیر کنید). بنابراین $\mathbb{P}^r$ یک فضای فشرده است. مجموعه‌های جبری درون $\mathbb{P}^r$ بسته و در نتیجه آنها نیز فشرده می‌باشند.

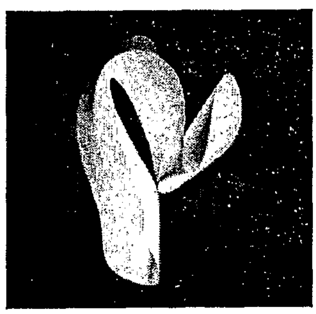
یک مجموعه‌ی جبری را چندگونای جبری نامیم و یا گوییم تحویل‌ناپذیر است، هرگاه نتوان آن را به صورت اجتماع دو مجموعه‌ی جبری کوچک‌تر نوشت. هر مجموعه‌ی جبری به طور یکتا به صورت اجتماعی از چندگوناهای جبری جدا از هم ـ مؤلفه‌هایش ـ که هیچ یک شامل دیگری نیست، نوشته می‌شود. شکل ۱-۱ یک مجموعه‌ی جبری با پنج مؤلفه را نشان می‌دهد.

1) Del Pezzo 2) Bertini



شکل ۱-۱: مجموعه‌ای جبری با چندین مؤلفه از بعدهای متفاوت.

هر چندگونای X شامل یک مجموعه‌ی باز چگال است که زیرخمینه‌ای مختلط تحلیلی و همبند از $\mathbb{P}^r$ می‌باشد؛ مجموعه‌ی مکمل آن، مجموعه‌ای جبری از بعدی کوچکتر است که مکان هندسی تکین X نامیده می‌شود (شکل ۱-۲ را ببینید). بنابراین بعد X به عنوان بعد (مختلط) این خمینه خوش‌تعریف است. با توجه به تعریف، X اجتماعی از تعداد متناهی زیرچندگونای سره نیست؛ حتی اثبات گزاره‌ی قوی‌تر که هر زیرچندگونای سره‌ی X بعدی اکیداً کوچک‌تر از X دارد به سادگی صورت می‌گیرد. به عنوان مثال، یک چندگونا دارای بعد صفر است اگر و تنها اگر شامل یک تک‌نقطه‌ای باشد. فضای تصویری $\mathbb{P}^r$ خود یک چندگونای r بعدی است. در ادامه با مثال‌های بیشتری مواجه خواهیم شد.



شکل ۱-۲: چندگونای $(x^2 - y^3)^2 = (x + y^2)z^3$. توجه کنید که نقاط هموار چگال اند و یک خمینه‌ی همبند تشکیل می‌دهند. روی اعداد مختلط این همواره درست است.

یک نتیجه‌ی مهم از فشردگی این است که چندگونای d بعدی X در $\mathbb{P}^r$ یک فضای خطی عمومی L از بعد مکمل، یعنی $r - d$، را در مجموعه‌ای ناتهی و متناهی از نقاط قطع می‌کند که تعداد این نقاط مستقل از انتخاب فضای عمومی L است. این عدد درجه‌ی X نامیده می‌شود. همچنین، تعداد نقاط اشتراک هر فضای خطی $r - d$ بعدی، که X را در مجموعه‌ای متناهی از نقاط قطع می‌کند، اگر با در نظر گرفتن چندگانگی مناسب شمارش شود با درجه‌ی X برابر است. این مسئله در ابتدا توسط نظریه‌ی حذف اثبات شده است، امّا